Análisis Matemático I
Clase 10: Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la derivada primera para extremos locales. Concavidad y puntos de inflexión.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2023

Funciones crecientes y decrecientes

Vamos a considerar funciones crecientes o decrecientes con desigualdades estrictas:

- Decimos que f es creciente en D si:

$$f(x) < f(y)$$

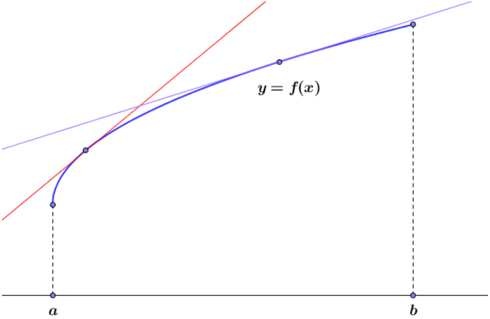
  para todo x y y en D tales que: $x < y$.

- Decimos que f es decreciente en D si:

$$f(x) > f(y)$$

  para todo x y y en D tales que: $x < y$.

La función de la siguiente figura es creciente en $[a, b]$:



Observar que si trazamos las rectas tangentes en cada punto de la gráfica de $y = f(x)$ para $x \in (a, b)$ se tiene que las pendientes de dichas rectas son positivas. Es decir, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Basado en esta observación, se da ahora un criterio para determinar dónde crece o decrece una función derivable en términos del signo de f'.

Prueba de la derivada primera para funciones crecientes o decrecientes

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces:

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Observación: si en el teorema anterior f es continua solamente en (a, b), entonces se debe reemplazar $[a, b]$ por (a, b) en las dos implicaciones. Además, el teorema puede aplicarse a funciones con dominios que no consisten solamente en un intervalo como veremos en el próximo ejemplo.

Demostración de la prueba de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes

Demostración: vamos a probar el primer ítem. El segundo queda como ejercicio para el estudiante. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Sean $x, y \in [a, b]$ tales que:

$$x < y.$$

Entonces f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, y]$ y por ende existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis $f'(c) > 0$ y además $y - x > 0$, obtenemos que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$$

y entonces:

$$f(y) > f(x),$$

lo cual prueba que la función f es creciente en $[a, b]$.

Ejemplo: determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es creciente y donde es decreciente.

Antes de resolver el problema tener en cuenta que: para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, vamos a determinar los intervalos donde f' es positiva y donde es negativa. Para ello, se deben distinguir los puntos donde f' cambia de signo. Estos se encuentran, en los casos que abordaremos en este curso, en:

- los puntos críticos, es decir, puntos **interiores** del dominio de f donde la derivada es cero o no existe
- los extremos o puntos frontera del dominio de f
- los puntos de discontinuidad de f.

Solución del ejemplo: observar que f tiene por dominio $\mathbb{R}$ y que es continua en todo $\mathbb{R}$. Por ende, los únicos puntos que se deben considerar para analizar el cambio de signo de f' son los puntos críticos.
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

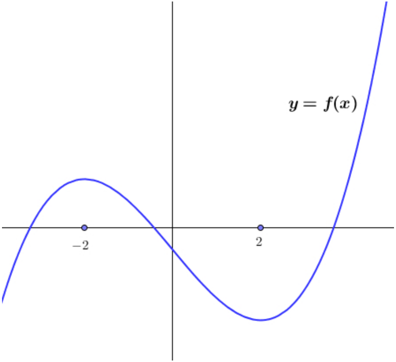
Dado que f' existe para todo $x \in \mathbb{R}$, los únicos puntos críticos son aquellos donde f' es cero. En este caso:

$$x_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2.$$

Analizamos los signos de f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

•	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de f'	$+$	-	$+$
Conclusión	f es creciente	f es decreciente	f es creciente

Observar que en el ejemplo anterior no se dijo que f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. De hecho, si consideramos el gráfico de f:

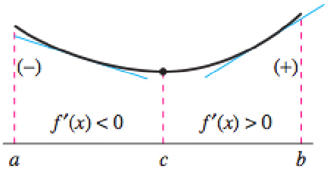


concluimos que f no es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ pues hay puntos cercanos a 2 donde f asume valores más chicos que en puntos cercanos a -2. Así, los intervalos donde una función crece o decrece deben colocarse de forma separada:

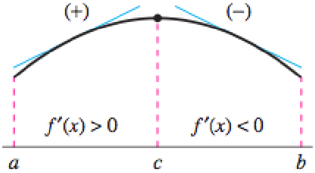
la función f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

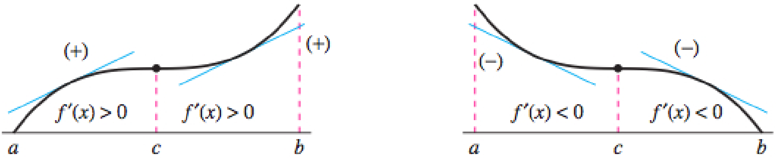
Considere los siguientes gráficos. Observe en cada situación cómo cambia el signo de f' alrededor del punto crítico $x = c$:



Mínimo relativo



Máximo relativo



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Criterio de la derivada primera para extremos locales

Criterio de la derivada primera para extremos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en (a, b), excepto posiblemente en c. Al aumentar el valor de la variable independiente x,

- si f' cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces f tiene un máximo local en $x = c$,
- si f' cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si f' no cambia de signo alrededor de c, entonces f no tiene extremo local en $x = c$.

Criterio de la derivada primera para extremos locales

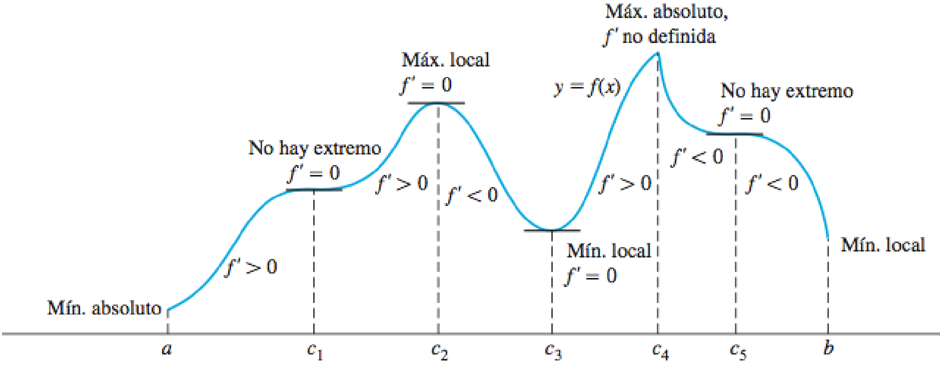
Criterio de la derivada primera para extremos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en (a, b), excepto posiblemente en c. Al aumentar el valor de la variable independiente x,

- si f' cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces f tiene un máximo local en $x = c$,
- si f' cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si f' no cambia de signo alrededor de c, entonces f no tiene extremo local en $x = c$.

Observación: el criterio de extremos locales también se aplica a los extremos del intervalo a y b, pero sólo hay que analizar el signo de $f'(x)$ a un lado (derecho o izquierdo) de a o de b y para toda x suficientemente cercana a estos puntos (utilizar la siguiente figura para explicar).

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos



Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f. **Solución:** primero calculamos la derivada de f usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3}.$$

Observar que f' no existe en $x=0$ y que este punto pertenece al dominio de f. Luego, $x=0$ es un punto crítico. Analizaremos si f' se anula en algún punto:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = 0$$

Multiplicamos por $x^{2/3}$ ambos miembros:

$$\frac{1}{3}(x-4) + x = 0$$

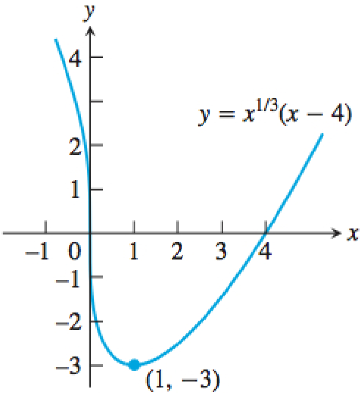
$$\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x = 1.$$

Así, $x = 1$ es también un punto crítico.
Para analizar los intervalos donde f crece o decrece tenemos en cuenta los puntos críticos de f y los extremos del dominio. Dado que el dominio de f es $\mathbb{R}$, los únicos intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
punto de análisis	-1	1/2	2
signo de f'	$f'(-1) < 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	f es decreciente	f es decreciente	f es creciente

En base a la tabla anterior y al criterio de la derivada primera para extremos tenemos que f tiene un mínimo local en $x = 1$.



y
4
2
1
$y = x^{1/3}(x - 4)$
x
−1
0
1
2
3
4
−1
−2
−3
(1, −3)

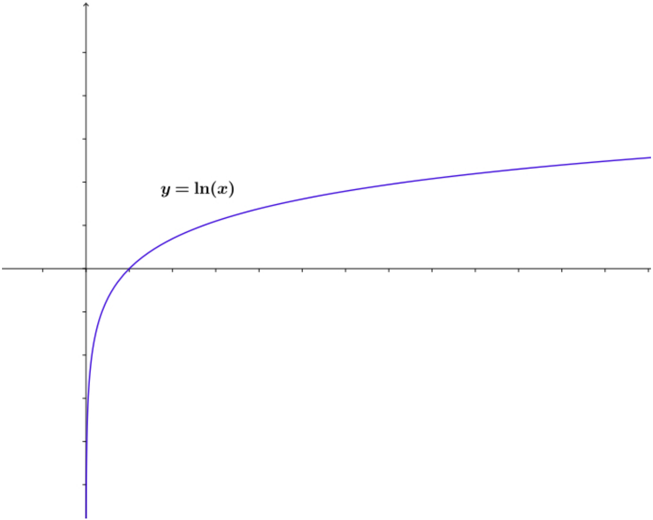
Uso de la primera derivada

Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

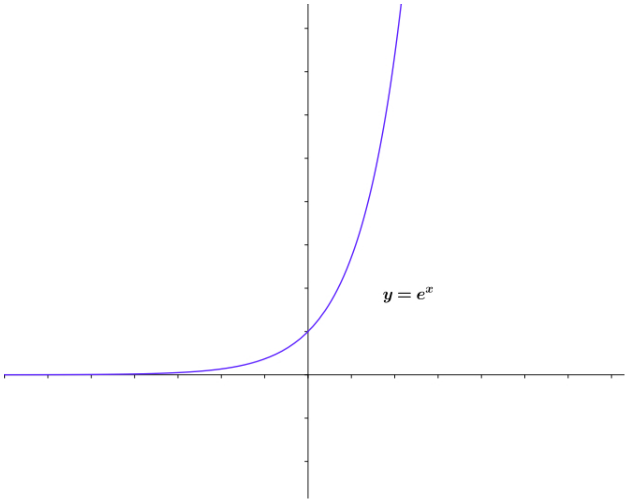
- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

Concavidad

Para introducir el concepto de concavidad de funciones, vamos a comenzar observando las siguientes gráficas:



Concavidad

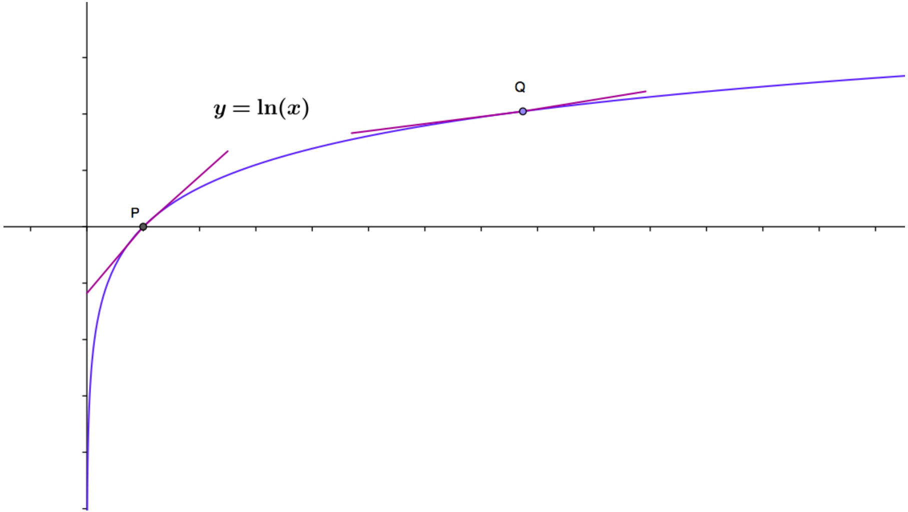


Concavidad

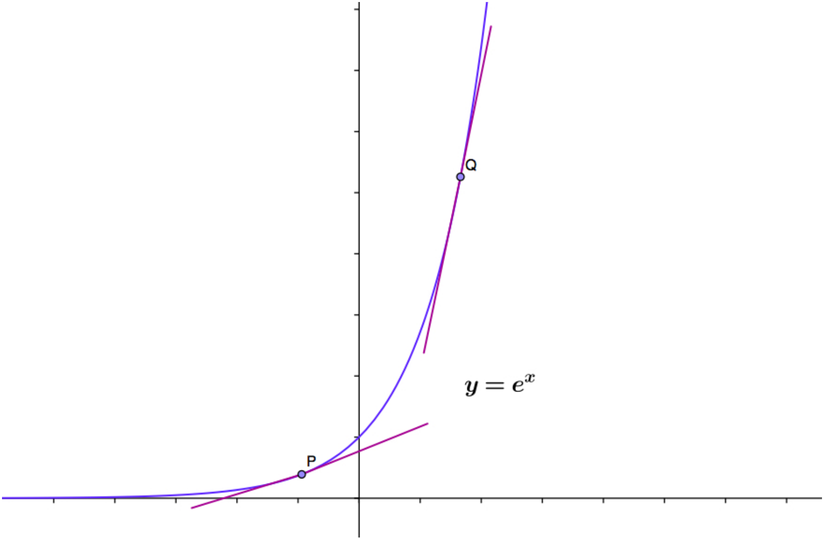
Tanto la función logarítmica como la exponencial son funciones crecientes. Sin embargo, la función $y = \ln(x)$ **desacelera** su crecimiento a medida que x aumenta, mientras que $y = e^x$ **acelera** su crecimiento cuando nos movemos en la dirección de las x positivas. En ambos casos las derivadas son positivas, pero no permiten distinguir el **ritmo** de crecimiento (o decrecimiento) de una función. Veremos que esta distinción la brinda la derivada segunda.

Comencemos trazando algunas rectas tangentes a las funciones logarítmica y exponencial.

En el caso de $y = \ln(x)$, se observa a partir de la comparación de las pendientes de las rectas tangentes en P y Q que a medida que x aumenta, la derivada de $y = \ln(x)$ decrece.



Por otro lado, en el caso de $y = e^x$, se deduce que la derivada de la función exponencial es creciente.



Concavidad

Concavidad: el comportamiento de la derivada de una función (en cuanto a si es creciente o decreciente) nos indica si la gráfica se *curva* hacia arriba o hacia abajo. Definimos entonces el concepto de concavidad como sigue:

Definición de Concavidad

Sea f una función derivable en (a, b). Tenemos:

- si f' es creciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b),
- si f' es decreciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Concavidad

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), Entonces:

- Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
- Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Observación: la notación f'' indica derivada segunda de f. Otras formas de escribir la derivada segunda son:

$$y'' \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Concavidad: ejemplo

Dado que para determinar los intervalos de concavidad de una función f se deben analizar los signos de f'', tenemos que encontrar los puntos alrededor de los cuales f'' cambia de signo. Estos puntos se localizan en:

- los puntos interiores del dominio de f donde f'' es cero o no existe;
- los puntos de discontinuidad de f;
- los extremos o *bordes* del dominio de f.

Ejemplo: determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}.$$

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe.

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe. Calculamos f'':

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x.2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

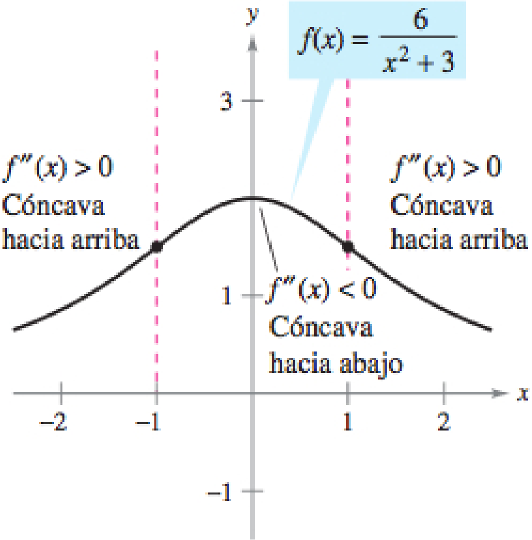
Observar que f'' siempre existe. Luego los únicos puntos de interés son aquellos donde:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 1, -1.$$

Construimos una tabla con los intervalos definidos por 1 y -1:

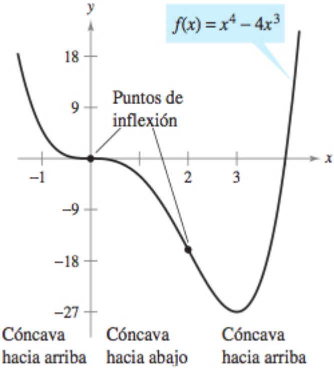
intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
punto muesta	-2	0	2
signo de f''	$+$	-	$+$
Conclusión	Conc. hacia arriba	Conc. hacia abajo	Conc. hacia arriba

Concavidad: ejemplo



Punto de inflexión

Sea f una función continua en (a, b) y sea c un punto de ese intervalo. Decimos que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f si es posible trazar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$, y si la gráfica de f cambia de concavidad en $(c, f(c))$.



El siguiente teorema nos dice dónde se deben buscar los puntos de inflexión:

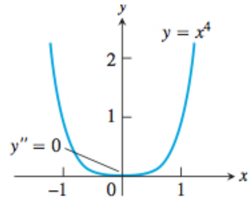
Teorema

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, o bien $f''(c)$ no existe, o bien $f''(c) = 0$.

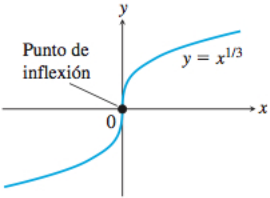
PRECAUCIÓN: NO SIEMPRE QUE $f''(c) = 0$, TENEMOS UN PUNTO DE INFLEXIÓN. TAMBIÉN, NO SIEMPRE QUE $f''(c)$ NO EXISTA HAY UN PUNTO DE INFLEXIÓN. Ver ejemplos en las próximas dos diapositivas.

Punto de inflexión

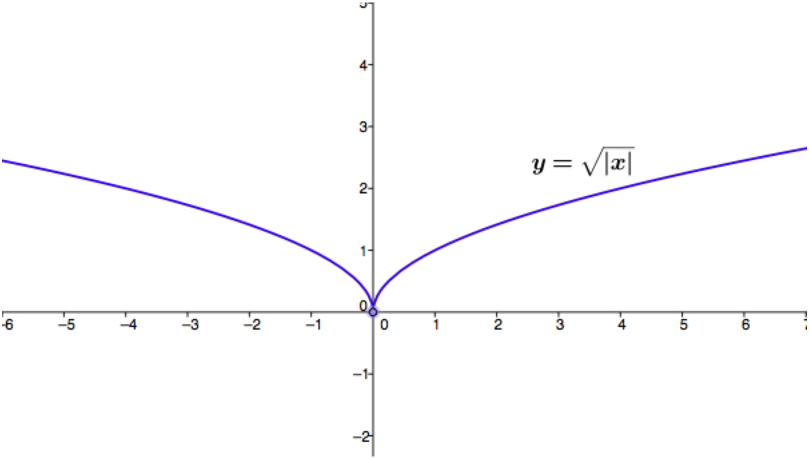
- **Un ejemplo donde** $f''(0) = 0$ **pero** $(0, f(0))$ **no es punto de inflexión.**



- **Un ejemplo donde** $f''(0)$ **no existe y** $(0, f(0))$ **es punto de inflexión.**



· **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**



Ejemplo: $f(x) = x^{5/3}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \text{ y } f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}.$$

Observar que f'' no existe en $x = 0$. **No hay puntos donde f'' sea cero**. Así, $(0, f(0))$ es candidato a ser punto de inflexión. Observar que:

$$f''(x) < 0 \text{ cuando } x < 0 \rightarrow \; f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0).$$

$$f''(x) > 0 \text{ cuando } x > 0 \rightarrow \; f \text{ es cóncava hacia arriba en } (0, +\infty).$$

Hay cambio de concavidad en $(0, f(0))$ y además, es posible trazar la recta tangente en ese punto ya que $f'(0) = 0$. **Luego, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión.**

Puntos de inflexión