Análisis Matemático I
Clase 11: Criterio de la derivada segunda para extremos. Trazado de gráficas. Optimización.

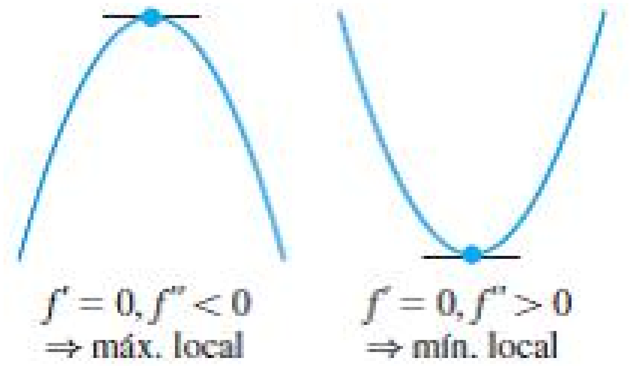
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2023

Criterio de la derivada segunda para extremos

Observe las siguientes figuras:



La función tiene un punto crítico donde f' es cero y el signo de f'' determina el tipo de extremo que tendremos.

Criterio de la derivada segunda para extremos

Supongamos que f es una función tal que f'' es continua en (a, b) y que $f'(c) = 0$ para algún c en (a, b). Entonces:

- Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
- Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
- Si $f''(c) = 0$, entonces f puede tener un máximo local en c, un mínimo local en c, o ninguno de éstos.

El criterio de la derivada segunda para extremos se ejemplificará en el contexto de problemas de optimización.

Resumen:

- **Límites:** permiten determinar:
  - Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
  - Regiones donde la función es continua.
  - Discontinuidades y el tipo de discontinuidad.
- **Primera derivada:** permite determinar:
  - regiones donde la función crece y/o decrece.
  - máximos o mínimos locales de la función.
- **Segunda derivada:** permite detectar:
  - Concavidad hacia arriba o hacia abajo.
  - Puntos de inflexión.
  - máximos y mínimos locales.

Trazado de gráficas de funciones

Procedimiento para trazar la gráfica de una función $y = f(x)$:

1. Determine el dominio de f, si f es par o impar, y las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determine las asíntotas de la función (verticales, horizontales y oblicuas).
3. Encuentre las discontinuidades de f y clasifíquelas.
4. Calcule la derivada primera.
5. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
6. Usando la información anterior, determine dónde f tiene máximos o mínimos locales.
7. Encuentre la derivada segunda.
8. Determine dónde $f'' = 0$ y dónde f'' no existe, y localice los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
9. Localice los puntos de inflexión de f.
10. Esboce la gráfica de f.

Ejemplo: aplique el procedimiento anterior para trazar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{2(x^2-4)}{x^2-9}.$$

Análisis:

- **Dominio:** f no está definida en los x tales que:

$$x^2 - 9 = 0.$$

  Luego:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

- **Simetría:** Observar que f es par:

$$f(-x) = \frac{2((-x)^2-4)}{(-x)^2-9} = f(x).$$

- •**Intersecciones con los ejes coordenados:** con el eje x:

$$\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=0,$$

así:

$$x=2, \qquad x=-2.$$

Intersecciones con el eje x: $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Con el eje y: ponemos $x=0$ y obtenemos:

$$y=\frac{8}{9}.$$

Así: la intersección con el eje y es: $(0,8/9)$.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=2.$$

- **Asíntotas Horizontales:**
  Así, $y = 2$ es una asíntota horizontal. De forma similar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = 2.$$

- **Asíntota vertical:** el denominador se anula en $x = 3$ y en $x = -3$. Analizamos el comportamiento de f en ambos puntos.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty.$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty, \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty.$$

  Así, $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales de f.

- **Discontinuidades de f:** la función es discontinua en $x = -3$ y en $x = 3$, y presenta, en ambos casos, discontinuidades esenciales.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** calculamos f':

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-9)-2(x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}.$$

Punto crítico de f: en $x=0$. Además incorporamos $x=3$ y $x=-3$ por ser puntos de discontinuidad de f. Obtenemos cuatro intervalos a analizar:

$$(-\infty,-3),\ (-3,0),\ (0,3),\ (3,\infty).$$

Analizamos el signo de f' en cada subintervalo:

Intervalo	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
punto muestra	-4	-1	1	4
signo de f'	$+$	$+$	-	-
conclusión	creciente	creciente	decreciente	decreciente

Trazado de gráficas de funciones

- **Extremos relativos de f:** en base a la tabla, f tiene un máximo local en $x = 0$.
- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** determinamos la deriva segunda:

$$f''(x) = \frac{-20(x^2-9)^2 - (-20x)(2(x^2-9)2x)}{(x^2-9)^4} = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3}.$$

Observar que f'' no existe en $x = -3$ y $x = 3$. No hay puntos donde f'' sea cero. Luego, los intervalos a analizar son:

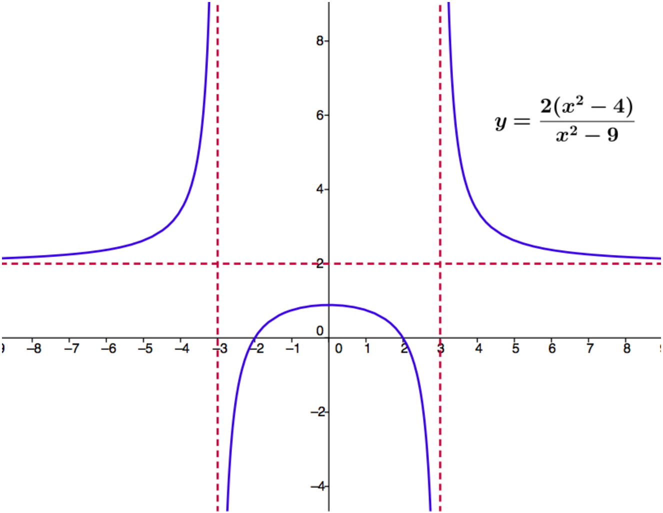
$$(-\infty, -3), \ (-3, 3), \ (3, \infty).$$

- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	0	4
signo de f''	$+$	-	$+$
conclusión	cónc. arriba	conc. abajo	conc. arriba

- **Puntos de inflexión:** basados en la tabla anterior,los canditados a ser puntos de inflexión son $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$. Sin embargo, como f no está definida en -3 y en 3, concluimos que no hay puntos de inflexión.
- **Graficar**.

Trazado de gráficas de funciones



Optimización

Problemas de Optimización: una de las grandes aplicaciones de la teoría de derivadas es a problemas en donde se desea maximizar o minimizar una determinada función, sujeta a determinadas condiciones o circunstancias.

En esta parte del curso, aplicaremos frecuentemente la teoría de derivadas para localizar extremos de funciones. Cuando se resuelven problemas de optimización se pueden emplear dos técnicas:

- Si la función a maximizar o minimizar está definida y es continua en un intervalo cerrado, entonces se pueden localizar extremos absolutos.
- Si la función está definida en un intervalo abierto (que puede ser (a, b), (a, ∞), $(-\infty, \infty)$, etc.), entonces se puede aplicar el criterio de la derivada segunda para obtener extremos locales.

Recordamos estas teoría en las próximas diapositivas

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Procedimiento para determinar extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$

(1) Determine los puntos críticos de f en (a, b).

(2) Evalúe f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo a y b.

(3) El valor máximo de f en $[a, b]$ será el mayor de los valores obtenidos en (2), y el valor mínimo, el menor de los valores obtenidos en (2).

Criterio de la derivada segunda para extremos

Criterio de la derivada segunda para extremos

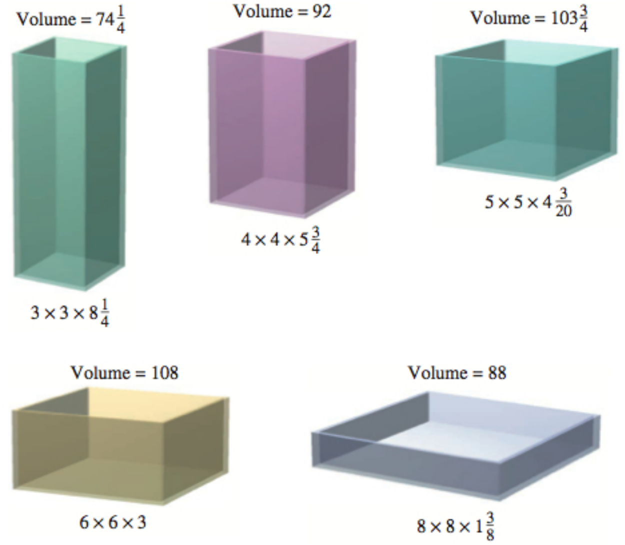
Supongamos que f es una función tal que f'' es continua en (a, b) y que $f'(c) = 0$ para algún c en (a, b). Entonces:

- Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
- Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
- Si $f''(c) = 0$, entonces f puede tener un máximo local en c, un mínimo local en c, o ninguno de éstos.

Problema 1: determinación de volumen máximo. Un fabricante desea diseñar una caja sin tapa que tenga base cuadrada y un área superficial de 108 pulg^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para tener volumen máximo?

Problema 1: determinación de volumen máximo. Un fabricante desea diseñar una caja sin tapa que tenga base cuadrada y un área superficial de 108 pulg^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para tener volumen máximo?

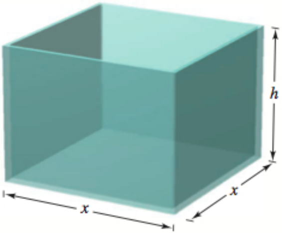
Solución: en la siguiente figura, se pueden observar distintas opciones de cajas que posee la misma área superficial (108 pulgadas^2) pero diferentes volúmenes.



Pregunta: ¿Cómo determinar las dimensiones de la caja que generen el mayor volumen y que posea área superficial de 108 pulg^2?

Solución del Problema 1:

1. Hacemos un dibujo y asignamos un nombre a las variables de interés:



Recordar que la caja tiene base cuadrada.

2. Planteamos la función que se desea maximizar, en este caso, la función volumen de la caja:

$$\mathbf{V} = x^2 h.$$

Observar que V depende de dos variables.

Solución del Problema 1:

1. Para expresar V como una función de una variable, debemos encontrar una relación entre h y x. Esta relación surge de las condiciones planteadas por el problema. En este caso, el área superficial de la caja, sin tapa, es 108 pulg^2. Así:

$$x^2 + 4hx = 108.$$

Por ende:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}.$$

2. Reemplazamos ahora en la función volumen:

$$V = x^2 h = x^2 \left(\frac{108 - x^2}{4x} \right) = \frac{108x - x^3}{4}.$$

Ahora, V es función solamente de x.

Solución del Problema 1:

1. Determinamos el máximo de V. Observar que $x \geq 0$. Por otro lado, el área de la base x^2 no puede exceder 108. Por lo tanto el intervalo en donde deseamos maximizar V es:

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}.$$

Hallamos primero los puntos críticos:

$$V'(x) = 0.$$

Así:

$$x = 6 \text{ o bien } x = -6.$$

El último valor debe descartarse pues $x \geq 0$. Observe que V es siempre derivable. Así, el único punto crítico es $x = 6$.

Solución del Problema 1:

1. Finalmente, evaluamos V en el punto crítico y en los extremos del intervalo:

$$V(0) = 0$$

$$V(\sqrt{108}) = 0$$

$$V(6) = 108.$$

El valor máximo de V se alcanza en $x = 6$. La altura correspondiente es:

$$h = \frac{108 - 6^2}{4.6} = 3.$$

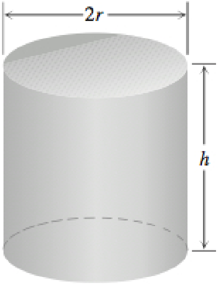
Las dimensiones de la caja con máximo volumen y área superficial 108 pulg^2 son: $x = 6$ pulg. y $h = 3$ pulg..

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Solución al problema 2:

- Dibujo y variables: $r =$ radio, $h =$ altura. Ambos en centímetros.



- Función a minimizar: área superficial A.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Solución al problema 2:

- Relación entre r y h: utilizamos los datos del problema sobre el volumen de 1 litro$= 1000\text{cm}^3$:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

de donde se obtiene:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Reemplazando en la función A se obtiene:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Observe que r tiene que ser positivo.

Solución al problema 2:

- Buscamos dónde A alcanza su mínimo: encontramos primero los puntos críticos.
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}.$$
Observar que A' existe para todo $r > 0$. Buscamos r tal que $A'(r) = 0$. Obtenemos:
$$r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3},$$
es el único punto crítico.
- Para determinar si A tiene un mínimo local en el punto crítico, determinamos la segunda derivada y vemos qué signo tiene en el punto crítico (es decir, usamos el criterio de la derivada segunda para extremos relativos). Se obtiene:
$$A''\left[\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}\right] > 0.$$

Solución al problema 2:

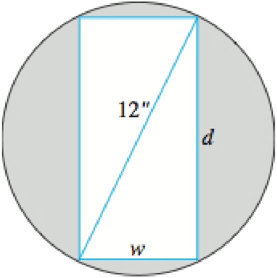
Luego, A tiene un mínimo local en $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}$. La altura correspondiente es:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Ejercicio del trabajo práctico 3 a resolver en práctica: la resistencia R (capacidad para resistir esfuerzos y fuerzas aplicadas sin romperse, adquirir deformaciones permanentes o deteriorarse) de una viga de madera, de sección transversal circular, es proporcional a su ancho por el cuadrado de su espesor:

$$R = Kdw^2, \quad K > 0.$$

Problema: determine las dimensiones de la viga de madera más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12" (pulgadas) de diámetro.



Solución problema 3

Debemos maximizar la resistencia de la viga, o sea maximizar la función $R(d, w) = Kdw^2$ para $K > 0$ con la restricción que impone el diámetro del tronco del cual debe sacarse la viga, en este caso de 12 pulgadas. Esta restricción se representa mediante la siguiente expresión matemática $d^2 + w^2 = 12^2$ (esta igualdad nos relaciona el diámetro de tronco con las medidas de la viga).

De la restricción podemos despejar $w^2 = 12^2 - d^2$ y al reemplazar en R tenemos:

$$R(d) = Kd(144 - d^2)$$
$$R(d) = K(144d - d^3)$$

$$R'(d) = K(144 - 3d^2)$$

Si igualamos R' a cero, $K(144 - 3d^2) = 0$ encontramos que $d = +\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ o $d = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$ pero como estamos tratando con longitudes sólo tenemos en cuenta el valor positivo para d.

Para determinar si se alcanza máximo analizamos el signo de la derivada segunda:

$$R''(d) = K(-6d)$$

$R''(4\sqrt{3}) = -24K\sqrt{3} < 0$ por lo tanto alcanza máximo.

Si reemplazamos el valor de d en la restricción obtenemos que $w = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Por lo tanto las dimensiones de la viga que maximizan la resistencia R son $d = 4\sqrt{3}$ y $w = 4\sqrt{6}$