Análisis Matemático I
Clase 13: Integral Definida. Teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del Cálculo.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2023

Recordar: una función f no negativa es integrable en $[a, b]$ si el límite

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P)$$

existe y en ese caso escribimos

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Aquí,

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

es partición del intervalo $[a, b]$ y

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$$

es la suma de Riemann asociada a la partición P y a la elección de puntos $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$.

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:** ¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observar:

$$f \text{ derivable } \Rightarrow f \text{ continua } \Rightarrow f \text{ integrable.}$$

Así, si una función f es continua en $[a, b]$, entonces sabemos que es integrable y por ende para calcular

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx$$

podemos usar particiones específicas P que cumplan $\|P\| \to 0$. También podemos elegir los puntos c_k en las sumas de Riemann de la forma más apropiada posible.

En este curso, el estudiante resolverá integrales por definición solamente para funciones polinómicas simples en $[0, 1]$. Para ellos, usará las particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Integrales más complejas serán calculadas con otros métodos.

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

Ejemplo: calculemos

$$\int_0^1 2x dx.$$

La función $f(x) = 2x$ es continua en $[0, 1]$, luego es integrable. Para cada número natural n, tomemos la colección de particiones:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\},$$

y tomemos $c_1 = 0$, $c_2 = 1/n$, $c_3 = 2/n$,...,$c_i = (i-1)/n$,..., $c_n = (n-1)/n$. Entonces $||P_n|| = 1/n$, la cual tiende a cero cuando n tiende a infinito. Así:

$$\int_0^1 2x dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

Resta calcular $S(f, P_n)$ y hacer $n \to \infty$:

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

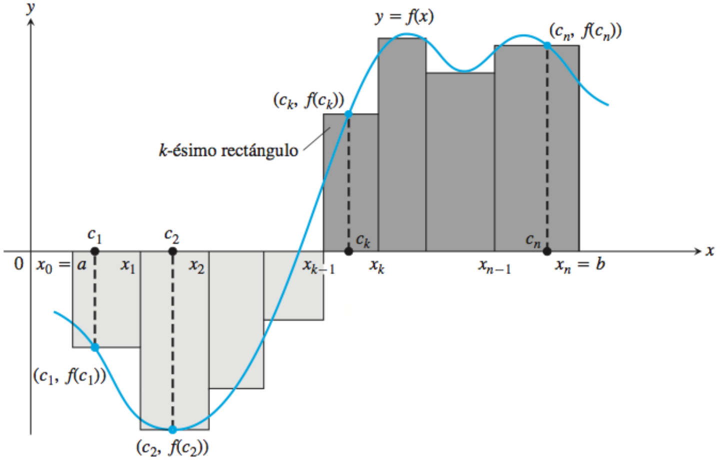
$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2c_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad \text{(se usó que } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}) \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x dx = 1.$$

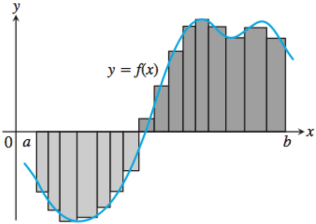
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: sumas de Riemann

La idea de Sumas de Riemann puede aplicarse para aproximar regiones más generales:



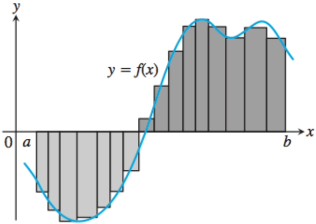
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

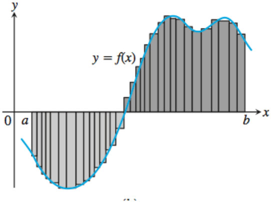
Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada



Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada





Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Comentarios importantes: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces

- las sumas de Riemann asociadas a f pueden definirse como antes, pero si la función toma valores negativos, las sumas de Riemann ya no pueden considerarse como sumas de áreas de rectángulos pues algunos de sus términos podrían ser negativos. (Ver figuras de las diapositivas anteriores)
- La integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

puede definirse exactamente como antes, solo que ahora su valor no se puede interpretar como área de una región.

Propiedades de la integral definida

Propiedades

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$, y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b 1dx = b - a$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema del Valor Medio para integrales

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

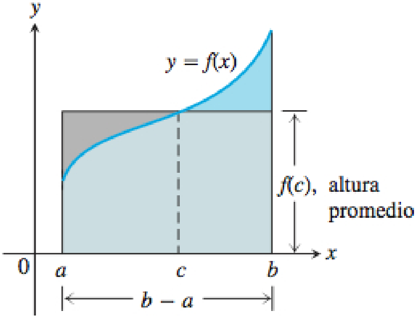
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Sin demostración.

Observación: la conclusión del teorema también se puede escribir como:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Interpretación geométrica para funciones no negativas:



Así, el Teorema del valor medio para integrales afirma que el área del rectángulo gris $f(c)(b-a)$ es igual al área de la región comprendida por el gráfico de f y el intervalo $[a, b]$:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema fundamental del cálculo

Teorema Fundamental del cálculo: Primera Parte

Sea f una función continua en $[a, b]$. Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

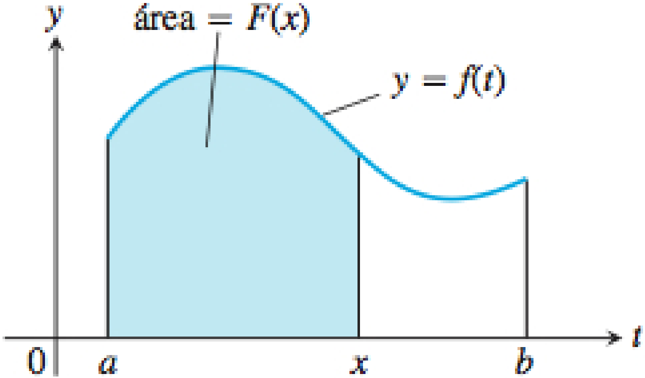
Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Observación: F es una antiderivada de f. El teorema permite construir antiderivadas o primitivas de funciones continuas a través de la integración.

Interpretación de la función F cuando $f \geq 0$.



Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Demostración. Sea $x \in [a, b)$ y $h > 0$ tal que $x + h \in [a, b)$. Luego:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt. \quad (1)$$

Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Demostración. Sea $x \in [a, b)$ y $h > 0$ tal que $x + h \in [a, b)$. Luego:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^{x} f(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^{x} f(t)\, dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt. \quad (1)$$

Como f es continua en $[a, b]$, entonces es también continua en $[x, x + h]$, así por el *Teorema del valor medio para integrales*, existe $c_h \in [x, x + h]$ tal que:

$$f(c_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Luego, de (1) obtenemos que:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c_h). \quad (2)$$

Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Notemos que, cuando $h \to 0^+$, $c_h \to x$. Entonces, por la continuidad de f en $[a, b]$, resulta que

$$\lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

Así, tomando límite cuando $h \to 0^+$ en (2), obtenemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

Por lo tanto, la derivada por derecha de F en $x \in [a, b)$ existe y es $f(x)$.
Ahora, tomamos $x \in (a, b]$ y sea $h < 0$ tal que $x + h \in (a, b]$. Siguiendo un razonamiento similar al anterior, obtenemos que la derivada por izquierda de F en $x \in (a, b]$ es $f(x)$.
Así, de ambas conclusiones afirmamos que

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in [a, b]$$

en donde, cuando $x = a$ o $x = b$, $F'(x)$ denota la derivada lateral correspondiente.

Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo segunda parte

Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplos. Calcule:

- $\int_0^\pi cos(x)dx = sen(\pi) - sen(0) = 0$
- $\int_0^2 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}16 - \frac{1}{2}4 - 0 = 2.$

Demostración del Teorema fundamental del cálculo: segunda parte

Demostración. Sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. La parte 1 del *teorema fundamental del cálculo*, nos dice que la función:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una antiderivada de f en $[a, b]$. Así, F y G son antiderivadas de f, y entonces existe una constante C tal que:

$$F(x) - G(x) = C$$

para toda $x \in [a, b]$. Por lo que $F(x) = G(x) + C$. Luego:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt - 0 = \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

Esto termina la demostración.

Bernhard Riemann (1826-1866) fue el inventor de la Integral de Riemann en un trabajo publicado en 1854. Con ello, creó la teoría de funciones de variable real. También realizó contribuciones en la teoría de números y la geometría. Sus avances en este último campo contribuyeron a la formulación de la teoría de la relatividad.