# Análisis Matemático I
# Clase 14: Cálculo de áreas. Método de sustitución. Área entre curvas

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Mayo, 2023

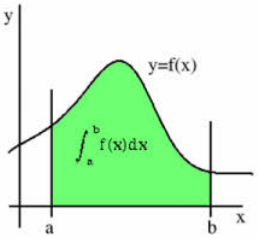
# Cálculo de áreas

**Recordar:**

**Definición**

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre el gráfico de $f$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje $x$ se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (\textbf{siempre que la integral exista})}.$$



# Cálculo de áreas

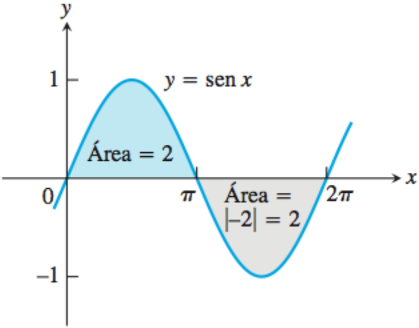
**Ejemplo 1:** supongamos que queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje $x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$.

**Ejemplo 1:** supongamos que queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje $x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$.

**Solución:** Observar que $sen(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$. Entonces:

$$\text{Área} = \int_0^{\pi/2} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = -cos(\pi/2) - (-cos(0)) = 1.$$

**Ejemplo 2:** supongamos que ahora queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje $x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.




En este caso, la función asume valores positivos y negativos. Por ende, no podemos interpretar la integral de $f$ como el área buscada.

# Cálculo de áreas de funciones arbitrarias

## Cálculo de área para una función arbitraria

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Para determinar el área comprendida entre el gráfico de $f$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje $x$, procedemos como sigue:

- Determinamos las intersecciones del gráfico de $f$ con el eje $x$ en el intervalo $[a, b]$.
- Subdividimos $[a, b]$ usando los puntos hallados en el inciso anterior.
- Integramos $f$ sobre cada sub-intervalo.
- Sumamos los valores absolutos de las integrales calculadas en el apartado anterior.

**Solución del ejemplo 2:** Observar que $y = sen(x)$ corta al eje $x$ en $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$ en el intervalo de integración $[0, 2\pi]$. Luego, utilizando el procedimiento anterior, obtenemos:

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi} sen(x)dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)dx \right| = 4.$$

# Método de sustitución para calcular integrales

En esta clase, estudiaremos un primer método para calcular antiderivadas de funciones relacionado a la operación de composición. Otros métodos relacionados al cálculo de antiderivadas para productos y cocientes de funciones serán analizados en clases posteriores.

# Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

# Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

cambiando variables, elegimos $u = g(x)$ y entonces $du = g'(x)dx$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int f(u)du$$

que es mucho más simple que la integral original. Este método se denomina método de sustitución:

## Fórmula de sustitución

Sean $f$ y $g$ funciones continuas en $[a, b]$. Supongamos además que $g'$ es continua en $[a, b]$. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

# Método de sustitución para calcular integrales

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$.

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$. Luego, elegimos $u = x^3 + x$ y entonces $du = (3x^2+1)dx$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Como nuestro integrando original depende de $x$, reemplazamos $u$ por $x^3 + x$:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = \frac{(x^3+x)^6}{6} + C.$$

# Método de sustitución para calcular integrales

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es similar a una de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$.Elegimos

$$u = 2x^2 - 1$$

y entonces

$$du = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{4}du.$$

Sustituyendo:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = \frac{1}{4}\int udu = \frac{u^2}{8} + C = \frac{(2x^2-1)^2}{8} + C.$$

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\, dx.$$

# Método de sustitución para calcular integrales

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\,dx.$$

Solución: en este caso tenemos como una posibilidad:

$$f(x) = x, \quad g(x) = sen(x).$$

Entonces elegimos $u = g(x) = sen(x)$ y entonces $du = cos(x)\,dx$.Luego,

$$\int sen(x).cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C.$$

**Ejemplos.** Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\, dx.$$

Solución: en este caso tenemos como una posibilidad:

$$f(x) = x, \quad g(x) = sen(x).$$

Entonces elegimos $u = g(x) = sen(x)$ y entonces $du = cos(x)\, dx$.Luego,

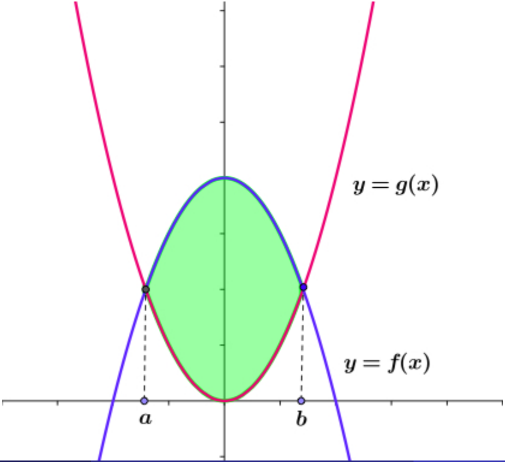
$$\int sen(x).cos(x)\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C.$$

También se puede: $f(x) = x, \quad g(x) = cos(x)$. Entonces $u = cos(x)$ y $du = -sen(x)\, dx$. Luego

$$\int sen(x).cos(x)\, dx = -\int u\, du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{cos^2(x)}{2} + C.$$

¿Son resultados distintos?

**Problema:** Considere dos funciones continuas $f$ y $g$ en $[a, b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$. Se desea determinar el área de la región comprendida entre los gráficos de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$:



# Cálculo de áreas entre curvas

Para calcular el área buscada, vamos a aproximar la región de interés mediante rectángulos. Así, tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y elegimos puntos:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

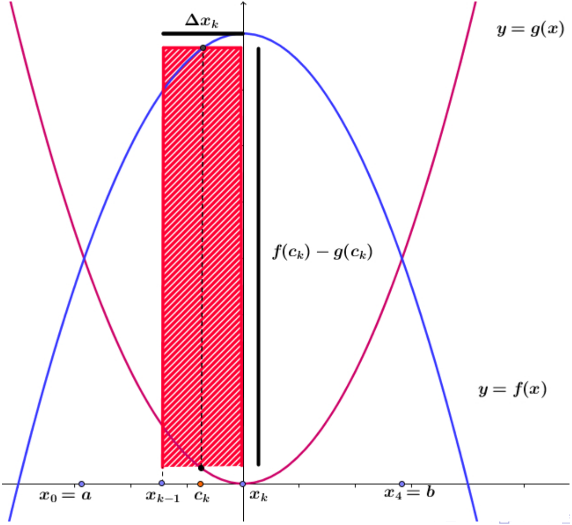
$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

para construir los rectángulos.

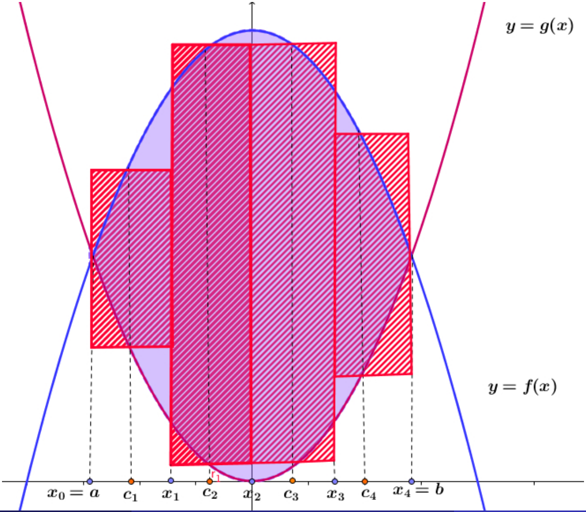
En el siguiente gráfico se puede ver la construcción de un rectángulo genérico de aproximación con su base y altura:



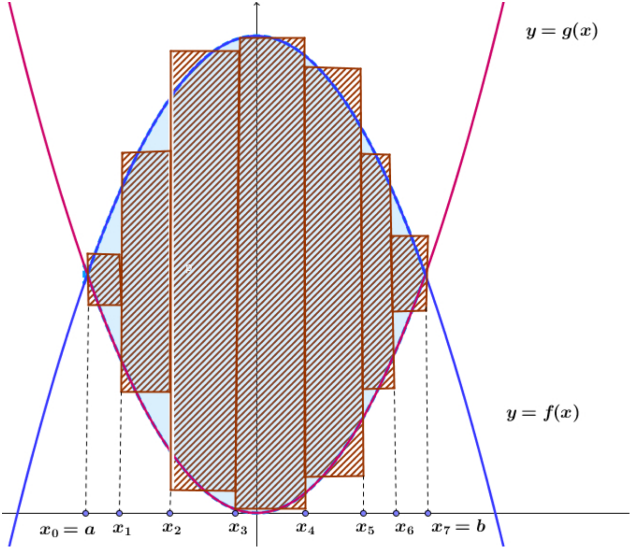
Observando la figura anterior obtenemos que el área $\Delta A_k$ del rectángulo genérico es:

$$\Delta A_k = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

A continuación se visualiza el procedimiento de aproximación con $n = 4$:



Aumentando la cantidad de rectángulos y haciendo que sus bases sean todas cada vez más finas se obtiene una mejor aproximación.



Luego, una aproximación del área de la región considerada viene dada por la suma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

Cuando $||P||$ tiende a cero, la suma anterior tiende a:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

ya que ambas funciones son continuas en $[a, b]$.

Así, tenemos la siguiente definición inspirada en el procedimiento anterior.

**Definición**

Sean $f$ y $g$ funciones continuas en $[a, b]$ tales que:

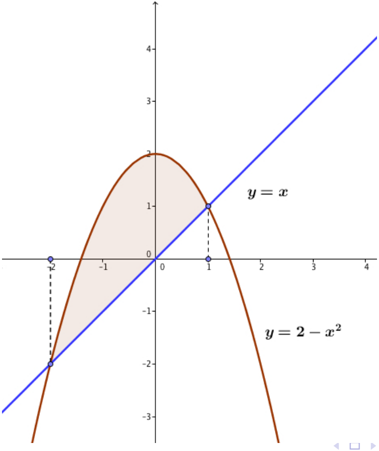
$$f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Entonces, el área de la región comprendida entre el gráfico de ambas funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

# Cálculo de áreas entre curvas

**Ejemplo:** calcule el área comprendida entre los gráficos de las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = 2 - x^2$.
Para calcular el área buscada, realizamos un gráfico de ambas funciones para determinar cuál de las dos es mayor a la otra.



# Cálculo de áreas entre curvas

En este caso:

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in [-2, 1].$$

Por ende, el área es:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{1} [2 - x^2 - x]dx = \frac{9}{2}.$$

**Ejemplo:** determine el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^4 - 2x^2$.
Para calcular el área, no vamos a graficar. Primero determinados los puntos de intersección de las curvas:

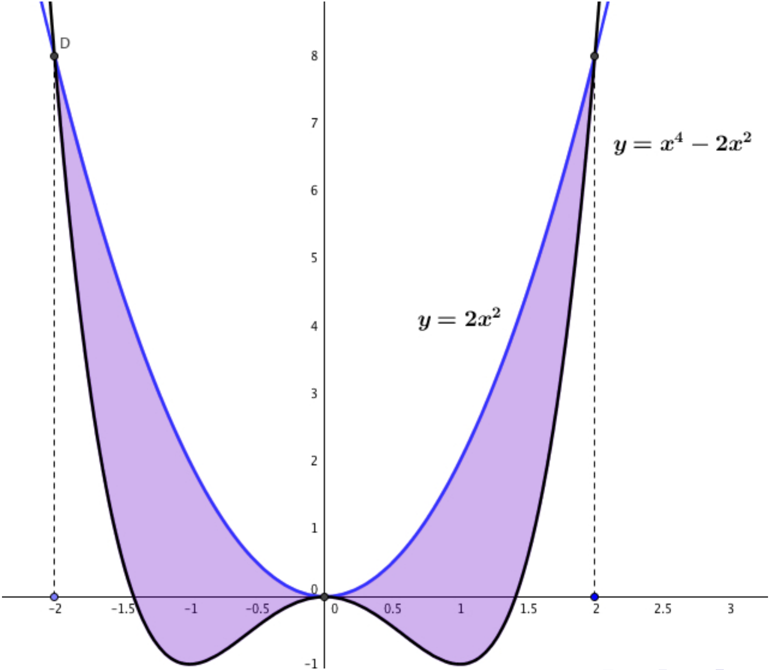
$$x^4 - 2x^2 = 2x^2$$

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

Así, las soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -2$. Quedan determinados dos intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$. Como no sabemos cuál de las funciones es mayor en dichos intervalos para calcular el área comprendida entre los gráficos vamos a utilizar valor absoluto:

$$A = \left| \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx \right| + \left| \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx \right| = \frac{128}{15}$$

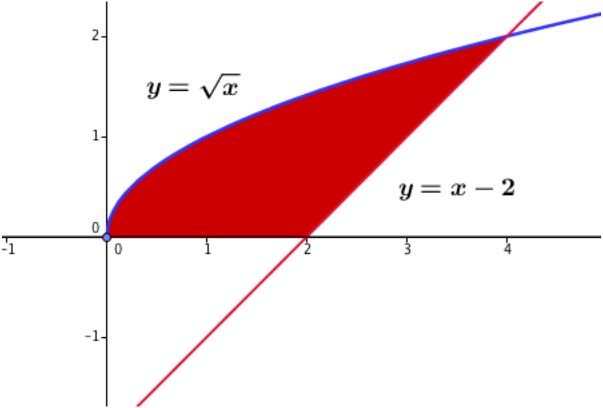

D
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$y = x^4 - 2x^2$
$y = 2x^2$

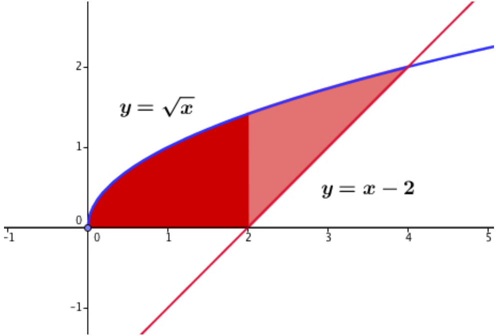
# Cálculo de áreas entre curvas

**Ejemplo:** Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje $x$ y la recta $y = x - 2$.

# Cálculo de áreas entre curvas

**Ejemplo:** Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje $x$ y la recta $y = x - 2$.






Para resolver el ejemplo anterior,podemos plantear dos integrales:

$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right]\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]\Big|_2^4$$

$$= \frac{10}{3}.$$

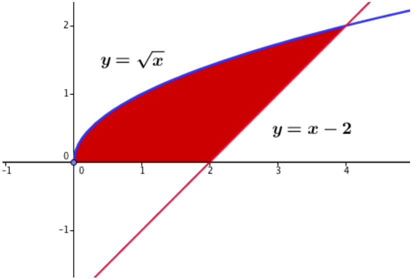
# Cálculo de áreas entre curvas

En ejemplo anterior, calcular el área requirió escribir dos integrales. Sin embargo, la resolución puede simplificarse si se trabaja con funciones en términos de la variable $y$.

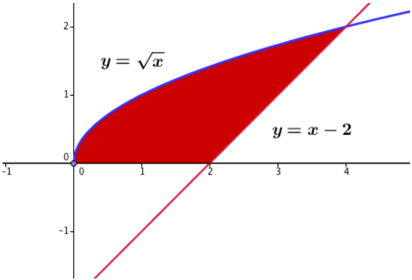
## Cálculo de áreas para funciones de $y$

Si ahora las curvas se dan como funciones de $y$: $x = f(y)$, $x = g(y)$, $g(y) \leq f(y)$ en $[c, d]$, entonces el área de la región comprendida entre las curvas y las rectas $y = c$, $y = d$ es:

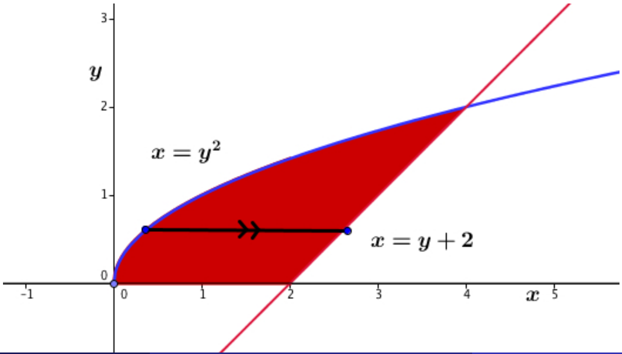
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$




En términos de y:




En términos de y:



Luego:

$$A = \int_0^2 \left(y + 2 - y^2\right)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}.$$