Análisis Matemático I
Clase 16: Aplicaciones de la integral al cálculo de longitudes y áreas.

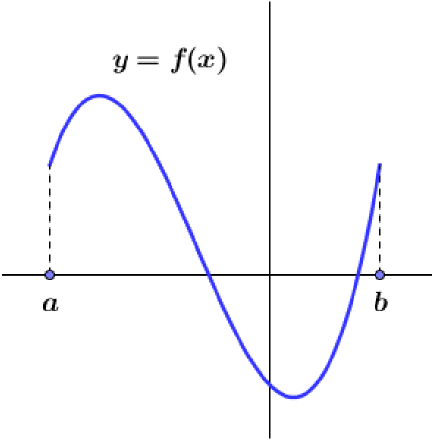
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

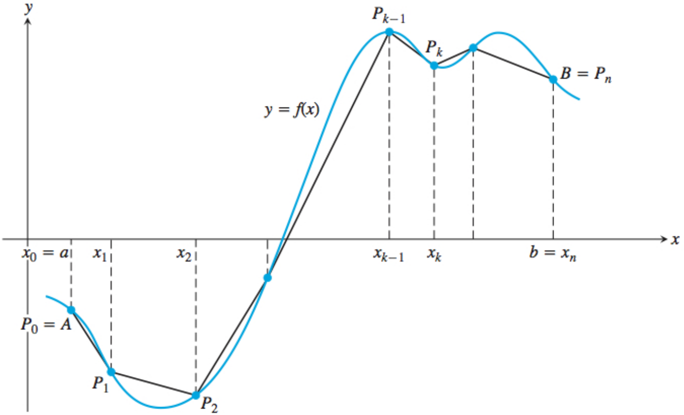
Mayo, 2023

Longitud de una curva

Problema: determine la longitud de la curva dada por una función $y = f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$.

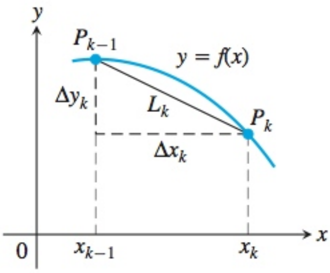


Solución: tomamos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Consideramos los segmentos que unen: $(x_0, f(x_0))$ con $(x_1, f(x_1))$, $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ con $(x_n, f(x_n))$.



Longitud de una curva

Observar que la longitud del arco de la curva que va desde $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a $(x_k, f(x_k))$ se puede aproximar con la longitud del segmento rectilíneo que une dichos puntos:



Entonces si L_k es la longitud del segmento, tenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Longitud de una curva

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Por el teorema del valor medio, existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k.$$

Reemplazando en la expresión para L_k obtenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + f'(c_k)^2(\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Si sumamos las longitudes de los segmentos, ontendremos una aproximación de la longitud de la curva L. Luego:

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Longitud de una curva

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Cuando $\|P\|$ tiende a cero, obtenemos (ya que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ es continua en $[a, b]$):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Así:

Longitud de curva

Sea $y = f(x)$ una función tal que f' es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ es:

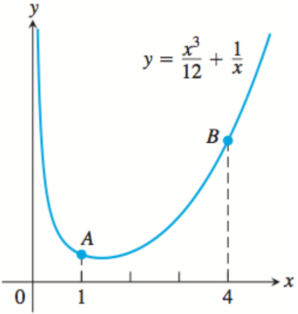
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Longitud de una curva

Determine la longitud de la curva:

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$$

para $1 \leq x \leq 4$.



Longitud de una curva

La longitud de una curva también se puede calcular en términos de la variable y:

Longitud de curva

Sea $x = g(y)$ una función tal que g' es continua en $[c, d]$. Entonces la longitud de la curva $x = g(y)$ para $c \leq y \leq d$ es:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2 dy}$$

Ejemplo: determine la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ para $0 \leq x \leq 2$.

Longitud de una curva

La longitud de una curva también se puede calcular en términos de la variable y:

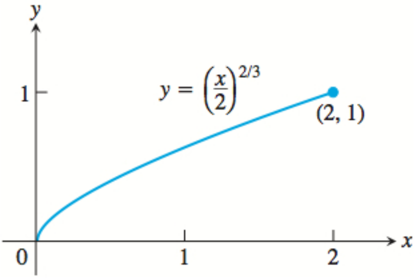
Longitud de curva

Sea $x = g(y)$ una función tal que g' es continua en $[c, d]$. Entonces la longitud de la curva $x = g(y)$ para $c \leq y \leq d$ es:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

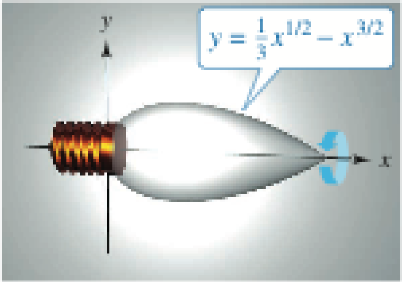
Ejemplo: determine la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ para $0 \leq x \leq 2$. Observar que la función no tiene derivada continua en x en el intervalo dado. Veamos qué sucede si lo planteamos en términos de y.

Longitud de una curva



Aplicación de la integral al cálculo de áreas de superficies de revolución

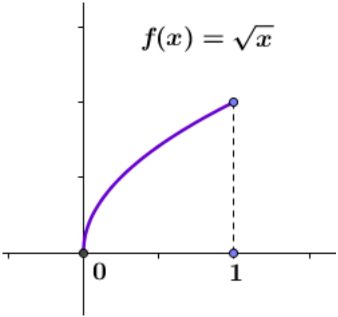
Problema: determinar la cantidad de vidrio necesario para construir una bombilla eléctrica como se ilustra



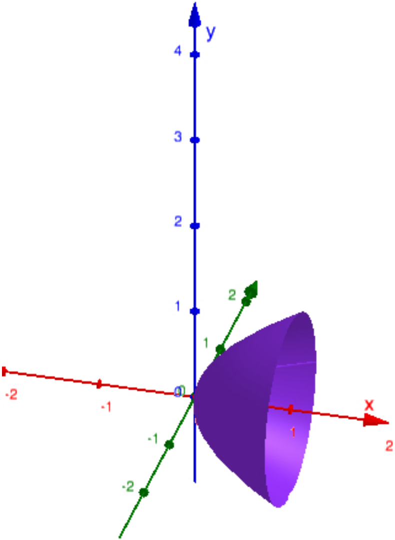
con $0.01 \leq x \leq 1/3$, x en metros. Observar que en la base, la bombilla no se cierra totalmente. Para determinar la cantidad de vidrio, vamos a determinar el área de la superficie de la bombilla.

Superficie de revolución: *una superficie de revolución es una superficie obtenida al hacer girar una curva en torno de una recta fija.*

Por ejemplo, la curva:

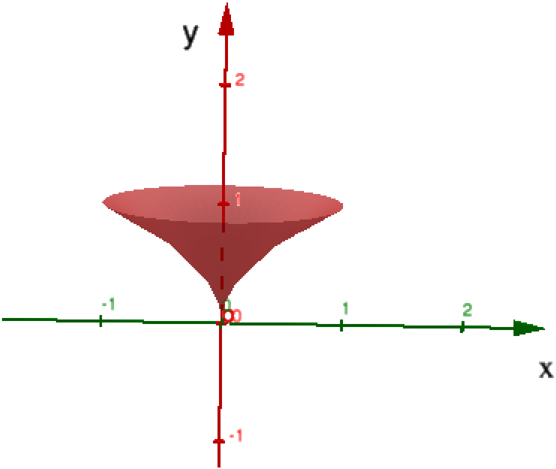


produce la siguiente superficie de revolución al girar en torno del eje x:



Área de una superficie de revolución

Si la curva gira en torno al eje y se obtiene la siguiente superficie de revolución:



Área de una superficie de revolución

Área de una superficie de revolución

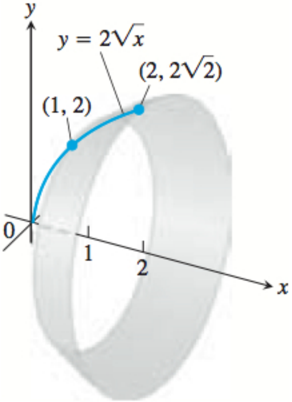
Sea f una función tal que $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Supongamos que f' es continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie obtenida al hacer girar el gráfico de f alrededor del eje x es:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Observar la analogía con la fórmula de longitud de una curva. Se agrega el factor $2\pi.f(x)$

Ejemplo: determine el área de la superficie obtenida al hacer girar el gráfico de $y = 2\sqrt{x}$ alrededor del eje x en $[1, 2]$.

Ejemplo: determine el área de la superficie obtenida al hacer girar el gráfico de $y = 2\sqrt{x}$ alrededor del eje x en $[1, 2]$.



Rotación alrededor del eje y:

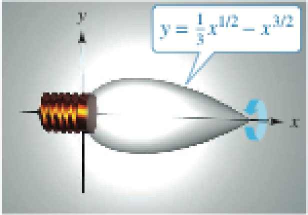
Área de una superficie de revolución

Sea $x = g(y)$ una función tal que $g(y) \geq 0$ para todo y en $[c, d]$. Supongamos que g' es continua en $[c, d]$. Entonces el área de la superficie obtenida al hacer girar el gráfico de g alrededor del eje y es:

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy.$$

Área de una superficie de revolución

Problema: determinar la cantidad de vidrio necesario para construir una bombilla eléctrica como se ilustra



con $0.01 \leq x \leq 1/3$.

El área de la superficie de revolución es:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{0.01}^{1/3} \left(\frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}\right) \sqrt{1 + \left[\frac{1}{6}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2} dx \\ &= 2\pi \int_{0.01}^{1/3} \left(\frac{1}{3} - x\right) \sqrt{x} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{6}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2} dx \\ &= 2\pi \int_{0.01}^{1/3} \left(\frac{1}{3} - x\right) \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}\right) dx = 2\pi \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{18}x + \frac{1}{6}x^2 \right] \Big|_{0.01}^{1/3} \\ &\approx 0.112. \end{aligned}$$

Así, se requiere una cantidad de vidrio de aproximadamente 0.112 m^2.