Análisis Matemático I
Clase 17: Aplicaciones de la integral a Física e Ingeniería. Introducción a funciones inversas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de Cuyo.

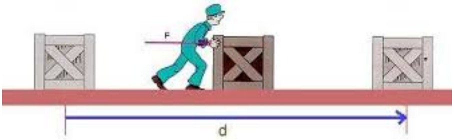
Mayo, 2022

Trabajo realizado por una fuerza constante

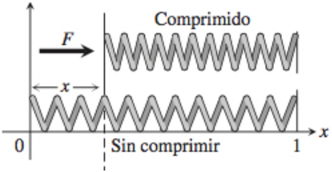
Si un objeto se desplaza una distancia d como resultado de la aplicación de una fuerza de magnitud constante F y con dirección igual a la dirección del movimiento del objeto, entonces decimos que el trabajo realizado por la fuerza es:

$$W = Fd.$$

Si la fuerza está dada en Newtons y la distancia en metros, entonces la unidad de medida del trabajo es $N \cdot m$, que es el Joule (J).



¿Qué sucede si la fuerza es variable? Por ejemplo, la fuerza necesaria para comprimir un resorte varía de acuerdo a la deformación de éste.



Este es un ejemplo de una fuerza variable $F = F(x)$. Para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable, vamos a utilizar integrales.

Supongamos que la fuerza F depende de x y que actúa sobre un objeto a lo largo del eje x. Así, $F = F(x)$. Además, supongamos que F es continua en un intervalo de acción de la fuerza $[a, b]$.
Si tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, y elegimos puntos $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, ..., $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$, entonces si la norma de P es lo suficientemente chica podemos suponer que

$$F(x) \approx F(c_1) \quad \text{en } [x_0, x_1],$$

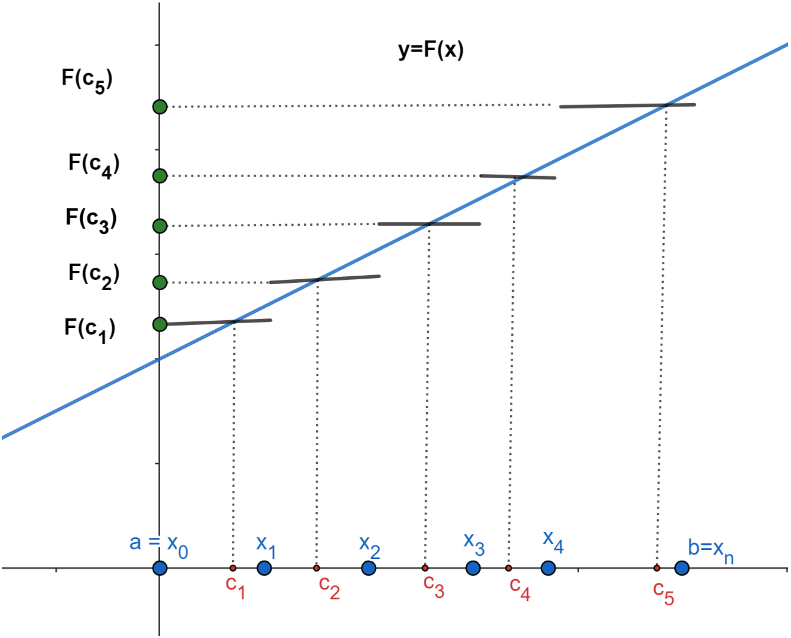
$$F(x) \approx F(c_2) \quad \text{en } [x_1, x_2],$$

$$\vdots$$

$$F(x) \approx F(c_n) \quad \text{en } [x_{n-1}, x_n].$$

Luego, el trabajo total efectuado por F es aproximado por:

$$\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \quad \text{(Es una suma de Riemann)}$$


y=F(x)
F(c5)
F(c4)
F(c3)
F(c2)
F(c1)
a = x0
x1
x2
x3
x4
b=xn
c1
c2
c3
c4
c5

Por lo tanto, cuando la norma de P tiende a cero, obtenemos que el trabajo efectuado por F es:

$$\int_a^b F(x)dx.$$

Así, tenemos la siguiente definición:

Por lo tanto, cuando la norma de P tiende a cero, obtenemos que el trabajo efectuado por F es:

$$\int_a^b F(x)dx.$$

Así, tenemos la siguiente definición:

Trabajo realizado por una fuerza variable

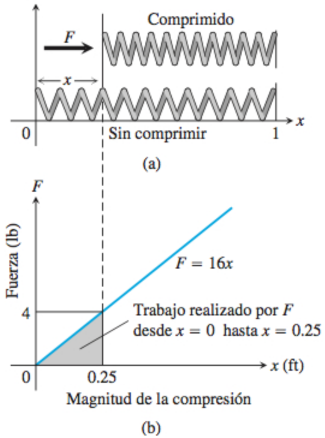
El trabajo realizado por una fuerza variable $F(x)$ en la dirección del movimiento, a lo largo del eje x, en el intervalo $[a, b]$ viene dado por:

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Ley de Hooke. La fuerza F que se requiere para comprimir o alargar un resorte x unidades desde su posición de equilibrio es proporcional a x. Es decir:

$$F(x) = kx$$

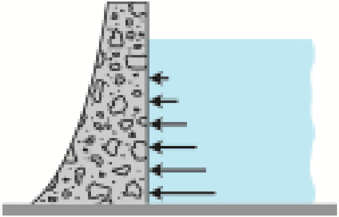
para alguna constante $k > 0$.
Ejemplo: determine el trabajo requerido para comprimir un resorte cuya longitud en el equilibrio es de $1m$ a una longitud de $0.75m$. Supongamos que la constante del resorte es $k = 0.14N/m$.



Solución: El trabajo es:

$$W = \int_0^{0.25} kx dx.$$

En esta sección, vamos a utilizar la integral para calcular la presión que ejerce un líquido sobre una pared. La siguiente figura ilustra la situación en una represa:



Conocimientos previos:

Ecuación de presión-profundidad

La presión p ejercida por un fluido en reposo a una profundidad h es:

$$p = wh,$$

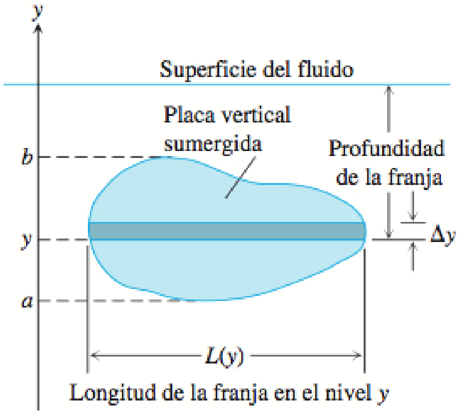
donde w es la densidad específica del fluido (es decir el peso por unidad de volumen).

Fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie a una profundidad h

Si A es el área de la superficie sumergida horizontalmente a una profundidad h en un fluido, entonces la fuerza ejercida por el fluido de densidad específica w sobre la superficie es:

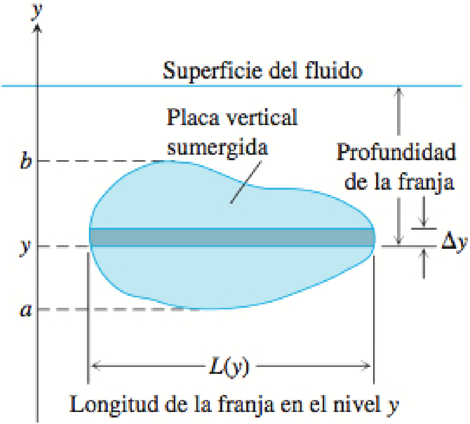
$$F = pA = whA.$$

¿Qué sucede si la superficie se sumerge verticalmente?
Consideramos el intervalo $[a, b]$ en el eje y. Tomamos una partición de $[a, b]$ y consideramos las franjas de la superficie correspondientes a esa partición. Si la franja es muy delgada, podemos suponer que la presión se mantiene constante.



En dicha franja, tenemos que la fuerza ΔF ejercida por el fluido es:

$$\Delta F = (\text{ presión en la franja}) \times (\text{área})$$
$$= w \times (\text{profundidad de la franja}) \times L(y)\Delta y.$$



Si sumamos ΔF en cada franja obtenemos que la fuerza F ejercida por el fluido sobre la superficie puede aproximarse como:

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} w(\text{profundidad de la franja } y_k) \times L(y_k)\Delta y_k$$

Haciendo tender la norma de la partición a cero, obtenemos:

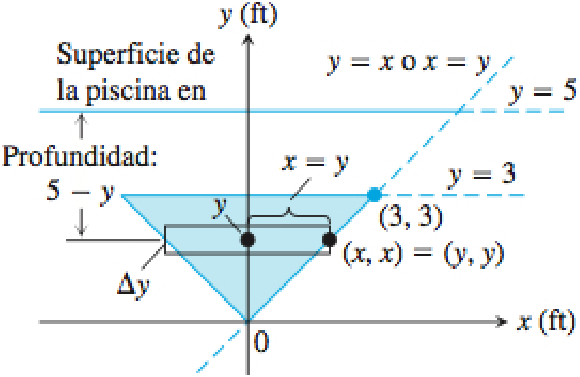
Fuerza ejercida por un fliudo sobre una placa

Si se sumerge una placa verticalmente en un fluido en reposo con densidad específica w, que va desde $y = a$ hasta $y = b$ en el eje y y si $L(y)$ denota la longitud horizontal de la placa a una altura y, entonces la fuerza ejercida por el fluido contra la superficie es:

$$F = \int_a^b w(\text{profundidad de la franja } y) \times L(y)dy.$$

Aplicación: una placa con forma de triángulo isósceles de 3 m de altura y 6 de base se sumerge, con la base hacia arriba, 2 metros por debajo de la superficie del agua en una piscina. Determine la fuerza ejercida por el agua contra una de las caras de la placa (la densidad específica del agua es 62.4 libras por $pies^3$).

Aplicación: una placa con forma de triángulo isósceles de 3 m de altura y 6 de base se sumerge, con la base hacia arriba, 2 metros por debajo de la superficie del agua en una piscina. Determine la fuerza ejercida por el agua contra una de las caras de la placa (la densidad específica del agua es 62.4 libras por *pies*^{3}).



Solución: siguiendo la figura, ubicamos el eje x en el vértice inferior de la placa (otras elecciones son posibles). Entonces la superficie del líquido queda a una altura de $y = 5$. Eligiendo una sección delgada, representativa, de la placa a altura y, obtenemos que la profundidad de la misma es

$$5 - y$$

y su longitud

$$L(y) = 2x = 2y.$$

Luego,

$$F = \int_0^3 62.4.(5 - y).2y dy = 1684.8 \, libras.$$

FUNCIONES INVERSAS

Noción de función

Recordar:

Definición de función

Sean A y B conjuntos de números reales. Una función $f : A \to B$ es un conjunto de pares (a, b), $a \in A$, $b \in B$, tal que: si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.
El **dominio** de f es el conjunto de todos los $a \in A$ tales que existe $b \in B$ con la propiedad: $(a, b) \in f$. El **rango** de f es el conjunto de los $b \in B$ tales que existe $a \in A$ con la propiedad $(a, b) \in f$.

Notación: Si D es el dominio de f y R su rango, entonces escribimos:

$$f : D \to R.$$

También: $f : D \to \mathbb{R}$ para indicar que f asume valores reales.

Noción de función inversa

Tomemos la siguiente función:

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\}.$$

Se nos puede ocurrir la brillante idea de invertir los pares ordenados. Así, obtendríamos:

$$g = \{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

Observar que g es una nueva función (llamada **función inversa**).
Sin embargo, invertir los pares ordenados de una función no siempre da por resultado una nueva función. Por ejemplo:

$$F = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

entonces al invertir los pares obtenemos:

$$G = \{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}.$$

Este último conjunto no es una función.

Noción de función inversa

Tomemos la siguiente función:

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\}.$$

Se nos puede ocurrir la brillante idea de invertir los pares ordenados. Así, obtendríamos:

$$g = \{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

Observar que g es una nueva función (llamada **función inversa**).
Sin embargo, invertir los pares ordenados de una función no siempre da por resultado una nueva función. Por ejemplo:

$$F = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

entonces al invertir los pares obtenemos:

$$G = \{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}.$$

Este último conjunto no es una función. OBSERVAR QUE LA DIFICULTAD RESIDE EN QUE $F(3) = F(13) = 4$.

Noción de función inversa

Para poder definir la función inversa de f, necesitamos evitar que la función f asigne el mismo valor a dos elementos distintos del dominio. Así, introduciremos las funciones inyectivas:

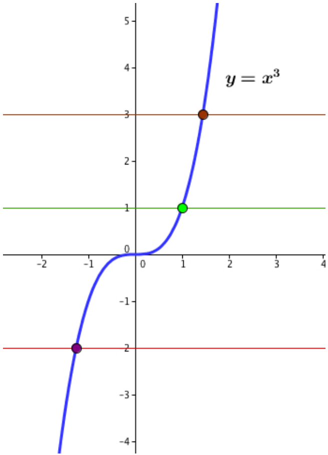
Definición de función inyectiva

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es inyectiva en D si:

$$f(x) \neq f(y)$$

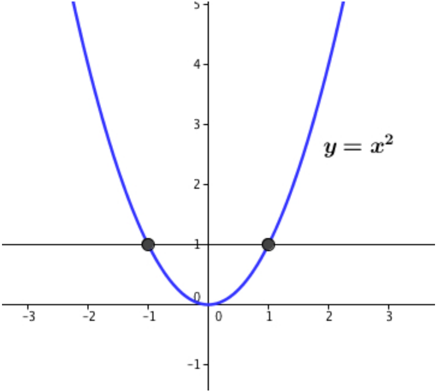
siempre que $x \in D$, $y \in D$, y además $x \neq y$.

Observar la gráfica de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Es una función inyectiva.



Toda recta horizontal corta en a lo sumo un punto a la gráfica de una función inyectiva.

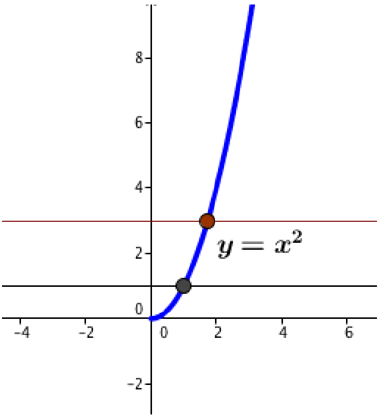
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas



Existe una recta horizontal que corta a la gráfica en dos puntos. Luego, $y = x^2$ (con dominio $\mathbb{R}$) no es inyectiva. Sin embargo, al modificar el dominio podemos construir una función inyectiva.

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

La función $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ es inyectiva:



Noción de función inversa

A continuación, introduciremos la noción de función inversa:

Definición de función inversa

Sea $f : D \to R$ una función inyectiva en D, donde R es la imagen o rango de f. La función inversa $f^{-1} : R \to D$ se define por:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

para todo $y \in R$.

Observar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \textbf{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Ejemplo: determine la función inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, y de $y = x^2$, $x \geq 0$.

Ejemplo: determinaremos la función inversa de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. A partir de la gráfica de f, sabemos que es inyectiva y que el rango de la función es $[0, \infty)$. La función inversa es $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ y para calcular $f^{-1}(x)$ procedemos como sigue:

- primero despejamos x en la expresión de $f(x)$:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

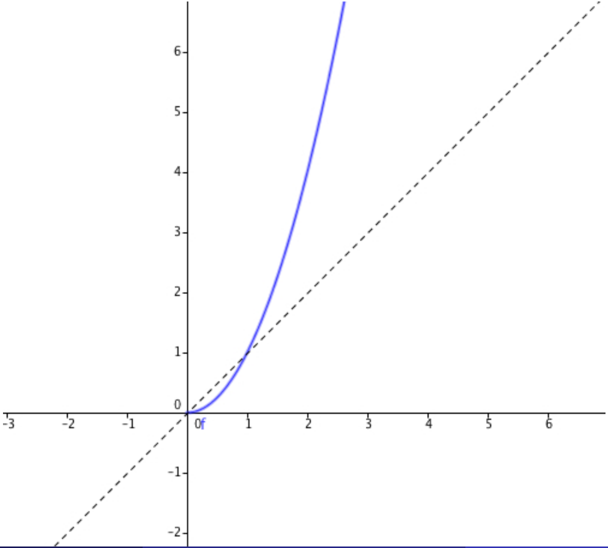
- dado que generalmente expresamos a las funciones con variable independiente x, intercambiamos los símbolos de x e y en la ecuación anterior:

$$y = \sqrt{x}.$$

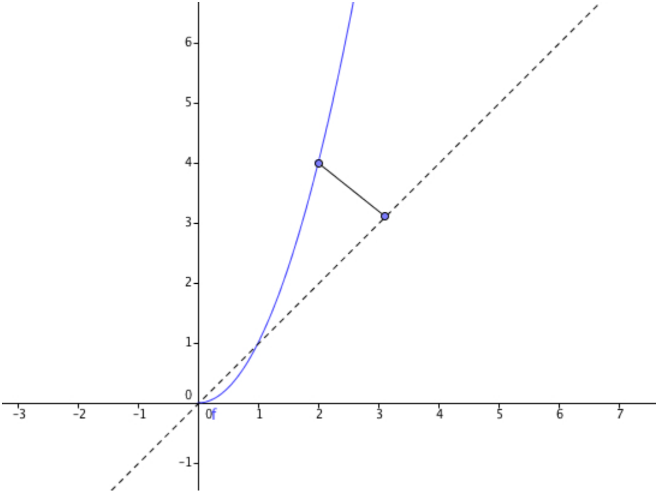
- Así:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

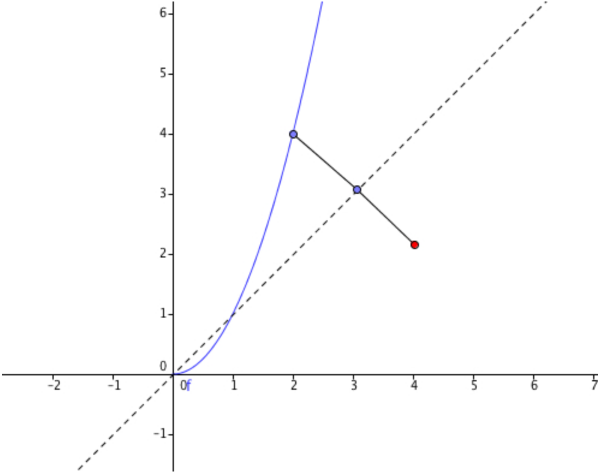
Veremos gráficamente cómo determinar la función inversa y cómo se relacionan las gráficas de f y f^{-1}:
1-primero hacemos el gráfico de f y trazamos la recta $y = x$ con un trazo tenue:



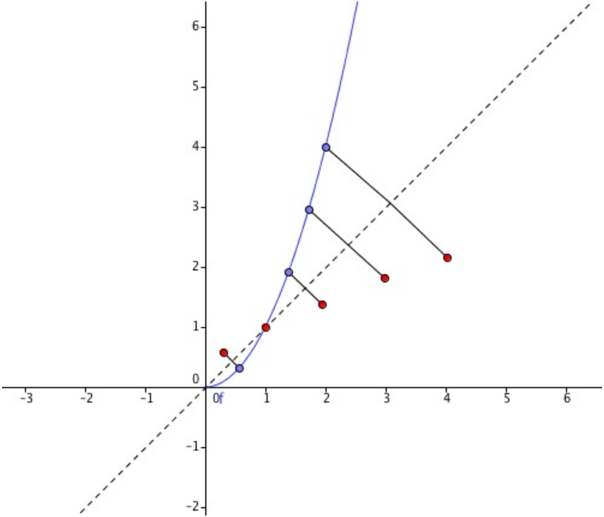
2-tomamos un punto de la gráfica de f y trazamos un segmento perpendicular a la recta $y = x$ que tenga como un extremo el punto elegido y el otro extremo en la recta $y = x$:



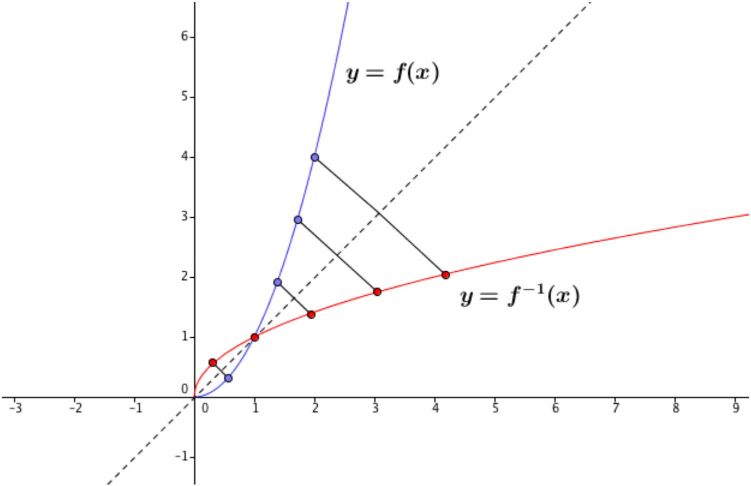
3-prolongamos el segmento del ítem anterior en dirección perpendicular a la recta $y = x$ hasta cubrir una longitud igual al segmento original:



4-realizamos el procedimiento anterior varias veces, resaltando (en este caso con rojo) los extremos de los segmentos construidos:



5-La gráfica de f^{-1} es la curva que conecta a todos los puntos construidos (puntos rojos).



Observar que la gráfica de la función inversa es simétrica con respecto la recta $y = x$.

Recordar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si f y f^{-1} son derivables, entonces la regla de la cadena implica:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Luego si $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$ entonces:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Recordando que $x = f^{-1}(y)$ obtenemos la fórmula:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.
Solución: observar primero que $f'(x) = 2x \neq 0$ para $x \in (0, \infty)$. Recordar que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Luego:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Observación: la función inversa y su derivada suelen denotarse usando a x como variable independiente. Así, la fórmula anterior para la derivada se puede escribir:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

En la clase siguiente utilizaremos la fórmula anterior para obtener la derivada de varias funciones inversas (funciones trigonométricas, exponenciales, hiperbólicas, etc.)