Análisis Matemático I
Clase 18: funciones inversas y sus derivadas. Funciones trascendentes.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2023

Derivación de funciones inversas

Recordar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si f y f^{-1} son derivables, entonces la regla de la cadena implica:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Luego si $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$ entonces:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Recordando que $x = f^{-1}(y)$ obtenemos la fórmula:

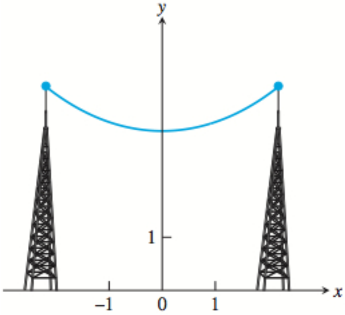
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Observación: la función inversa y su derivada suelen denotarse usando a x como variable independiente. Así, la fórmula anterior para la derivada se puede escribir:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Estudio de funciones trascendentes

Excepto por las funciones trigonométricas, hasta ahora hemos analizado **funciones algebraicas,** es decir, funciones que se obtienen por suma, resta, división, multiplicación o extracción de raíces de polinomios.
Ahora comenzaremos con el estudio de funciones no algebraicas o también llamadas **trascendentes**.
Ejemplos de funciones no algebraicas son las funciones: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales y otras funciones como las hiperbólicas.
La siguiente figura ilustra una función trascendente (función coseno hiperbólico):



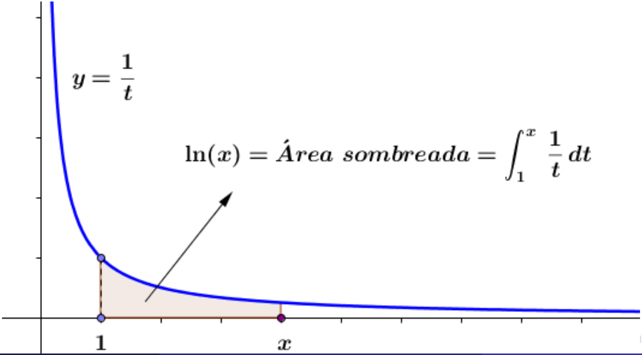
Logaritmos

Definición del Logaritmo natural

Definimos la función logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para } x > 0.$$

Observar que para x mayor a 1 se tiene:



Logaritmos

Además:

$$ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0,$$

si $x \in (0, 1)$ entonces:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

y si $x > 1$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0.$$

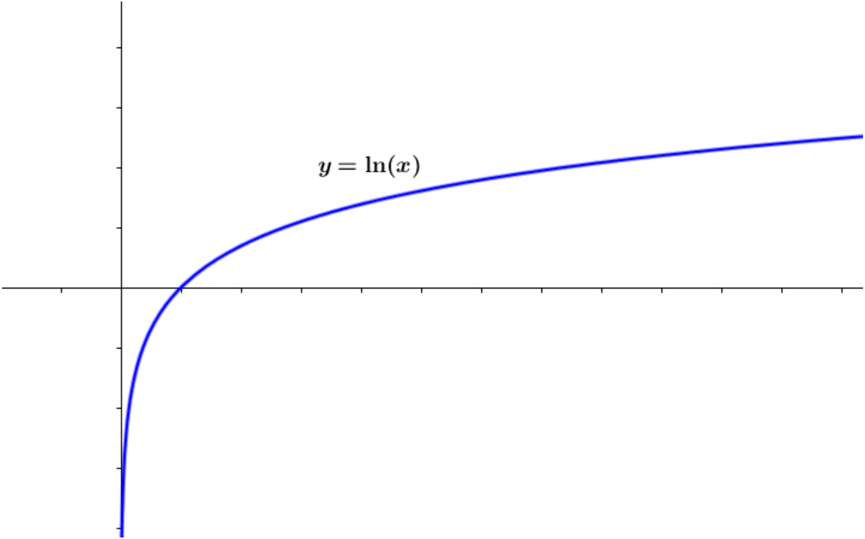
Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \ (x > 0)$$

por ende ln es una función creciente pero es cóncava hacia abajo pues:

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Logaritmos



Logaritmos

El logaritmo puede extenderse a valores de x negativos poniendo valores absolutos:

$$\ln(|x|) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$ln'(|x|) = \frac{1}{x}, \text{ para cada } x \neq 0.$$

Así:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(|x|) + C.$$

Definición: el número e se define como:

$$ln(e) = 1.$$

Ejemplos: calcule $\int tan(x)dx, \int sec(x)dx, \int cotan(x)dx, \int cosec(x)dx.$

Vamos a calcular:

$$\int \tan(x)\, dx.$$

Primero escribimos:

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\, dx$$

y hacemos la sustitución:

$$u = \cos(x), \;\; du = -sen(x)\, dx.$$

Reemplazando:

$$\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

Función Exponencial

Función exponencial

Definimos la función exponencial, *exp*, como la inversa de la función logaritmo. Es decir, $exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dada por:

$$exp(x) = ln^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observar: $exp(x) := e^x$,

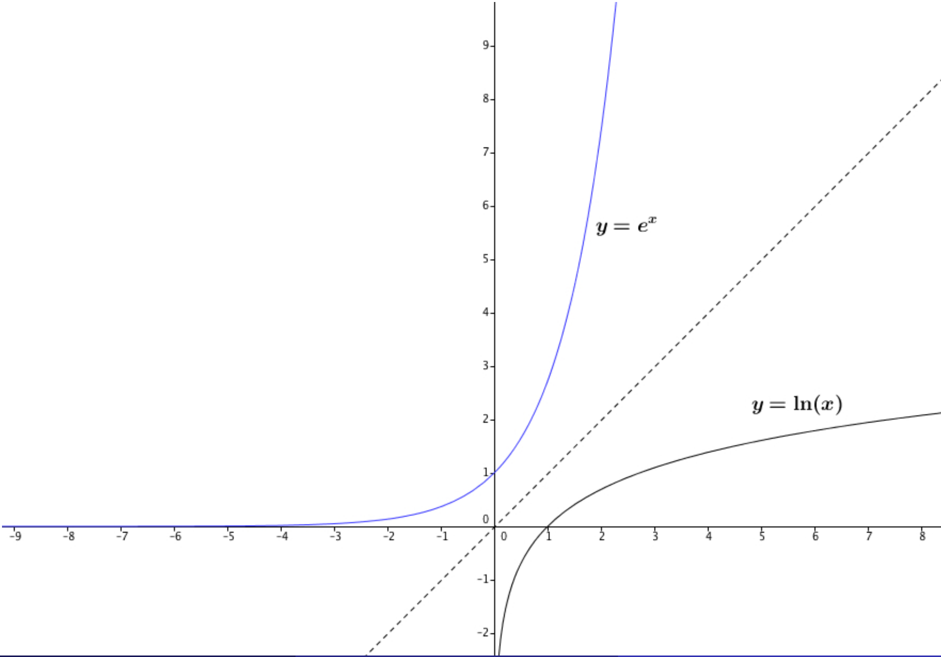
$$ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{ln(y)} = y \quad (y > 0)$$

Además, si $y = e^x$, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Así:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$



$y = e^x$
$y = \ln(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Función Exponenciales generales

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x ln(a)}.$$

Observaciones generales:

- La función $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.
- Denotamos por $g(x) = log_a(x)$ a la función inversa de a^x. Entonces: si $y = log_a(x)$, entonces:

  $$x = a^y = e^{y ln(a)}.$$

  Aplicando ln a ambos miembros:

  $$ln(x) = y ln(a) ln(e) = y ln(a).$$

  Luego:

  $$log_a(x) = y = \frac{ln(x)}{ln(a)} \quad \text{(cambio de base)}.$$

Función Exponenciales generales

Derivada de exponenciales generales

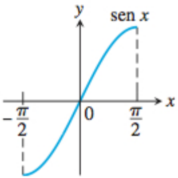
Si $a > 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx}a^x = ln(a)a^x.$$

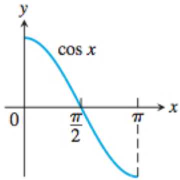
Usar regla de la cadena en la definición de a^x.

Funciones trigonométricas

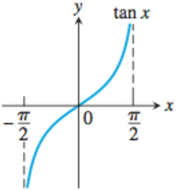
Las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas:



$y = \operatorname{sen} x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$

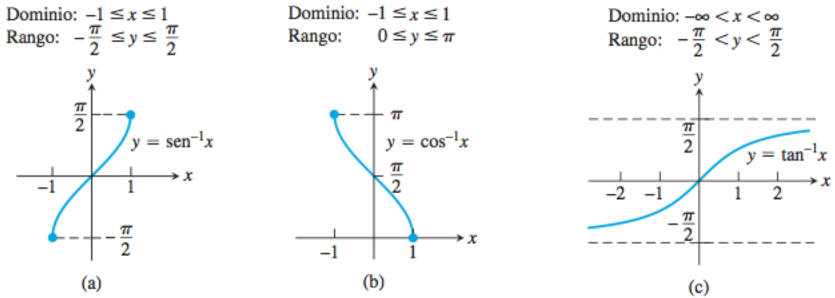


$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

Funciones trigonométricas inversas



Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

En resumen:

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se dejan como ejercicio las derivadas de cos^{-1} y tan^{-1}.

En resumen:

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se dejan como ejercicio las derivadas de cos^{-1} y tan^{-1}.Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx =$$

Funciones hiperbólicas

La utilidad principal de las funciones hiperbólicas en ingeniería radica en representar de forma concisa expresiones complejas obtenidas en el análisis de vibraciones. También, hay casos de estructuras donde se han usado funciones hiperbólicas para su diseño, como es el caso del Arco Gateway en E.E.U.U. donse se usó el coseno hiperbólico.

Funciones Hiperbólicas

Seno hiperbólico:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

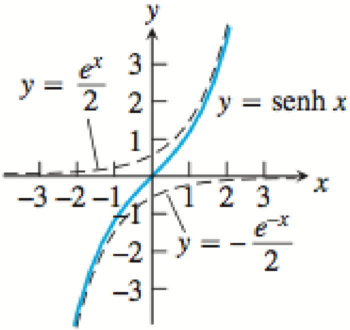
Coseno hiperbólico:

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

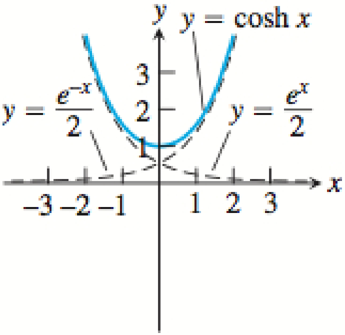
Tangente hiperbólica:

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Observar que el dominio de las funciones hiperbólicas anteriores es $\mathbb{R}$.



(a)



(b)

Seno hiperbólico:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

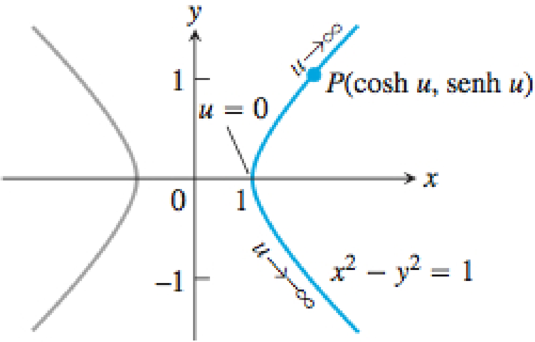
Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A partir de la relación:

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

se puede deducir que los puntos $x = cosh(u)$ y $y = senh(u)$ se encuentran en la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esta es la razón del nombre **funciones hiperbólicas**.



Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(senh)(x) = cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Inversas de funciones hiperbólicas

Derivada de $y = senh^{-1}(x)$. La función $y = senh(x)$ tiene por derivada $y' = cosh(x)$, la cual es positiva. Luego, $y = senh(x)$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$. Su inversa:

$$y = senh^{-1}(x)$$

está definida para todo x. Su derivada (usando el Teorema de la derivada de la función inversa) viene dada por:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))}.$$

Usando la relación: $cosh^2(y) - senh^2(y) = 1$, obtenemos:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + senh^2(senh^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Inversas de funciones hiperbólicas

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas (se dejan como ejercicio $(cosh^{-1})'$ y $(tanh^{-1})'$):

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$
3. $(tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1.$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas (se dejan como ejercicio $(cosh^{-1})'$ y $(tanh^{-1})'$):

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.
3. $(tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}}dx =$$

Algunas aplicaciones de las funciones trascendentes (a título informativo)

- **Cambio exponencial:** Las funciones exponenciales describen crecimiento o decrecimiento en una amplia variedad de situaciones en ingeniería y computación. Por ejemplo, la **Ley de enfriamiento de Newton** que dice que la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e.

Algunas aplicaciones de las funciones trascendentes (a título informativo)

- **Cambio exponencial:** Las funciones exponenciales describen crecimiento o decrecimiento en una amplia variedad de situaciones en ingeniería y computación. Por ejemplo, la **Ley de enfriamiento de Newton** que dice que la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial).

Algunas aplicaciones de las funciones trascendentes (a título informativo)

- **Cambio exponencial:** Las funciones exponenciales describen crecimiento o decrecimiento en una amplia variedad de situaciones en ingeniería y computación. Por ejemplo, la **Ley de enfriamiento de Newton** que dice que la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial). Este problema conduce a la relación:

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e, \qquad T_0 = T(0).$$

Algunas aplicaciones de las funciones trascendentes (a título informativo)

- **Funciones Hiperbólicas:** En redes neuronales artificiales, la propagación de patrones de salida se obtiene a partir de funciones especiales que utilizan los valores de entrada para generar los valores de salida. Las funciones más usadas en redes neuronales son: la tangente hiperbólica:

$$f(x) = tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

y la función signoidal:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Ambas son funciones crecientes, con dos niveles de saturación: el máximo que proporciona salida 1 y el mínimo, que da salida 0 para la función signoidal y -1 para la tangente hiperbólica.