Nombre y apellido:..

Legajo y carrera..........:................................

Segundo Examen Parcial-Turno Mañana, TEMA 1

Análisis Matemático I-FI-UNCUYO

15 de Mayo de 2023

Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. No se permite corrector, tache si es necesario. Puede trabajar con lápiz. Tiene 2 horas para desarrollar el examen. NO SE PERMITE EL USO DE LA CALCULADORA NI DEL CELULAR.

(1) (a) (10 pts.) Enunciar el teorema del valor medio para derivadas.

(b) (10 pts.) Defina los conceptos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

(2) (10 pts.) Encuentre la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{x + 5}$$

en el punto $(-1, 1)$.

(3) (10 pts.) El radio de un cilindro circular recto varía con respecto al tiempo como $\sqrt{t^2+1}$ y la altura del cilindro como $\frac{1}{2}t + \sqrt{t}$. Determine la tasa de cambio instantánea del volumen del cilindro con respecto al tiempo. Déjela expresado como una función del tiempo t.

(4) Dada la función

$$g(x) = (x^2 - 1)^{2/3},$$

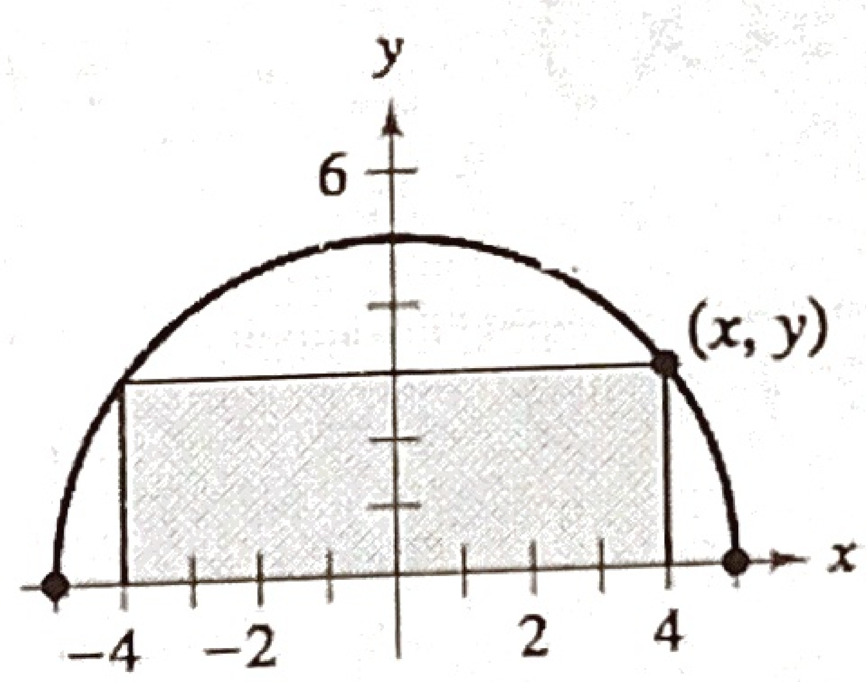
determine

(a) (10 pts.) Los puntos críticos de g.

(b) (10 pts.) Los intervalos donde g crece o decrece.

(c) (5 pts.) Los extremos locales de g.

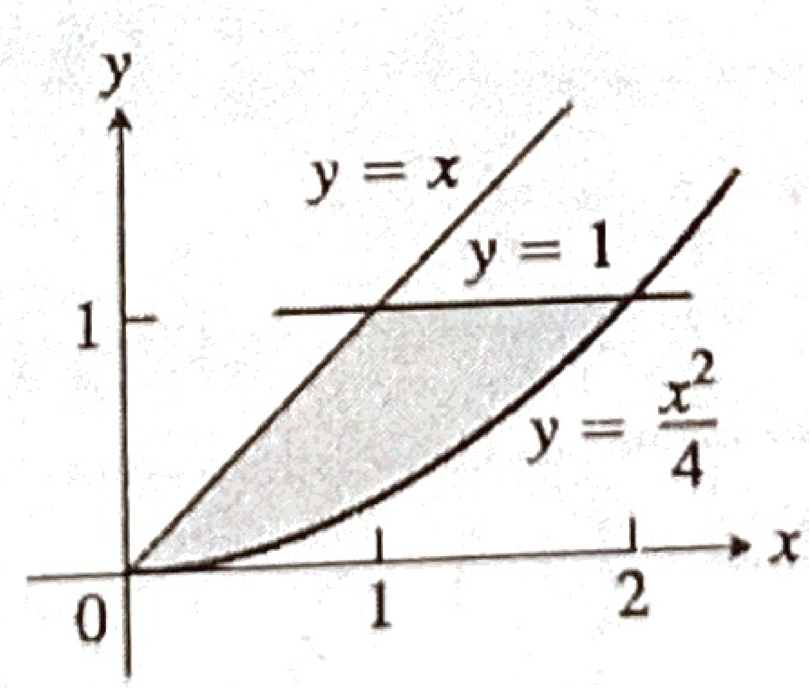
(5) (10 pts.) Encuentre las dimensiones del rectángulo con máxima área que puede inscribirse en un semicírculo de radio $r = 5$.



(6) (10 pts.) Determine

$$\int x(5x^2+3)^6\, dx =$$

(7) (15 pts.) Determine el área de la región sombreada:



Segundo parcial - Turno mañana - Tema 1.

1) a) Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$. Entonces existe $c \in (a;b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

b) Sea f una función derivable en $(a;b)$.

Si f' es creciente en $(a;b)$, entonces f es cóncava hacia arriba en $(a;b)$.

Si f' es decreciente en $(a;b)$, ent. f es cóncava hacia abajo en $(a;b)$.

2) Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}(x+5) - \left(3 - \frac{1}{x}\right) \cdot 1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{5}{x^2} - 3 + \cancel{\frac{1}{x}}}{(x+5)^2} = \frac{-\frac{5}{x^2} - 3}{(x+5)^2}$$

Evaluamos en $x = -1$:

$$f'(-1) = \frac{-5-3}{(-1+5)^2} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

Así, la ec. de la recta tangente es:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}(x+1) - 1}$$

3) $r(t) = \sqrt{t^2+1}$, $h(t) = \frac{1}{2}t + \sqrt{t}$.

$$V(t) = \pi \cdot r(t)^2 \cdot h(t) = \pi \cdot \left(\sqrt{t^2+1}\right)^2 \left(\frac{1}{2}t + \sqrt{t}\right)$$

$$= \pi\left(t^2+1\right)\left(\frac{1}{2}t + \sqrt{t}\right)$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}t^3 + t^{5/2} + \frac{1}{2}t + \sqrt{t}\right].$$

Luego

$$V'(t) = \pi\left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^{3/2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right).$$

4) a) $D(g) = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4}{3}x(x^2-1)^{-1/3}.$$

g' no existe en $x_1 = 1$ y en $x_2 = -1$.

$g'(x) = 0$ en $x = 0$, ya que $\frac{4}{3}x \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}} = 0$

$\frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

Los puntos críticos son

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

b) $g'(x) = \frac{4}{3} x . \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
V.P	-2	$-1/2$	$1/2$	2
signo g'	$-$	$+$	$-$	$+$
Conclusión	g decrece	g crece	g decrece	g crece

↘ ↗ ↗ ↘ ↘ ↗

c).

$\begin{cases} \text{Mín. local en } x = -1 \text{ y en } x = 1 \\ \text{Máx. local en } x = 0 \end{cases}$

5) base: $2x$

Altura: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$ (raíz positiva).

Perímetro: $2x + 2x + \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - x^2}$

$P(x) = 4x + 2\sqrt{25 - x^2}$

$$p'(x) = 4 + \frac{-2x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$$

$$4 = \frac{2x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$2 \cdot \sqrt{25 - x^2} = x$$

$$25 - x^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$25 = \frac{5}{4}x^2 \Rightarrow 20 = x^2$$

$$\boxed{x_1 = \sqrt{20}}$$

4).

$$\cancel{x_2 = -\sqrt{20}}$$

Calculemos la derivada segunda:

$$p''(x) = \frac{-2\sqrt{25 - x^2} - (-2x) \cdot \frac{(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}}{\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-2(25 - x^2) - 2x^2}{\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^3}$$

$$= \frac{-50}{\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^3}$$ es siempre negativa, en particular si evaluamos en $x = \sqrt{20}$.

Luego, P tiene un máx local en $x = \sqrt{20}$. La altura es $y = \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5}$.

6) $$\int x(5x^2+3)^6\,dx = \frac{1}{10}\int u^6\,du = \frac{u^7}{70} + C = \frac{(5x^2+3)^7}{70} + C$$

$u = 5x^2+3$

$du = 10x\,dx$

7) $$A = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{12}} + \left(2 - \frac{8}{12}\right) - \left(1 - \cancel{\frac{1}{12}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{12}\,3} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Nombre y apellido:..

Legajo y carrera.........:..............................

Segundo Examen Parcial-Turno Mañana, TEMA 2

Análisis Matemático I-FI-UNCUYO

15 de Mayo de 2023

Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. No se permite corrector, tache si es necesario. Puede trabajar con lápiz. Tiene 2 horas para desarrollar el examen. NO SE PERMITE EL USO DE LA CALCULADORA NI DEL CELULAR.

(1) (a) (10 pts.) Enunciar el teorema de Rolle.
(b) (10 pts.) Defina extremos locales o relativos.

(2) Dada la función

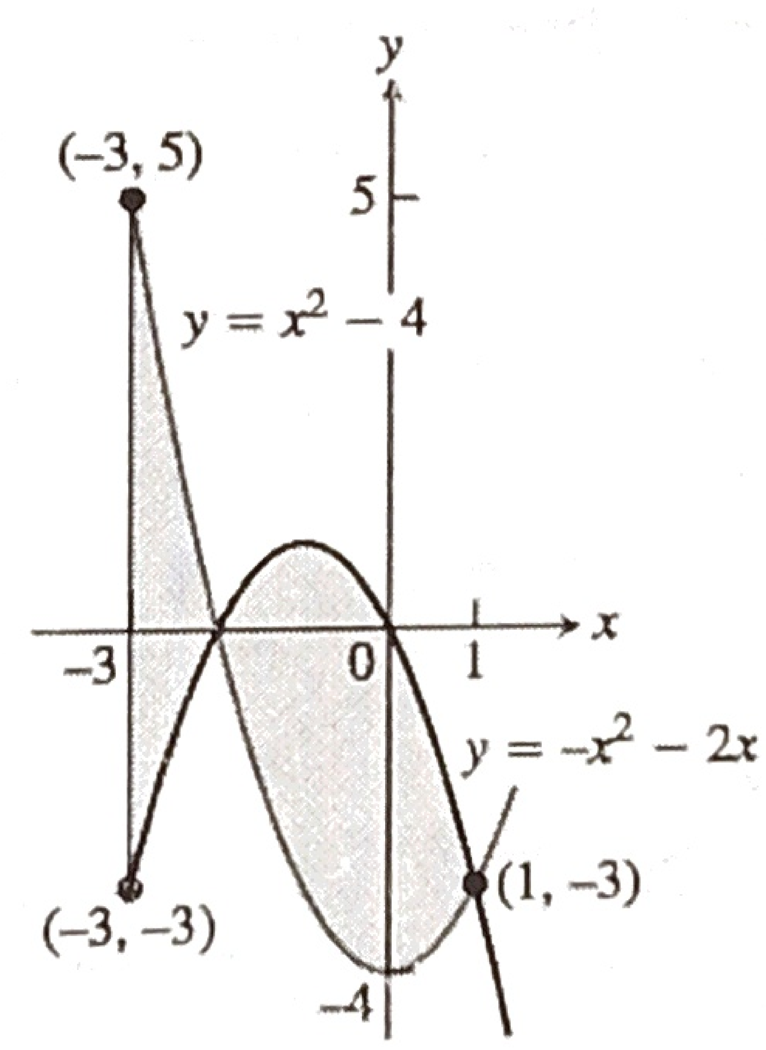
$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

determine

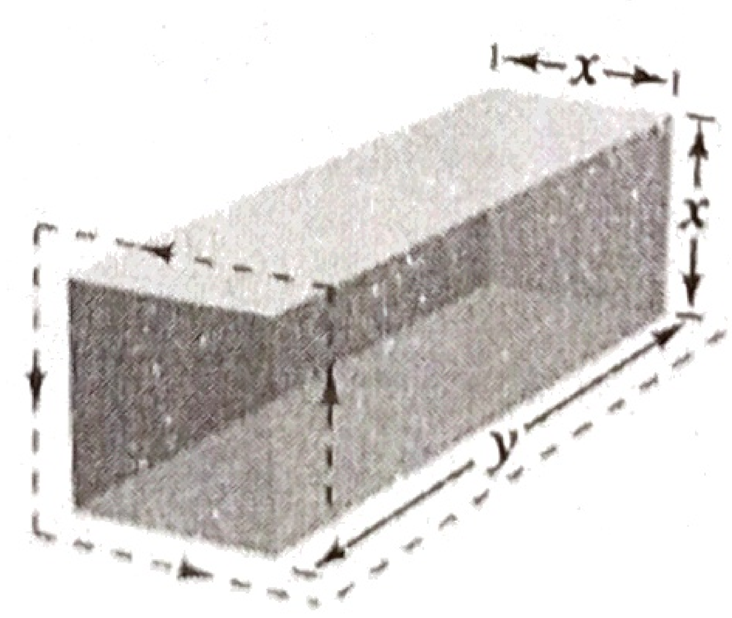
(a) (15 pts.) Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la gráfica de h.
(b) (5 pts.) Si existen, determine los puntos de inflexión. En caso de que no existan, justifique.

(3) (15 pts.) El ancho de un rectángulo está dado en función del tiempo por $6t+5$ y su altura por $\sqrt{t+1}$ (t se mide en segundos y las longitudes en metros). Encuentre la tasa de cambio instantánea del área del rectángulo con respecto al tiempo en el instante $t = 2$ s.

(4) (15 pts.) Determine el área de la región sombreada:



(5) (15 pts.) Encuentre las dimensiones de una caja como se muestra en la figura de tal forma que la suma de las longitudes de las aristas sea 240 cm y que el volumen encerrado sea máximo.



(6) (15 pts.) Calcule:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx = .$$

Segundo examen parcial - Turno mañana
Tema 2.

1) a) Teorema de Rolle: si f es continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$ tal que

$$f(b)=f(a),$$

entonces existe $c\in(a;b)$:

$$f'(c)=0.$$

b) f tiene un máx. local en $x=c$ si existe $r>0$ tal que

$$f(x)\leq f(c), \text{ para todo } x\in D\cap(c-r;c+r).$$

En forma análoga definir min local.

2) $D(h)=\mathbb{R}-\{2;-2\}.$

$$h'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{2x^3-8x-2x^3-2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}.$$

$$h''(x)=\frac{-10(x^2-4)^{\cancel{2}}+10x\cdot 2(\cancel{x^2-4})\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{-10(x^2-4)+40x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{-10x^2+40x^2+40}{(x^2-4)^3}$$

$$=\frac{30x^2+40}{(x^2-4)^3}.$$

h'' nunca es cero. Luego los únicos puntos a considerar son 2 y -2.

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 2)$	$(2; \infty)$
V.P.	-3	0	3
signo h''	$+$	$-$	$+$
Conclusión	h es cóncava hacia arriba	h es cóncava hacia abajo	h es cóncava hacia arriba

b) Si bien hay cambio de concavidad en 2 y −2, no pertenecen al dominio de h con lo que no hay puntos de inflexión.

3) $b(t) = 6t + 5$

$h(t) = \sqrt{t+1}$

$$A(t) = (6t+5) \cdot \sqrt{t+1}$$

$$A'(t) = 6\sqrt{t+1} + \frac{(6t+5)}{2\sqrt{t+1}}$$

Evaluamos en $t = 2$ s.

$$A'(2) = 6\sqrt{3} + \frac{17}{2\sqrt{3}}$$

4)

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2-4) - (-x^2-2x)\, dx + \int_{-2}^{1} (-x^2-2x) - (x^2-4)\, dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} (2x^2 + 2x - 4)\, dx + \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\, dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \dots$$

5) Suma de longitudes de aristas:

$$S = 8x + 4y = 240$$

$$\boxed{y = 60 - 2x}$$

Volumen de la caja:

$$V(x) = x^2 \cdot y = x^2(60 - 2x)$$

$$= 60x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 120x - 6x^2 = 0$$

$$6x(20 - x) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \boxed{x = 20} \end{cases}$$

$$V''(x) = 120 - 12x$$

$$V''(20) = 120 - 240 < 0$$

V alcanza un máx. local en $\boxed{x = 20.}$ $\boxed{y = 60 - 40 = 20}$.

6) $$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3} \cdot (1 + \sqrt{x})^2}\, dx = \int_2^3 \frac{2\,du}{u^2} = 2\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)\Bigg|_2^3$$

$$= 2\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$u = 1 + \sqrt{x^3}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\, dx$

Nombre y apellido:..

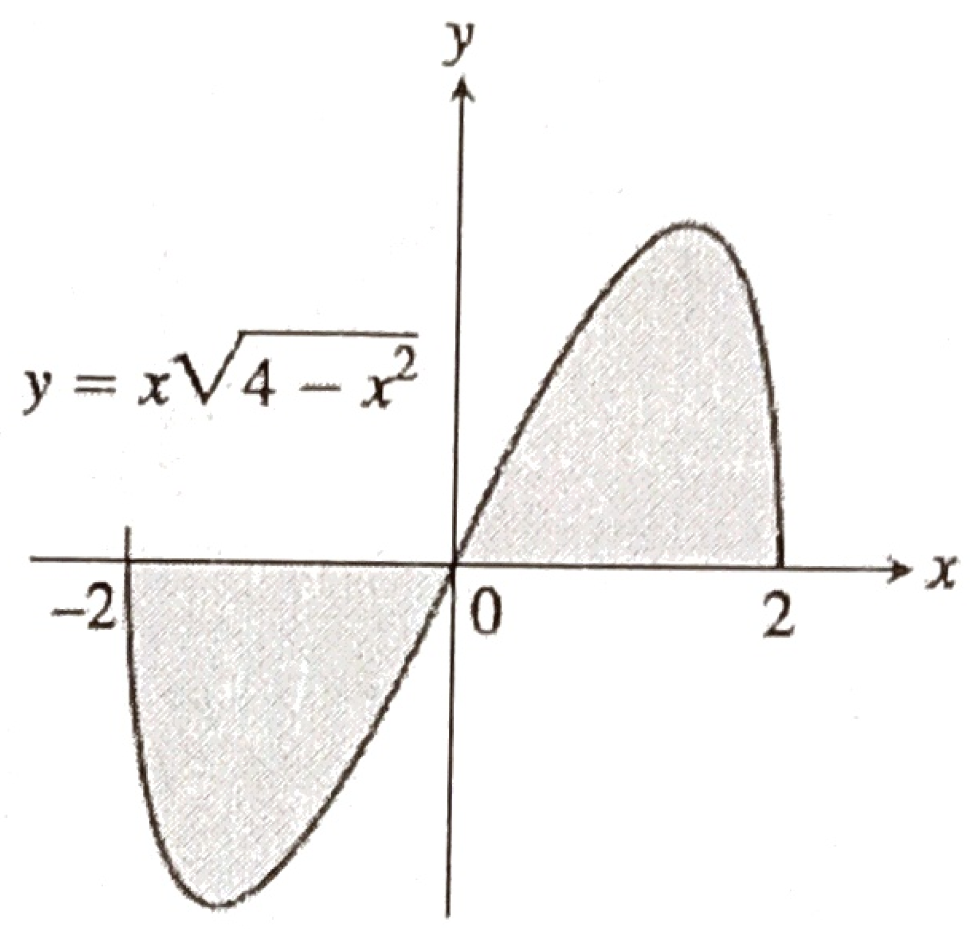
Legajo y carrera.........:................................

Segundo Examen Parcial-Turno Tarde, TEMA 1
Análisis Matemático I-FI-UNCUYO
15 de Mayo de 2023

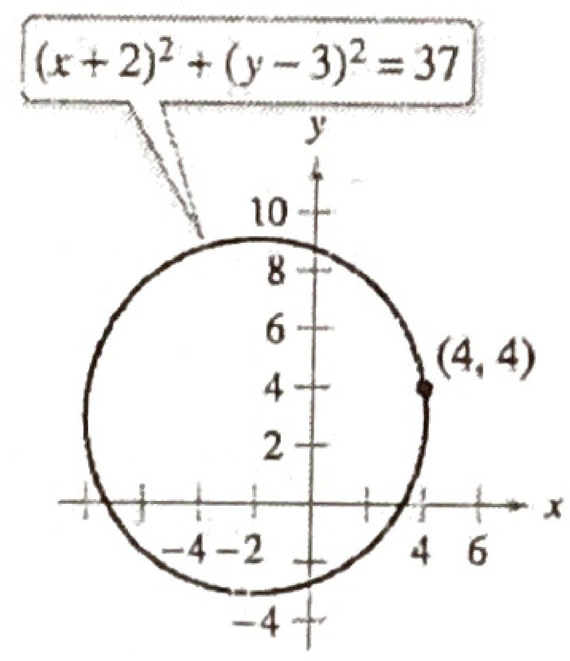
Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. No se permite corrector, tache si es necesario. Puede trabajar con lápiz. Tiene 2 horas para desarrollar el examen. NO SE PERMITE EL USO DE LA CALCULADORA NI DEL CELULAR.

(1) (a) (10 pts.) Enunciar el teorema del valor medio para integrales.
(b) (10 pts.) Defina linealización e interprete geométricamente.

(2) (15 pts.) Determine el área total de las regiones sombreadas.



(3) (15 pts.) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

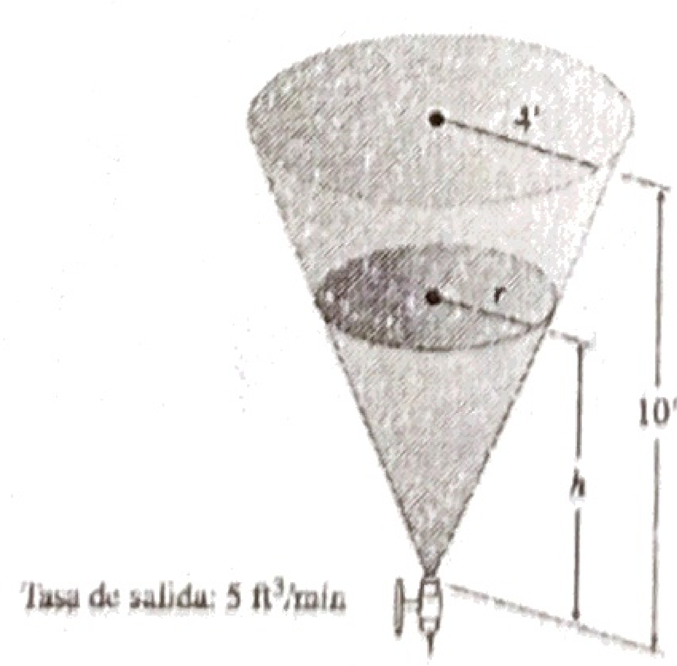


(4) (15 pts.) Determine la linealización de

$$f(x) = \frac{1}{1 + tan(x)}$$

en $x = 0$ y utilícela para encontrar una aproximación a $f(0.01)$.

(5) (20 pts.) La tasa de salida de agua en un depósito cónico es de 5 ft^3/min. En base a los datos de la figura, determine la tasa de cambio del radio cuando el nivel del líquido es de 6 ft.



(6) (15 pts.) Para la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales.

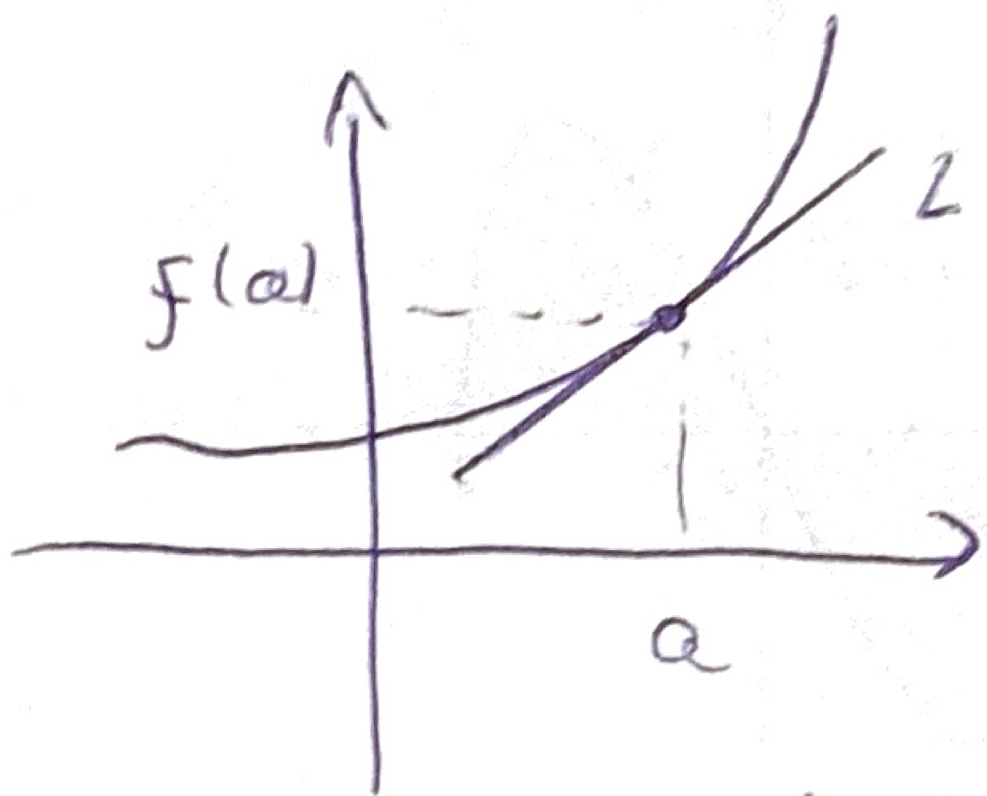
Segundo parcial - Turno tarde - Tema 1.

1) a) Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a;b]$.
Entonces existe $c \in [a;b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

b) Sea f derivable en $x=a$. ↳ linealización de f en a se define como

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$



2) $$A = \left| \int_{-2}^{0} x\sqrt{4-x^2}\, dx \right| + \left| \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx \right|$$

$u = 4 - x^2$
$du = -2x\,dx$

$$= \left| \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{u}\, du \right| + \left| \int_4^0 -\frac{1}{2}\sqrt{u}\, du \right|$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2} \Big|_0^4 + \left| \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{u}\, du \right|$$

$$= \frac{(\sqrt{4})^3}{3} + \frac{(\sqrt{4})^3}{3} = \frac{16}{3}.$$

3) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 37$ ↲ Derivamos ambos miembros

$\cancel{2}(x+2) + \cancel{2}(y-3)y' = 0$

$$y' = -\frac{(x+2)}{y-3}$$

En $(4,4)$, $y' = -\frac{(4+2)}{4-3} = -6$

Ecuación de la recta tangente

$\boxed{y = -6(x-4) + 4}$

4) Derivamos:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\tan(x)} \cdot \sec^2 x$$

$$f'(0) = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(\cos 0)^2} = -1.$$

Luego,

$$f(x) \approx \underbrace{L(x)}_{\text{Linealización en } x=0} = (-1)\cdot(x-0) + \underbrace{1}_{f(0)}$$

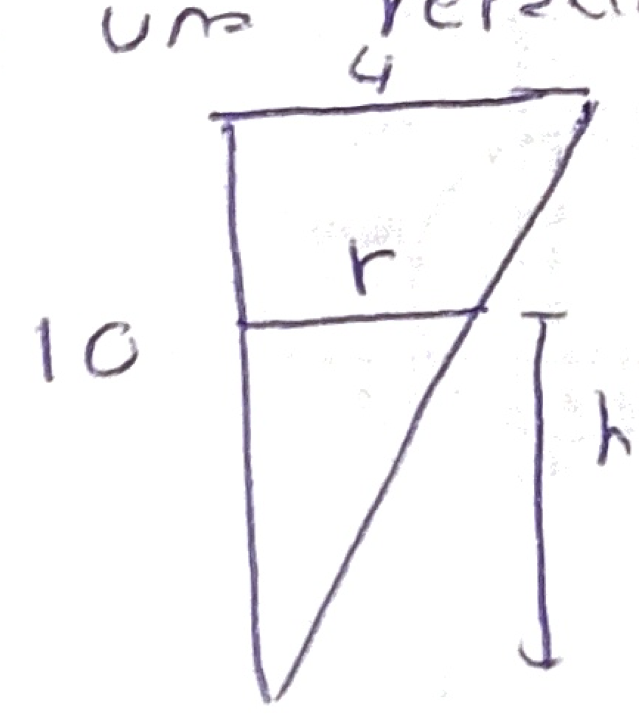
$$f(x) \approx -x+1$$

$$f(0.01) \approx -0.01 + 1 = 0.99.$$

5) Datos: $V' = -5 \ ft^3/min$ $\quad \boxed{V = \frac{\pi}{3} r^2 h}$

Buscamos r' cuando $h = 6$ ft.

Primero buscamos una relación entre r y h:



$$\frac{r}{h} = \frac{4}{10} \mapsto \boxed{r = \frac{5}{2} h}$$

$$\boxed{h = \frac{10}{4} r = \frac{5}{2} r}$$

Así,

$$\boxed{h' = \frac{5}{2} r'}$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\left[2r(t)r'(t)\,h(t) + r^2(t)\,h'(t)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[2\cdot\left(\frac{5}{2}\underbrace{h(t)}_{6}\right)\cdot r'(t)\,\underbrace{h(t)}_{6} + \left(\frac{5}{2}\underbrace{h(t)}_{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} r'(t)\right]$$

$$-5 = \frac{\pi}{3}\cdot\left[180 + 15^2\cdot\frac{5}{2}\right] r'(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{r'(t) = \frac{-15}{\pi\left(180 + 225\cdot\frac{5}{2}\right)} \ ft/s}$$

b)

$$f'(x) = 3x^2 - 3x$$

Buscamos puntos críticos (f es continua en $\mathbb{R}$).

$$3x^2 - 3x = 0$$

$$3x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

f' existe siempre.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
V.P.	-1	$1/2$	2
signo f'	$+$	$-$	$+$
Conclusión	f crece	f decrece	f crece

$$\begin{cases} \text{Máx local en } x = 0 \\ \text{Mín local en } x = 1 \end{cases}$$

Nombre y apellido:..

Legajo y carrera..........:................................

Segundo Examen Parcial-Turno Tarde, TEMA 2
Análisis Matemático I-FI-UNCUYO
15 de Mayo de 2023

Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. No se permite corrector, tache si es necesario. Puede trabajar con lápiz. Tiene 2 horas para desarrollar el examen. NO SE PERMITE EL USO DE LA CALCULADORA NI DEL CELULAR.

(1) (a) (10 pts.) Enunciar criterio de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes.
(b) (10 pts.) Defina diferencial e interprete geométricamente.

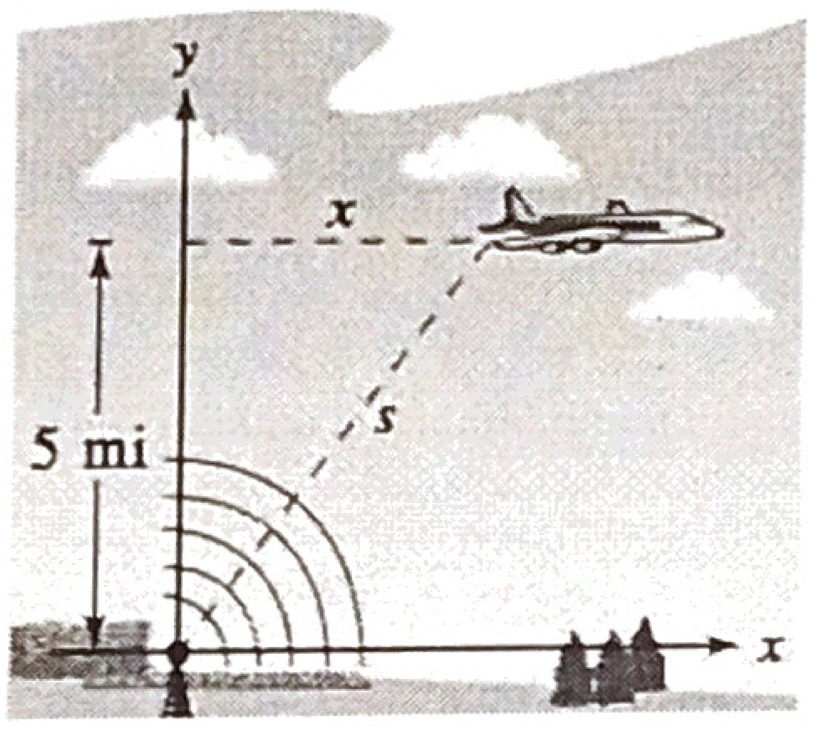
(2) (10 pts.) Determine los extremos absolutos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1, 2]$.

(3) (10 pts.) Utilizando derivadas laterales determine si la función

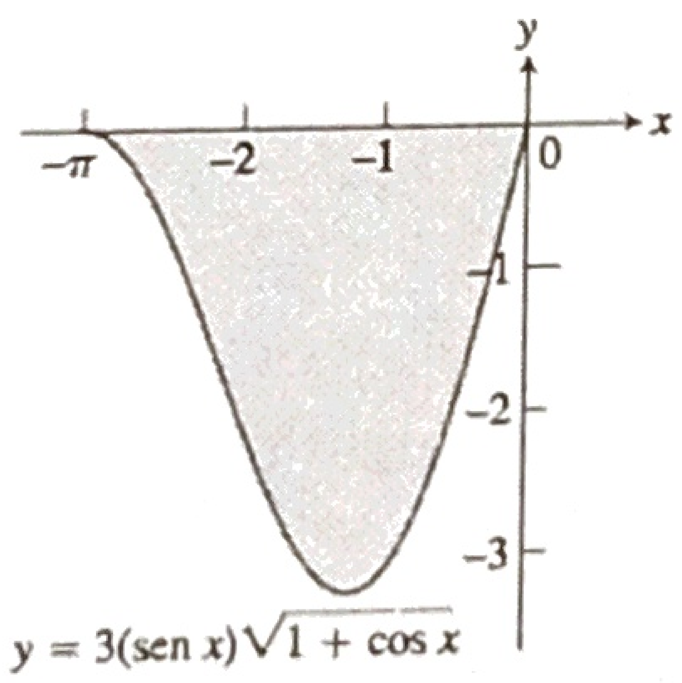
$$y = |x^2 - 1|$$

es derivable en $x = 1$.

(4) (15 pts.) Un avión vuela a una altitud de 5 millas y pasa justo por encima de un radar. Cuando el avión está a 10 millas del radar, es decir $s = 10$ millas, el radar detecta que la distancia s está cambiando a 240 millas por hora. Determine la velocidad del avión en ese momento.



(5) (15 pts.) Determine el área total de las regiones sombreadas.



(6) Para la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x^2 + 4}{2x},$$

determine

(a) (10 pts.) intervalos donde g crece o decrece.
(b) (5 pts.) Extremos locales.
(c) (10 pts.) Intervalos de concavidad.
(d) (5 pts.) Puntos de inflexión. Si no existen, explique el motivo.

Segundo parcial - Turno tarde - Tema 2

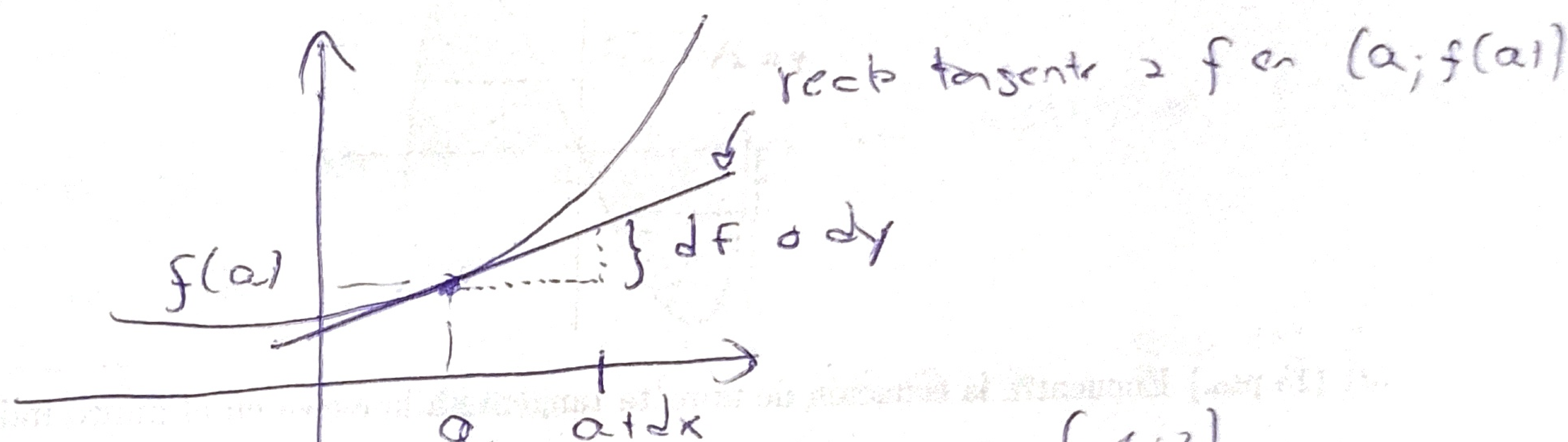
1) a) Sea f continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$.

si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a;b)$, ent. f es creciente en $[a;b]$.

si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a;b)$, ent. f es decreciente en $[a;b]$.

b) Sea f derivable en $x=a$. El diferencial de f en $x=a$ es:

$$df = f'(a)\,dx.$$



2) Encontremos los puntos críticos de f en $(-1;2)$.

f' existe siempre.

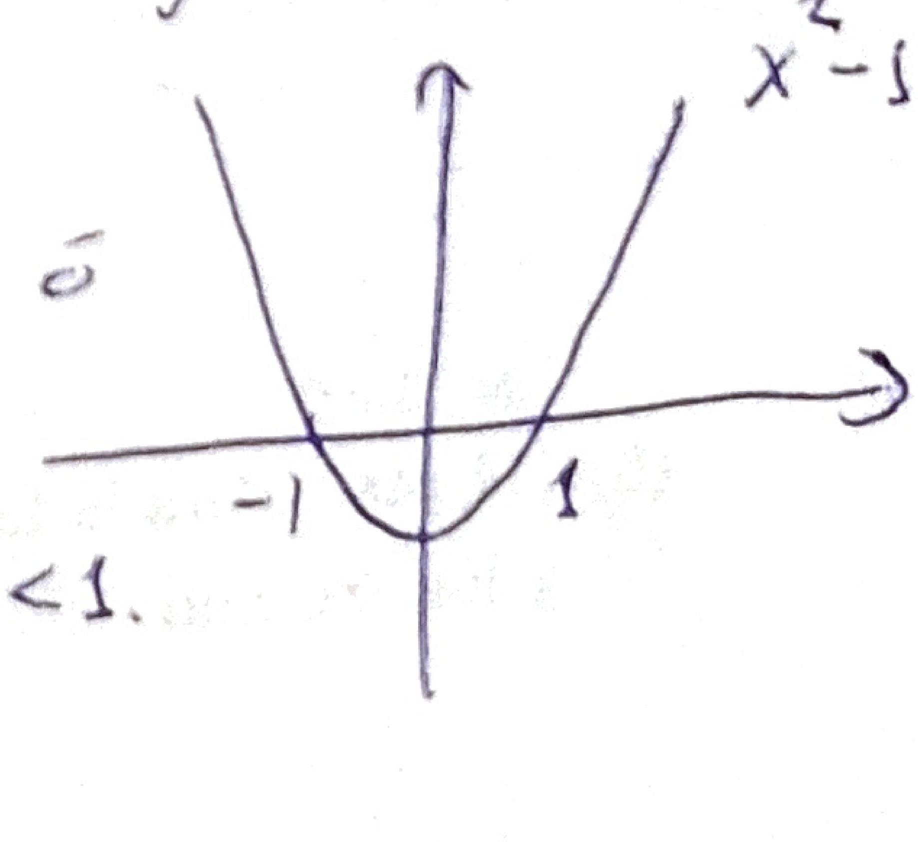
$$f'(x) = 12x^3-12x^2=0$$
$$12x^2(x-1)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Evaluamos f:

$f(0)=0$	$f(-1)=7$
$f(1)=-1$	$f(2)=16$

Así, f tiene máximo absoluto en $x=2$ y un mín. abs. en $x=1$.

3) $$f(x)=|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x\le -1 \text{ ó } x\ge 1 \\ -(x^2-1), & \text{si } -1<x<1. \end{cases}$$



es mayor a 1, se sacan las barras

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\overbrace{1+h}) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2.$$

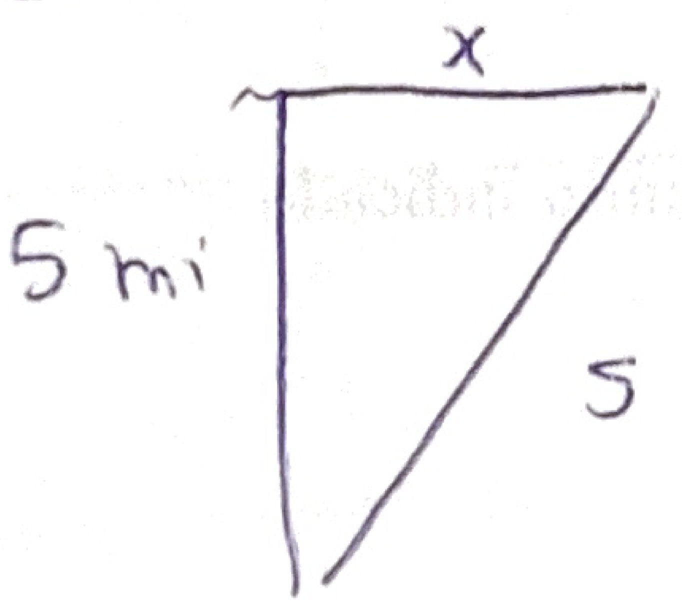
es menor a 1, pero cercano

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(\overbrace{1+h}) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-[(1+h)^2-1]-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h-h^2}{h} = -2.$$

Luego, como las derivadas laterales son distintas, f no es derivable en $x=1$.

4)



Buscamos $x'(t)$, cuando $s = 10$ mi

$$s^2 = x^2 + 25 \Rightarrow x = \sqrt{s^2-25} = \sqrt{75},$$

cuando $s = 10$ millas

Derivamos

$$\cancel{2}ss' = \cancel{2}x \cdot x'$$

$$\frac{s \cdot s'}{x} = x' \Rightarrow \boxed{x'(t) = \frac{10 \cdot 240}{\sqrt{75}} \text{ mi/h.}}$$

5)

$$A = \left| \int_{-\pi}^{0} 3 \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{1+\cos x}\, dx \right| \quad \begin{cases} u = 1+\cos x \\ du = -\operatorname{sen} x\, dx \end{cases}$$

$$= \left| \int_0^2 (-3)\sqrt{u}\, du \right| = \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} u^{3/2} \Big|_0^2 = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2}.$$

6) • Dominio $g = \mathbb{R} - \{0\}$.

a) $$g'(x) = \frac{2x(2x) - (x^2+4)\cdot 2}{4x^2} = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{\boxed{2x^2}}$$ siempre positivo

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, \ x = -2$

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$	
V.P.	-3	-1	1	3	
signo g'	$+$	$-$	$-$	$+$	
conclusión	g crece	g decrece	g decrece	g crece	

b)

Máx local en $x = -2$

Min local en $x = 2$.

c) $$g''(x) = \frac{2x\cdot(2x^2) - (x^2-4)\cdot 4x}{4x^4} = \frac{16x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}$$

$x = 0$ es el único punto a considerar

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
V.P.	-1	1
signo g''	$-$	$+$
conclusión	g es cóncava hacia abajo	g es cóncava hacia arriba

g no tiene puntos de inflexión porque si bien hay cambio de concavidad en $x=0$, éste no pertenece al dominio de g.