

# Análisis Matemático I

## Clase 19: Regla de L'Hopital. Técnicas de integración: integración por partes e integrales trigonométricas.

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**  
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Mayo, 2023

# Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en  $x = x_0$  (indeterminación '0/0').

# Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en  $x = x_0$  (indeterminación '0/0'). Sin embargo, si dividimos ambos miembros por  $x - x_0$  se obtiene (usando teorema del valor medio):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}$$

donde  $c_x$  y  $d_x$  están entre  $x$  y  $x_0$ .

**Esto sugiere que uno podría calcular un límite 'indeterminado' a través de un cociente de derivadas.**

## Regla de L'Hopital

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $(a, b)$ . Supongamos que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ . Supongamos que el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe o es  $+\infty$  o  $-\infty$ . Entonces:

(1) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Observaciones

- La regla de L'Hopital vale para cualquier tipo de límite: límites ordinarios (digamos  $x \rightarrow a$ ), laterales,  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ .
- Los enunciados análogos cuando  $x \rightarrow b$  o  $x \rightarrow b^-$  son también ciertos.

## Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x}$$

# Regla de L'Hopital

## Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x}$$

Solución: sean  $f(x) = x - \text{sen}(x)$  y  $g(x) = x$  (ambas son funciones derivables). Observar que  $f$  y  $g$  tienden a 0 cuando  $x \rightarrow 0$  (tenemos un límite indeterminado, estamos en la condición (1) de la regla de L'Hopital). Para aplicar la regla de L'Hopital, verificamos si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1} = 0.$$

Luego, aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1} = 0.$$

# Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

**Ejemplos:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$



# Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

**Ejemplos:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Solución: sean  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = x^2$  (ambas son funciones derivables). Observar que el denominador tiende a infinito cuando  $x \rightarrow +\infty$  (estamos en el ítem (2) de la regla de L'Hopital). Sin embargo, el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x}$$

vuelve a ser indeterminado (el denominador tiende a infinito). Intentamos aplicar la regla de L'Hopital a ese límite. Analizamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

# Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a  $e^x$  y  $2x$ , se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a  $e^x$  y  $x^2$ , que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

# Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a  $e^x$  y  $2x$ , se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a  $e^x$  y  $x^2$ , que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

El ejercicio anterior se realizó paso a paso. El estudiante puede hacerlo así directamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

siempre y cuando diga que está usando la regla de L'Hopital y esté corroborando que en cada paso esté en las condiciones (1) o (2) de la regla. Veamos un ejemplo donde se aplica la regla de L'Hopital sin cuidado.

Supongamos que queremos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Observar que el denominador es cero en  $x = 1$  por ende no podemos aplicar la regla del cociente de límites. Pero podemos factorizar y obtener:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = -4.$$

Sin embargo, podríamos haber usado la regla de L'Hopital dado que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando  $x \rightarrow 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

¿Dónde está el error?

# Regla de L'Hopital

En otros casos, es necesario primero transformar el límite para que pueda expresarse en la forma de cociente. Por ejemplo:

- Para el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$$

hay dos alternativas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

o:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

La mejor alternativa es la primera.

# Más límites indeterminados

Supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Observar que hay una indeterminación del tipo  $0^0$ . Vamos a aplicar la regla de L'Hopital. Para ello, necesitamos transformar la expresión  $x^x$  en cociente. Con el fin de *bajar* la potencia  $x$ , vamos a calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Observar que se ha elegido la alternativa de dejar el logaritmo en el numerador, ya que así será más sencilla de aplicar la regla de L'Hopital.

**Estamos en la situación (2) de la regla, pues el denominador tiende a  $+\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ .** Ahora corroboramos que el límite del cociente de las derivadas existe

# Más límites indeterminados

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Así, por la regla de L'Hopital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = 0.$$

Sin embargo, **queríamos calcular el límite de  $x^x$** . Para revertir el efecto del logaritmo, aplicamos la función exponencial

$$e^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x,$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

# Técnicas de integración



# Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

# Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Por ejemplo, vamos a utilizarla para calcular:

$$\int x \cdot \cos(x) dx, \int \ln(x) dx, \int e^x \sin(x) dx, \text{ etc.}$$

# Integración por partes

**Idea:** sean  $f$  y  $g$  funciones derivables. Entonces la regla del producto para derivadas implica:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x).$$

Así, la función  $f \cdot g$  es una antiderivada de  $f' \cdot g + f \cdot g'$ . Luego:

$$\int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) dx = f \cdot g + C.$$

Obtenemos entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Cuando calculemos  $\int f'(x)g(x)dx$  colocaremos una constante  $C$ , luego podemos reescribir la igualdad anterior en la forma:

## Integración por partes

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

# Integración por partes

## Integración por partes

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Para recordar mejor la fórmula anterior, se suele llamar:

$$u = f(x), \quad v = g(x)$$

así:

$$du = f'(x)dx, \quad dv = g'(x)dx$$

y entonces la fórmula de integración por partes se puede escribir:

## Integración por partes

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables. Entonces:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

# Integración por partes

**Observación:** para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir  $u$  y  $dv$  en la integral, luego calcular  $du$  y  $v$  y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.

Ejemplos:



$$\int x.\cos(x)dx =$$

# Integración por partes

**Observación:** para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir  $u$  y  $dv$  en la integral, luego calcular  $du$  y  $v$  y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.

Ejemplos:



$$\int x \cdot \cos(x) dx =$$

**Solución:** tenemos dos posibilidades para  $u$  y para  $dv$ . Para  $u$  elegimos la que es fácil de derivar y cuya derivada es más simple que  $u$ . Y para  $dv$  la que es fácil de integrar y cuya antiderivada no es mucho más compleja que  $v$ . Así:

$$u = x \Rightarrow du = 1 dx.$$

$$dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \text{sen}(x).$$

Reemplazando en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int x.\cos(x) dx = x.\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x) dx = x.\text{sen}(x) + \cos(x) + C.$$



## Integración por partes para integrales definidas

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $[a, b]$ . Entonces:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Cuidado:** la variable de integración sigue siendo  $x$  (de hecho,  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$ ), así que no hay que cambiar los extremos de integración.

# Integración por partes



$$\int_1^2 \ln(x) dx =$$



$$\int_1^2 \ln(x) dx =$$

**Solución:** en este caso no podemos elegir  $dv = \ln(x)dx$  pues deberíamos integrar  $\ln(x)$  que es justamente lo que se quiere hacer. Entonces tomamos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

Luego:

$$\int_1^2 \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2\ln(2) - 1.$$

# Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int \text{sen}^m(x) \cdot \text{cos}^n(x) dx, \quad n, m \geq 0.$$

Seguiremos procedimientos de acuerdo a los siguientes casos:

- $m$  es impar (y no importa si  $n$  es par o impar).
- $m$  es par y  $n$  es impar.
- $m$  es par y  $n$  es par.

Veremos el primer caso esta clase y los otros dos en la siguiente.

# Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int \text{sen}^m(x) \cdot \text{cos}^n(x) dx, \quad n, m \geq 0.$$

## Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si  $m$  es impar, entonces  $m = 2k + 1$ , para algún  $k \geq 0$ . Escribir en la integral:

$$\text{sen}^m(x) = \text{sen}^{2k+1}(x) = \text{sen}^{2k}(x) \cdot \text{sen}(x) = (\text{sen}^2(x))^k \cdot \text{sen}(x)$$

y usar:  $\text{sen}^2(x) = 1 - \text{cos}^2(x)$  en el último término.

# Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int \text{sen}^m(x) \cdot \text{cos}^n(x) dx, \quad n, m \geq 0.$$

## Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si  $m$  es impar, entonces  $m = 2k + 1$ , para algún  $k \geq 0$ . Escribir en la integral:

$$\text{sen}^m(x) = \text{sen}^{2k+1}(x) = \text{sen}^{2k}(x) \cdot \text{sen}(x) = (\text{sen}^2(x))^k \cdot \text{sen}(x)$$

y usar:  $\text{sen}^2(x) = 1 - \text{cos}^2(x)$  en el último término.

Ejemplo: calcular:

$$\int \text{sen}^3(x) \text{cos}^2(x) dx.$$

Para calcular la integral, observemos que la potencia del seno  $m = 3$  es impar. Luego, reescribimos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x) dx - \int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^4(x) dx.\end{aligned}$$

Para calcular la integral, observemos que la potencia del seno  $m = 3$  es impar. Luego, reescribimos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x) dx - \int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^4(x) dx.\end{aligned}$$

En ambas integrales, hacemos la sustitución  $u = \cos(x)$  ( $du = -\operatorname{sen}(x) dx$ ) y obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx = - \int u^2 du + \int u^4 du = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + C.$$



A causa de la entrega de parciales, se hablará del examen final en las clases de teoría de los días Jueves 1 de Junio y Viernes 2 de Junio.