Análisis Matemático I
Clase 20: Examen final. Técnicas de integración (continuación). Integrales Impropias. Sucesiones.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2023

Examen final

En la última clase se hablará de la modalidad, contenidos y organización del examen final. Sin embargo, para aquellos alumnos que quieran comenzar a prepararse para el examen final se les adelanta la siguiente información:
-Pueden acceder al examen final los alumnos que queden en condición regular o libre, excepto los que queden en figura abandonó (es decir, aquellos que no asistieron a ninguno de los parciales).
-El examen final es integrador, suele tener una primera parte escrita y luego una etapa oral para los que aprobaron el escrito.

Requisito para rendir examen final (alumnos libres y regulares) de ingeniería y computación 2023: traer resuelto, en forma escrita, uno de los problemas de la **Guía de Situaciones Aplicadas de Análisis Matemático** que será publicada en la plataforma el viernes 2 de Junio en la sección del mismo nombre.

- **Objetivo de la guía:** mostrar al estudiante algunas de las muy diversas aplicaciones de los conceptos y procedimientos adquiridos en Análisis Matemático. Además, se busca que el estudiante estimule y acreciente su capacidad de abstracción, analice diversos factores y variables en un determinado fenómeno o situación problemática, construya modelos matemáticos sencillos y, finalmente, aplique las técnicas aprendidas en el curso de Análisis para resolver el problema planteado.

Examen final

Metodología: cada alumno eligirá un problema de la guía. Deberá interpretarlo y resolverlo utilizando lo aprendido en Análisis Matemático I. Habrá docentes asignados a cada problema que **suministrarán una guía introductoria para resolver el problema**. El alumno deberá asistir al horario habitual de consulta del docente relacionado al problema.
La exposición de la resolución del problema resuelto podría ser considerada uno de los temas del examen oral, luego de que el alumno apruebe el examen escrito. Pueden trabajar en grupos pero la presentación escrita del problema es individual y obligatoria para comenzar con el examen final.

Examen final

-Trabajo realizado por un gas (Martínez-Acosta)
-Concentración de desinfectantes (Larriqueta-Matons)
- Radiación de antena de telefonía celular (Garrido)
- Selección de un sensor para iniciar su compra (Garrido-Matons)
- Flexión de una viga en voladizo (Bertoldi-Ochoa)
- Flujo en un canal abierto (Bertoldi-Ochoa)
- Emplazamiento de un parque eólico (Martínez-Acosta)
-Medición de la velocidad de una pelota de tenis en el saque (Garrido)
- Selección del mejor pozo para extracción de hidrocarburos (Martínez-Acosta)
- Fórmulas para estimar la inflación (Matons-Garrido)
- Accidente en el ensayo de la Fiesta de la Vendimia 2017 (Garrido)
- Orden de complejidad de un algoritmo (Larriqueta-Ochoa)
- Inspección en línea de ensamble (Larriqueta-Ochoa)

Examen final

-Integración numérica (Larriqueta-Ochoa)
-Cuando un martillo y una pluma viajaron a la Luna (Bertoldi)
-Eficiencia de un motor (Bertoldi)
-Ajuste iterativo en un equipo de fabricación aditica (Garrido-Ochoa)
-Tensión nominal del sistema eléctrico doméstico argentino (Garrido-Ochoa)
-Cálculos en presas (Martínez-Acosta)
-Aproximando cambios de funciones potenciales con multiplicaciones simples (Garrido-Ochoa)

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es impar, entonces $n = 2k + 1$, para algún $k \geq 0$.
Escribir en la integral:

$$cos^n(x) = cos^{2k+1}(x) = cos^{2k}(x).cos(x) = (cos^2(x))^k.cos(x)$$

y usar: $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ en el último término.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es impar, entonces $n = 2k + 1$, para algún $k \geq 0$.
Escribir en la integral:

$$cos^n(x) = cos^{2k+1}(x) = cos^{2k}(x).cos(x) = (cos^2(x))^k.cos(x)$$

y usar: $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ en el último término.

Ejemplo: calcular:

$$\int sen^2(x).cos^3(x)dx.$$

Para calcular $\int sen^2(x).cos^3(x)dx$ aplicamos el procedimiento anterior:

$$\int sen^2(x).cos^3(x)dx = \int sen^2(x).cos^2(x).cos(x)\,dx$$

$$= \int sen^2(x).(1 - sen^2(x))cos(x)\,dx$$

$$= \int sen^2(x).cos(x)\,dx - \int sen^4(x).cos(x)\,dx.$$

El estudiante puede resolver ambas integrales haciendo la sustitución $u = sen(x)$.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es par, entonces utilizar las identidades:

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

para reescribir la integral en términos de $cos(2x)$.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es par, entonces utilizar las identidades:

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

para reescribir la integral en términos de $cos(2x)$.

Ejemplo: calcular:

$$\int sen^2(x).cos^2(x)dx.$$

$$\int sen^2(x).cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right).\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-cos^2(2x))dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int cos^2(2x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int \left(\frac{1+cos(4x)}{2}\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen(4x)}{4}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen(4x) + C.$$

Integrales trigonométricas: productos de senos y cosenos

Para calcular integrales de la forma:

$$\int sen(mx)cos(nx)dx, \quad \int sen(mx)sen(nx)dx, \ y \ \int cos(mx)cos(nx)dx$$

se pueden utilizar las siguientes identidades:

$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[sen(m-n)x + sen(m+n)x\right]$$

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x - cos(m+n)x\right]$$

$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x + cos(m+n)x\right].$$

Integrales trigonométricas: productos de senos y cosenos

Para calcular integrales de la forma:

$$\int sen(mx)cos(nx)dx, \quad \int sen(mx)sen(nx)dx, \; y \; \int cos(mx)cos(nx)dx$$

se pueden utilizar las siguientes identidades:

$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[sen(m-n)x + sen(m+n)x\right]$$

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x - cos(m+n)x\right]$$

$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x + cos(m+n)x\right].$$

Ejemplo: calcular

$$\int sen(3x)cos(5x)dx.$$

Integrales impropias

Hasta ahora hemos calculado integrales de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

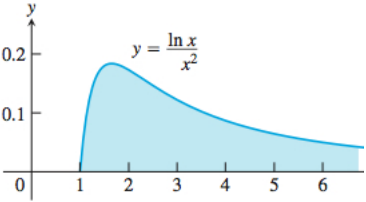
donde:

- el intervalo $[a, b]$ es acotado,
- el integrando f es continuo en $[a, b]$ (y por ende acotado en $[a, b]$).

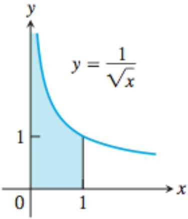
Vamos a considerar integrales en donde al menos una de estas propiedades no se cumple. Es decir, calcularemos integrales donde:

1. El intervalo $[a, b]$ no es acotado (va a ser de la forma: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.)
2. La función f presenta discontinuidades esenciales en el intervalo de integración.

Integrales del primer tipo:



Integrales del segundo tipo:



Integrales impropias de tipo I

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotados se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. Entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Sea f una función continua en $(-\infty, b]$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Integrales impropias de tipo I (continuación)

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotado se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

  donde $c \in \mathbb{R}$.

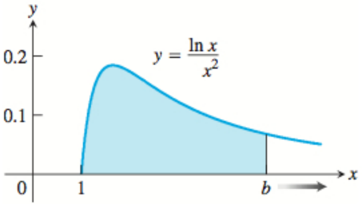
En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia es convergente. Si el límite no existe, entonces decimos que la integral impropia diverge.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.



Ejemplos:

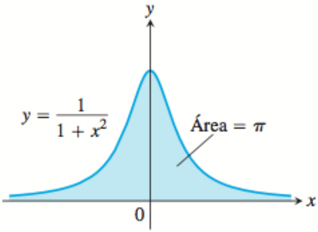
1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Ejemplos:

1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$



Integrales impropias de tipo II

Las siguientes integrales con integrandos que tienen discontinuidades en el intervalo de integración se denominan integrales impropias de tipo II:

- Sea f una función continua en $(a,b]$ y discontinua en $x=a$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

- Si f es continua en $[a,b)$ y discontinua en $x=b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Integrales impropias de tipo II (continuación)

- Si $c \in (a, b)$ y f es discontinua en c y continua en $[a, c) \cap (c, b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia converge y que el valor de la integral es el valor del límite. Si el límite no existe, decimos que la integral diverge.

Ejemplo:

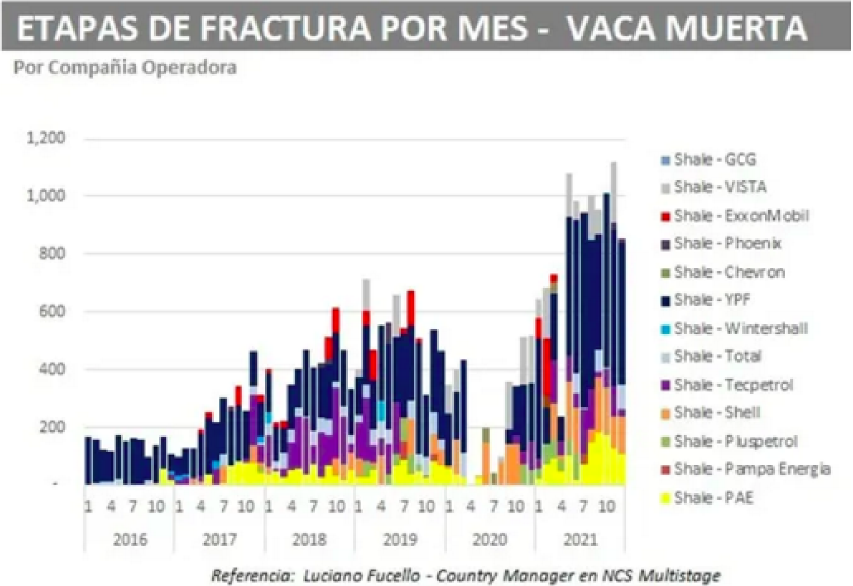
- Estudie el comportamiento de:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

- Evalúe (sólo plantear):

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Sucesiones



ETAPAS DE FRACTURA POR MES - VACA MUERTA
Por Compañia Operadora
1,200
1,000
800
600
400
200
-
1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10
2016
2017
2018
2019
2020
2021
Shale - GCG
Shale - VISTA
Shale - ExxonMobil
Shale - Phoenix
Shale - Chevron
Shale - YPF
Shale - Wintershall
Shale - Total
Shale - Tecpetrol
Shale - Shell
Shale - Pluspetrol
Shale - Pampa Energia
Shale - PAE
Referencia: Luciano Fucello - Country Manager en NCS Multistage

Intuitivamente, una sucesión es una lista *infinita* de números:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Observar que al hacer un listado se está ordenando la colección de números. Cada uno de los números a_1, a_2, ... representa un término de la sucesión.
Por ejemplo, la lista de números

$$2, 4, 6, ..., 2n, ...$$

es una sucesión. De forma genérica, la sucesión puede representarse por su término $n-$ésimo

$$a_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, para distintos valores de n obtenemos

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2$$

$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 4$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 6.$$

$$\vdots$$

Observar que una sucesión puede verse como una función que a cada número natural n le asigna un número a_n.

Sucesiones

Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales. En símbolos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotamos una sucesón por los símbolos

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o también} \qquad a_n.$$

Un ejemplo de sucesión es

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

que puede escribirse también en la forma:

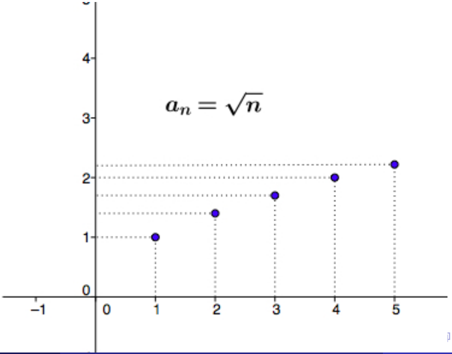
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...\right\}.$$

Gráfica de una sucesión

Dado que las sucesiones son funciones, es posible graficarlas. Sin embargo, a diferencia de las funciones que hemos estudiado, los gráficos de las sucesiones no constituyen curvas sino solamente una colección discreta de puntos. Por ejemplo, para la sucesión

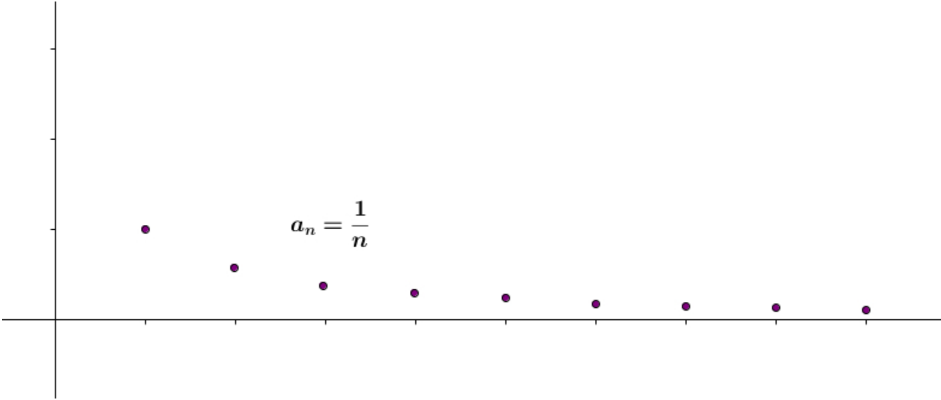
$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

obtenemos el siguiente gráfico

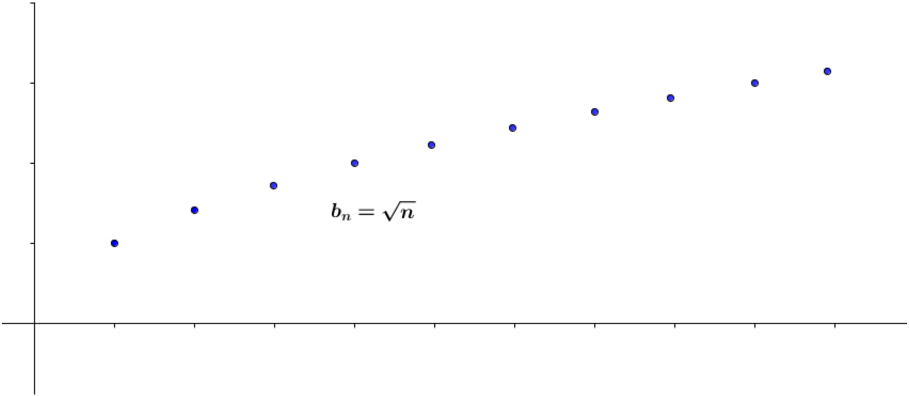


Convergencia de sucesiones

Consideremos los siguientes gráficos de sucesiones



Convergencia de sucesiones



En el primer caso diríamos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

mientras que en el segundo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Si bien es posible definir el límite de sucesiones formalmente, no lo haremos en este curso. Definiremos a continuación la noción de convergencia de sucesiones.

Convergencia de sucesiones

Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

existe y es igual a L, entonces decimos que la sucesión a_n converge a L. Si el límite no existe, decimos que la sucesión diverge.

Propiedades de los límites de sucesiones

Álgebra de límites de sucesiones

Propiedades algebraicas de límites de sucesiones

TEOREMA 1 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, y sean A y B números reales. Las siguientes reglas se cumplen si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Regla de la suma:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$

Ejemplos:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1\cdot 0 = 0$ Regla del múltiplo constante y el ejemplo 1a

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ Regla de la diferencia y el ejemplo 1a

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0\cdot 0 = 0$ Regla del producto

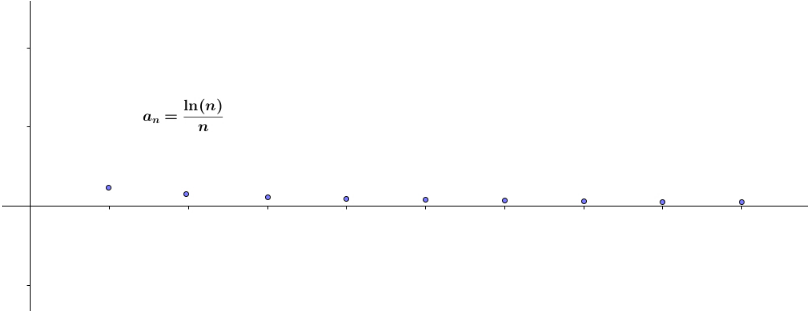
(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)} = \frac{0-7}{1+0} = -7.$ Reglas de la suma y el cociente ■

Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{ln(n)}{n}.$$

Su gráfico es



Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

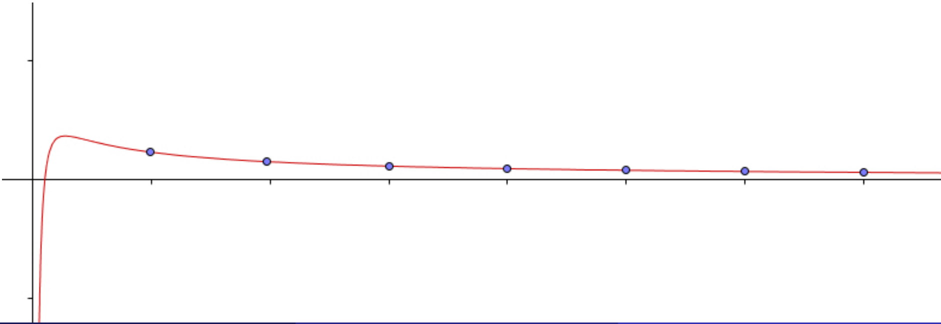
Para estudiar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n},$$

se puede introducir la función

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x}.$$

Observando el gráfico



Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

podemos concluir que si el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$$

existe, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}.$$

La ventaja de introducir la función f es que podemos usar regla de L'Hopital.

De hecho en el ejemplo anteriore tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

y entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0.$$

Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

Ejemplo: calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1}.$$

Para resolver el ejemplo, primero introducimos la función

$$f(x) = \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1}.$$

Cuando $x \to \infty$, el denominador tiende a infinito y estamos en la situación (2) de la regla de L'Hopital. Analizamos si el límite del cociente de las derivadas existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + cos(x)}{9x^2 + 2x} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1} = 0$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1} = 0$$