Análisis Matemático I
Clase 21: sucesiones y series numéricas

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2023

Teorema de la compresión para sucesiones

Teorema de la compresión para sucesiones

TEOREMA 2: El teorema de la compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema de la compresión para sucesiones

TEOREMA 2: El teorema de la compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ejemplos:

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ ya que $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(c) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Sucesiones monótonas y acotadas

Sucesión acotada

Decimos que una sucesión a_n es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \text{ para todo } n.$$

Sucesión monótona

Sea a_n una sucesión. Entonces

- decimos que a_n creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.
- decimos que a_n decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Finalmente, una sucesión es monótona si es o bien decreciente, o bien, creciente.

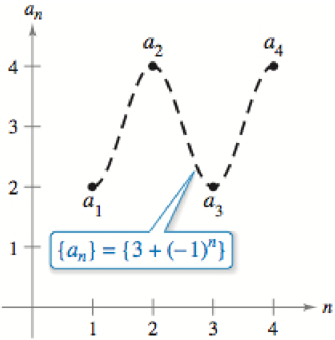


Figure: Sucesión no monótona

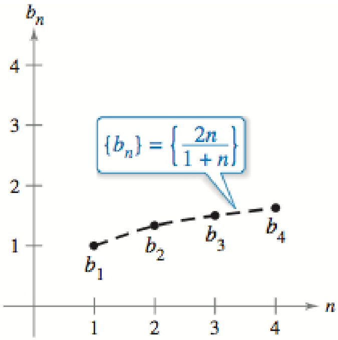


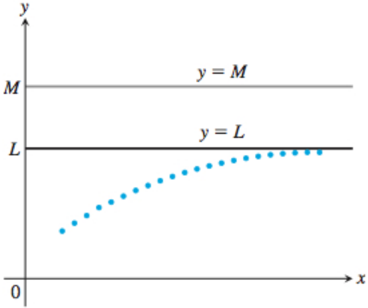
Figure: Sucesión monótona no decreciente

Convergencia de sucesiones monótonas y acotadas

El siguiente teorema será utilizado más adelante

Teorema

Si una sucesión es monótona y acotada, entonces es convergente.



SERIES NUMÉRICAS

Comenzamos con una sucesión de números reales

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Deseamos extender el concepto de suma finita de números a **sumas infinitas**.

Idea y definición de Serie: Consideramos las siguientes *sumas parciales*

1. $s_1 = a_1$
2. $s_2 = a_1 + a_2$
3. $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
4. $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5. $\vdots$
6. $s_N = a_1 + \cdots + a_N$
7. $\vdots$

Así, hemos construído una nueva sucesión

$$\{s_N\}_{N=1}^{\infty},$$

denominada sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se denomina **serie** y se simboliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si:

$$\lim_{N\to\infty} s_N$$

existe, entonces decimos que la **suma** de $\{a_n\}$ es el valor del límite y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

En este caso, decimos que la serie converge. Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces decimos que la serie diverge.

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

1. $s_1=1-\frac{1}{2}$
2. $s_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$
3. $s_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}$
4. $s_4=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{5}$
5. $\vdots$
6. $s_N=1-\frac{1}{N+1}$
7. $\vdots$

Así

$$\lim_{N\to\infty} s_N = 1$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

converge y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Serie geométrica

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Otra forma de escribir la serie geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

La serie geométrica es muy importante, veremos algunas aplicaciones más adelante en la teoría de aproximación de funciones.

Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}.$$

Entonces la suma parcial n-ésima es:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por r obtenemos:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Luego:

$$s_n - rs_n = a - ar^n = a(1 - r^n),$$

así, si $r \neq 1$:

$$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Si $|r| < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}.$$

Luego, si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie diverge.
Pregunta para el estudiante: ¿Qué sucede cuando $r = 1$ o $r = -1$? Debe convencerse que en esos casos también diverge (excepto cuando $a = 0$).

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Solución: observar que la serie es una serie geométrica con $a = 1/3$ y razón

$$r = \frac{1}{5}.$$

Como $|r| < 1$, la serie dada converge y, de hecho, converge a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5}{12}.$$

Combinación de series

Volviendo al contexto general de series, tenemos el siguiente resultado.

Teorema

Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ dos series convergentes. Entonces:

- La serie $\sum_n (a_n + b_n)$ converge a $\sum_n a_n + \sum_n b_n$.
- La serie $\sum_n (a_n - b_n)$ converge a $\sum_n a_n - \sum_n b_n$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_n (ka_n)$ converge a $k \sum_n a_n$.

Criterios de Convergencia

Como se mencionó en la clase anterior, en muy pocos casos es posible hallar una expresión de las sumas parciales de una serie. En vista de lo estudiado anteriormente, la serie geométrica es uno de esos casos.
Para la gran mayoría de las series, la convergencia se analiza mediante criterios. En este curso veremos los siguientes:

1. Criterio del término n-ésimo.
2. Criterio de la integral.
3. Criterio de comparación.
4. Criterio de la convergencia absoluta.
5. Criterio del cociente y la raíz.
6. Criterio de Leibnitz para series alternantes.

Los criterios nos ayudan a decidir si una serie converge o no, pero no nos dice cuál es el valor de la suma.

Criterio del término n-ésimo

Comenzamos con la siguiente observación: supongamos que la serie

$$\sum_n a_n$$

converge. Entonces se espera que a medida que n aumenta, los términos a_n que se están sumando sean cada vez más chicos (si no, no tendríamos *suma* finita). De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

La forma más útil del resultado anterior es la siguiente, que constuye su contrarrecíproco y que llamaremos **Criterio del término n-ésimo.**

Criterio del término n-ésimo

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.
Observación: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces no podemos emplear el criterio para decir que la serie dada converge o diverge. es necesario aplicar un criterio diferente.

Criterio de la integral

Criterio de la integral

Sea a_n una sucesión de términos positivos. Supongamos que:

$$a_n = f(n),$$

donde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función positiva, decreciente y continua para todo $x \geq 1$. Entonces:

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Ejemplo: series p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

Cuando $p = 1$, se obtiene la serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Nota: El criterio de la integral se probará en la última clase.

Teorema de comparación de series

Sean a_n, b_n y c_n sucesiones de términos no negativos. Supongamos que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \qquad \text{para todo } n \geq 1. \tag{1}$$

Entonces:

- Si $\sum_n c_n$ converge, entonces $\sum_n b_n$ converge.
- Si $\sum_n a_n$ diverge, entonces $\sum_n b_n$ diverge.

Ejemplo: determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ converge o diverge.
Observación: el criterio de comparación se utiliza para series de términos no negativos.

Convergencia absoluta

- Decimos que una serie $\sum_n a_n$ converge absolutamente si:

$$\sum_n |a_n|$$

es una serie convergente.

Criterio de la convergencia absoluta

Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$.

Criterio de la razón

Cuando los términos de una serie contienen potencias n'-ésimas o factoriales, el siguiente criterio es muy útil.

Criterio de la razón

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide.

Mostrar por qué el criterio no decide en el último caso.
Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n}$.

Criterio de la raíz

Alternativamente al criterio del cociente, también se puede utilizar el siguiente criterio cuando aparecen potencias n-ésimas en la expresión de los a_n.

Criterio de la raíz

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no es concluyente.

Mostrar por qué el criterio no decide en el último caso.
Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$.

Criterio de Leibniz

Cuando la serie considerada tiene términos que alternan en signos, el siguiente criterio es de gran utilidad.

Criterio de Leibniz

Sea la siguiente serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots .$$

Entonces esta serie converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Todos los términos u_n son positivos.
- u_n es una sucesión decreciente.
- $u_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Criterio de Leibniz

El criterio de Leibniz también se aplica si la serie está escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n., \quad o \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n.$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.