# Análisis Matemático I
# Clase 22: Series de Taylor

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Junio, 2023

**Objetivo:** dada una función $f$ y un punto $a$ en el interior del dominio de $f$, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de $f$ cerca de $a$.

**Objetivo:** dada una función $f$ y un punto $a$ en el interior del dominio de $f$, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de $f$ cerca de $a$.

Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de $f$ en $a$. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando $x$ tiende a $a$. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en $x$ particulares, derivación, integración, etc.).

**Objetivo:** dada una función $f$ y un punto $a$ en el interior del dominio de $f$, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de $f$ cerca de $a$.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de $f$ en $a$. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando $x$ tiende a $a$. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en $x$ particulares, derivación, integración, etc.).
**¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de $f$ aumentando el grado del polinomio de aproximación?**

**Ejemplo**: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

**Ejemplo**: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón $x$ y primer término 1.

# Series de Taylor

**Ejemplo**: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón $x$ y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

# Series de Taylor

**Ejemplo**: sea
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón $x$ y primer término 1. Así:
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$
La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.
Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:
$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$
$$\vdots$$

En general, la suma parcial n-ésima será:

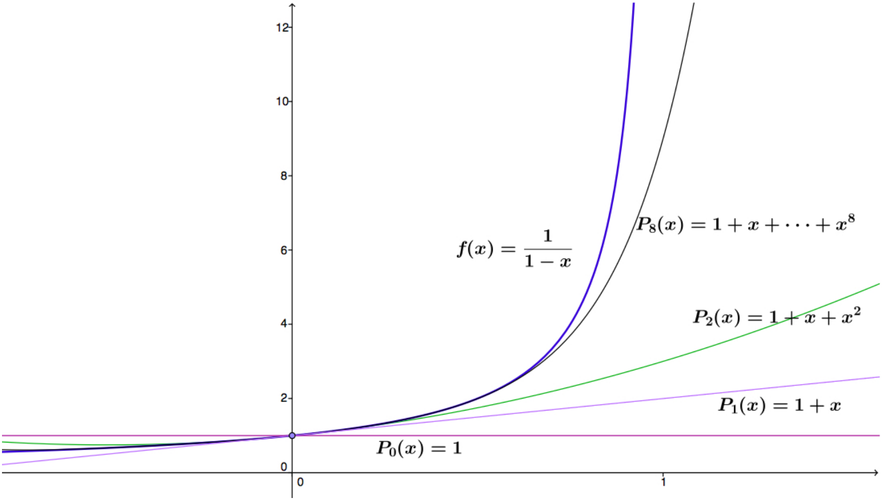
$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \qquad |x| < 1.$$

Así, a medida que $n$ es mayor, el polinomio $P_n$ aproxima mejor a $f$ cerca de $a = 0$.

# Series de Taylor



# Series de Taylor

A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función $f$ y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en $a$ generada por $f$.

# Series de Taylor

A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función $f$ y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en $a$ generada por $f$.
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en $a$ hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de $f$ cerca del punto $a$.

# Series de Taylor (dejarlo para el final de la clase)

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

# Series de Taylor (dejarlo para el final de la clase)

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Entonces necesariamente:

$$a_0 = f(a) = f^{(0)}(a) \qquad (\text{convención } f^{(0)} = f).$$

Si derivamos $f$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

y entonces:

$$a_1 = f'(a).$$

Si volvemos a derivar:

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2.a_3(x-a) + \cdots$$

y así

$$f^{(2)}(a) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

La derivada de orden 3 de $f$ es:

$$f^{(3)}(a) = 3.2a_3 + \text{términos que dependen de } (x-a),$$

y:

$$f^{(3)}(a) = 3.2.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

y en general los coeficientes de la serie $f$ en potencias de $(x-a)$ son:

$$f^{(n)}(a) = n!.a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n = 0, 1, \ldots$$

## Serie de Taylor generada por una función

Sea $f$ una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo $I$ que contiene a un punto $a$. Entonces, la serie de Taylor generada por $f$ y centrada en el punto $a$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad x \in I.$$

Escribimos:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función $f$, centrada en $a$, se llaman polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Ejemplo:** mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando el criterio del cociente, comprobar que esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ (es decir, el radio de convergencia es $R = +\infty$).

**Solución:** vamos a calcular los coeficientes de la serie de Taylor generada por la función exponencial en $a = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ y entonces:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Además, $f'(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$ y entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ para todo } n.$$

Así

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

# Series de Taylor

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Por lo tanto
$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
En cuando a la convergencia de la serie, aplicamos criterio del cociente:
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \text{para todo } x,$$
donde hemos usado:
$$(n+1)! = (n+1).n!$$
para simplificar la expresión:
$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$
Así, como $\rho = 0 < 1$, por el criterio del cociente obtenemos que la serie de Taylor generada por $y = e^x$ converge para todo $x$. **Esto no significa necesariamente que converge a la función exponencial. Para comprobar eso, hay que hacer un análisis diferente.**

**Pregunta: ¿podemos asegurar que**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}? \textbf{ Es decir ¿} \lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x?$$

La respuesta a esta pregunta la veremos un poco más adelante. Sin embargo, observar que si tomamos los primeros polinomios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

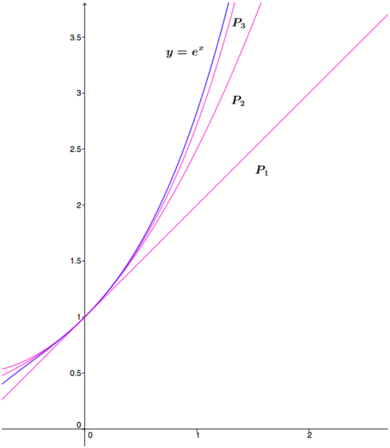
$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

y los graficamos:

# Aproximación de $y = e^x$ mediante los polinomios de Taylor




se obtiene que a medida que n aumenta, los polinomios $P_n$ son cada vez más parecidos a $e^x$, es decir, conjeturamos que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x$ para todo $x$.

Como otra evidencia, comparamos los valores de la función exponencial con el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0:

| $x$ | $-1.0$ | $-0.2$ | $-0.1$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | 0.3679 | 0.81873 | 0.904837 | 1 | 1.105171 | 1.22140 | 2.7183 |
| $P_3(x)$ | 0.3333 | 0.81867 | 0.904833 | 1 | 1.105167 | 1.22133 | 2.6667 |

Analizaremos ahora el problema de la convergencia de series de Taylor a la función que la genera.

# Convergencia de series de Taylor

**Teorema**

Si $f$ tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo $I$ que contiene a un punto $a$ en su interior, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $c_n$ entre $a$ y $x$ tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Nota:** el término:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se denomina residuo o resto de orden $n$.

# Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $c_n$ entre $a$ y $x$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde $P_n$ es el polinomio de Taylor centrado en $a$ de $f$ y $R_n$ es el residuo de orden $n$.

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $c_n$ entre $a$ y $x$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde $P_n$ es el polinomio de Taylor centrado en $a$ de $f$ y $R_n$ es el residuo de orden $n$.
Recordemos que para obtener:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

las sumas parciales de la serie de Taylor deben converger a $f(x)$. Es decir, se debe tener:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

En vista del teorema anterior, esto sucede si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

# Convergencia de series de Taylor

## Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada $x$ de un intervalo $I$ que contiene a $a$, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en $a$ generada por $f$ converge a $f$ en $I$ y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Ejemplo 1:** demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

### Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada $x$ de un intervalo $I$ que contiene a $a$, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en $a$ generada por $f$ converge a $f$ en $I$ y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Ejemplo 1:** demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Solución.** anteriormente se obtuvo que:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada $x$ y cada $n$, existe $c_n$ entre $a = 0$ y $x$ tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:

# Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada $x$ y cada $n$, existe $c_n$ entre $a = 0$ y $x$ tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces

$$e^x = e^0 = 1 \quad \text{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \quad \text{cuando } x = 0.$$

# Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada $x$ y cada $n$, existe $c_n$ entre $a = 0$ y $x$ tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces

$$e^x = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \quad \text{cuando } x = 0.$$

-Supongamos que $x > 0$. Entonces $c_n$ también es positivo y además $c_n < x$. Como la función exponencial es creciente, obtenemos:

$$e^{c_n} < e^x.$$

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dado que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0 \quad \left(\text{Aquí usamos: } \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \,\forall\, x\right)$$

obtenemos por el Teorema de la Compresión para sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{para toda } x > 0. \tag{1}$$

Finalmente, utilizando la siguiente propiedad válida para toda sucesión $a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Así, podemos concluir a partir de (1) que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para toda } x > 0. \tag{2}$$

-Finalmente, supongamos que $x < 0$. Entonces $c_n < 0$ y como la función exponencial es creciente se tiene:

$$e^{c_n} < e^0 = 1.$$

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Con lo cual se obtiene como antes:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para toda } x < 0.$$

En conclusión, para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

-Finalmente, supongamos que $x < 0$. Entonces $c_n < 0$ y como la función exponencial es creciente se tiene:

$$e^{c_n} < e^0 = 1.$$

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Con lo cual se obtiene como antes:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para toda } x < 0.$$

En conclusión, para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Más ejemplos se verán la próxima semana.