Análisis Matemático I
Clase 23: Series de Taylor (Continuación)

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2023

Ejemplo 2: demuestre $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: demuestre $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: primero vamos a generar la serie de Taylor centrada en 0 de $f(x) = sen(x)$. Calculamos las derivadas f en $x = 0$:

$$f(x) = sen(x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1,$$

$$f^{(2)}(x) = -sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = -cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1, \text{ y en general tenemos:}$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{si } n \text{ es par}$$

mientras que cuando n es impar, es decir, de la forma $n = 2k + 1$, $k = 0, 1.2....$ se tiene:

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Por ende, los únicos términos que aparecerán en la serie en Taylor son los correspondientes a n impar:

$$sen(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Convergencia de series de Taylor

A continuación, probaremos que la serie de Taylor converge a la función *sen* para todo x. Vamos a verificar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x}$$

donde el residuo es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con c_n entre x y 0. Observar que en la expresión del residuo no se descartan las derivadas de orden pares (que son nulas cuando se las evalúa en cero) porque podrían ser distintas de cero al evaluarlas en c_n.

Para probar que el residuo tiende a cero cuando n tiende a infinito, acotamos las derivadas de *sen* de la siguiente manera:

$$|f^{(n+1)}(c_n)| \leq 1$$

ya que las derivadas de *sen* son las funciones *cos* o *sen* (multiplicadas por -1 eventualmente) y por ende no superan el valor 1 en valor absoluto.

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c_n)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dado que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{para todo x}$$

se tiene por el Teorema de la Compresión que:

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{para todo x.}$$

Así, utilizando nuevamente la propiedad:

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

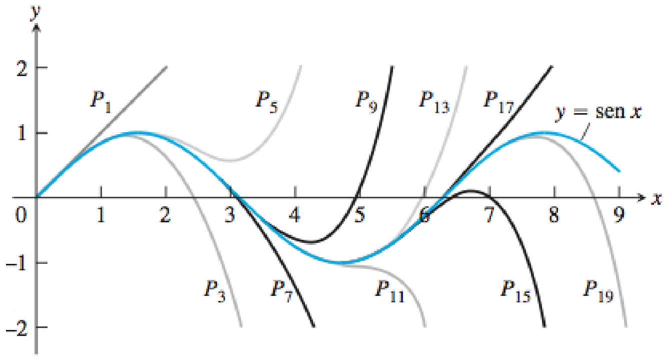
se obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x.}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{para todo x.}$$

La siguiente figura muestra a $f(x) = sen(x)$ con algunos polinomios de Taylor:



Derivación de series de Taylor

Teorema de derivación de series de Taylor

Supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

para $|x-a| < R$. Entonces f es derivable en $(a-R, a+R)$ y además:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

para todo x que cumpla $|x-a| < R$.

El teorema anterior afirma que una serie de Taylor se puede derivar término a término en el intervalo de convergencia y que la serie resultante converge, al menos, en el mismo intervalo que la serie original.

Ejemplo 3: en el ejemplo 2 se probó que

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Si derivamos obtenemos:

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

donde hemos usado $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$ para simplificar.
Así, el radio de convergencia de la serie a la función coseno es $R = +\infty$ y el intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$. Hemos deducido una representación en serie de Taylor centrada en 0 para la función *coseno*.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $x = 0$ a la función:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $x = 0$ a la función:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Solución: si buscamos una antiderivada de f obtenemos

$$F(x) = \frac{1}{1-x},$$

cuya expresión puede vincularse a la suma de una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Luego,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{si } |x| < 1.$$

Para obtener una expansión en serie de Taylor para f derivamos F y utilizamos el teorema de derivación de series de Taylor:

$$f(x) = F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \text{si } |x| < 1.$$

Observar que el primer término de la expansión de F se anula al derivar y que el intervalo de convergencia en la expansión de f se mantiene gracias al teorema de derivación de series de Taylor.

Teorema de integración de series de Taylor

Supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

para $|x-a| < R$. Entonces:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$$

para todo x que cumpla $|x-a| < R$.

El teorema anterior afirma que una serie de Taylor se puede integrar término a término en el intervalo de convergencia y que la serie resultante converge, al menos, en el mismo intervalo que la serie original.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.
Solución: Observar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

siempre que $|x| < 1$.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.
Solución: Observar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

siempre que $|x| < 1$. Integrando ambos miembros y utilizando el Teorema de integración de series de Taylor:

$$ln(1+x) + C = \int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{siempre que } |x| < 1.$$

Para encontrar el valor de C tomamos el valor $x = 0$ y obtenemos $C = 0$.
El radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia $(-1, 1)$.

Métodos para obtener la convergencia de una serie de Taylor a la función que la generó:

- Para funciones como $y = e^x$, $y = cos(x)$ o $y = sen(x)$, el procedimiento para obtener la convergencia de series de Taylor a la función dada es primero generar la serie y luego estudiar el residuo para comprobar que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Métodos para obtener la convergencia de una serie de Taylor a la función que la generó:

- Para funciones como $y = e^x$, $y = cos(x)$ o $y = sen(x)$, el procedimiento para obtener la convergencia de series de Taylor a la función dada es primero generar la serie y luego estudiar el residuo para comprobar que tiende a cero cuando n tiende a infinito.
- Para otras funciones, como $y = ln(1+x)$, $y = tan^{-1}(x)$ o $y = 1/(1+x)$, se busca encontrar una relación con la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

La relación puede ser directa como para $1/(1+x)$ (donde $a = 1$ y $r = -x$) obteniéndose la igualdad:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

Y en otros casos se debe derivar o integrar y aplicar el teorema de integración o derivación de series de Taylor como se hizo en el ejemplo de la diapositiva anterior.