Análisis Matemático I
Clase 24: Cálculo con curvas paramétricas. Cierre del curso

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2023

Introducción al Cálculo Vectorial

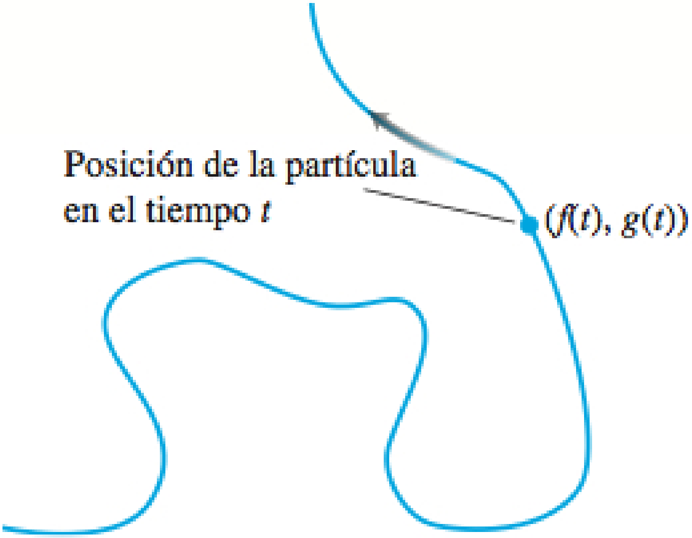
Definición de una curva plana

Sean $f = f(t)$ y $g = g(t)$ funciones continuas de t en un intervalo I. Entonces las ecuaciones:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t), \qquad t \in I$$

se denominan ecuaciones paramétricas y se dice que t es el parámetro. El intervalo I se denomina dominio paramétrico. El conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ cuando t varía en el intervalo I es el gráfico de las ecuaciones paramétricas. Las ecuaciones paramétricas junto al gráfico de dichas ecuaciones se denomina curva plana.


Posición de la partícula
en el tiempo t
$(f(t), g(t))$

Ejemplo 1: determine ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio unidad y centrada en el origen.

Ejemplo 2: la posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = \sqrt{t}, \qquad y(t) = t, \qquad t \geq 0.$$

Identifique la curva plana.

Ejemplo 3: determine las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y su vector director es $(-1, -2)$.

Cálculo con curvas paramétricas

Definición de curva suave

Un curva C representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para $t \in I$, se dice que es suave si f' y g' existen, son continuas en I y no son simultáneamente nulas en I.

Intuitivamente, una curva es suave si es posible definir un vector velocidad no nulo en cada punto de la trayectoria.

Un lugar geométrico puede tener más de una representación paramétrica. Por ejemplo, considere las siguientes curvas planas:

- $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = t^3$, $y(t) = t^6$, $t \in \mathbb{R}$.

Observar que la primera curva es suave y la segunda no lo es.

Longitud de una curva plana en forma paramétrica

Longitud de una curva plana en forma paramétrica

Sea C una curva suave, representada por las ecuaciones:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad t \in [a, b]$$

tal que C se recorre una vez conforme t varía de $t = a$ a $t = b$. Entonces la longitud de la curva C es:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Ejemplo: determine la longitud de la curva: $x(t) = r.cos(t)$, $y(t) = r.sen(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Cierre del Curso

Calendario 2023

Abrir archivo .pdf. Semana del 21 de Junio: consultas normales.
Explicar mesas y consultas pre examen.

1. Las mesas de Análisis Matemático suelen ser los lunes.
2. Consultar en sección alumnos los periodos de inscripción para cada turno.
3. Ya se han entregado las regularidades de los alumnos que se encuentran regulares.

Condiciones de Regularidad:
Un alumno queda en condición regular si aprueba los dos exámenes parciales en alguna de sus instancias. Un alumno que no logre aprobar por lo menos uno de ellos utilizando todas las instancias, queda en condición de libre.

Examen final:

La metodología y extensión del examen final se distingue en función de la condición de regularidad de los alumnos. Es requisito para acceder al examen final (alumnos 2023) traer en papel el problema aplicado seleccionado resuelto (tanto para las ingenierías como para la licenciatura)

Examen final:

La metodología y extensión del examen final se distingue en función de la condición de regularidad de los alumnos. Es requisito para acceder al examen final (alumnos 2023) traer en papel el problema aplicado seleccionado resuelto (tanto para las ingenierías como para la licenciatura)

- Alumno regular: rinde primero un examen escrito teórico-práctico que consta de un total de 100 puntos. La temática del examen se basa en la totalidad del programa de la asignatura. Debe aprobarse con un mínimo de 60 puntos para pasar a la instancia oral. En el examen oral se puede tomar la explicación de los problemas aplicados o contenidos dados durante el curso (uno o más temas).

  La nota final del alumno regular (que haya aprobado el examen final) en la asignatura será obtenida como sigue:

  0.20 x (promedio nota parciales o recuperatorios)+ 0.80(nota examen final)

Examen final:

La metodología y extensión del examen final se distingue en función de la condición de regularidad de los alumnos. Es requisito para acceder al examen final (alumnos 2023) traer en papel el problema aplicado seleccionado resuelto (tanto para las ingenierías como para la licenciatura)

- Alumno regular: rinde primero un examen escrito teórico-práctico que consta de un total de 100 puntos. La temática del examen se basa en la totalidad del programa de la asignatura. Debe aprobarse con un mínimo de 60 puntos para pasar a la instancia oral. En el examen oral se puede tomar la explicación de los problemas aplicados o contenidos dados durante el curso (uno o más temas).

  La nota final del alumno regular (que haya aprobado el examen final) en la asignatura será obtenida como sigue:

  0.20 x (promedio nota parciales o recuperatorios)+ 0.80(nota examen final)

- Alumnos libre: la diferencia está en la extensión del examen escrito. La metodología es similar a la del alumno regular. La nota final del alumno libre será la nota obtenida en el examen final.

- Aquel alumno que no haya rendido los dos exámenes parciales durante el cursado quedará en condición **Abandonó** y no podrá acceder al examen final.

Para examen final:

- Funciones (Capítulo 1): definición como conjunto de pares ordenados, tipos de funciones, simetría, dominio, imagen, funciones crecientes y decrecientes. Operaciones con funciones. Ejemplos: polinómicas, trigonométricas, racionales.
- Límites y continuidad: definición de tasa de cambio promedio, interpretación geométrica. Límite trigonométrico:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta}.$$

  Teorema de la Compresión (**sin demostración**). Límites laterales. Definición de continuidad (en puntos, intervalos abiertos y cerrados). Propiedades de funciones continuas: suma, resta, multiplicación y división (**sin demostración**). Composición de funciones continuas (**sin demostración**).

- Discontinuidad. Tipos de discontinuidad. Teorema del Valor intermedio (**sin demostración**) y consecuencias. Definiciones de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
- Derivadas (Capítulo 3): definiciones de pendiente de una curva, tasa de cambio instantánea y de derivada. Interpretación geométrica. Definición de recta tangente. Derivadas laterales. Teorema: derivabilidad implica continuidad (**con demostración**). Reglas de derivación (**sin demostración**). Derivadas de funciones trigonométricas. Derivada del seno, coseno y tangente (**las tres con demostración**). Regla de la cadena (**sin demostración**). Derivación implícita y tasas relacionadas. Definición de linealización e interpretación geométrica. Definición de diferenciales e interpretación geométrica.

Para examen final:

- Capítulo 4: máximos y mínimos (locales y absolutos). Teorema de las valores extremos para funciones continuas (**sin demostración**). Puntos críticos. Procedimiento para encontrar extremos absolutos en intervalos cerrados. Teorema de Rolle (**sin demostración**). Teorema del Valor Medio (**con demostración**). Consecuencias (**la segunda con demostración**). Criterio de la primera derivada para funciones crecientes y decrecientes (**con demostración**). Concavidad. Punto de inflexión. Criterio de la derivada segunda para extremos (**sin demostración**). Trazado de gráficas y problemas de optimización. Antiderivadas. Teorema: dos antiderivadas de una misma función difieren en una constante (**con demostración**).

- Capítulo 5 y 6: Integral definida. Definición. Particiones y sumas de Riemann. Cálculo de integrales utilizando la definición. Interpretación geométrica y propiedades. Teorema del valor medio para integrales (**sin demostración**). Teorema fundamental del cálculo, primera y segunda parte (**con demostración**). Método de sustitución. Aplicaciones de la integral: Cálculo de áreas entre curvas, cálculo de volúmenes por medio de secciones transversales, método de discos, arandelas y cascarones, longitud de curvas (**todos con deducción de las fórmulas, menos cascarones**), y áreas de superficies de revolución **(sin deducción)**. Aplicaciones: trabajo de una fuerza variable y fuerza sobre placas (**todos con deducción de las fórmulas, sólo para ingenierías**).
- Capítulo 7: funciones inversas. Derivación de funciones inversas (**deducción utilizando regla de la cadena**). Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas. Sus derivadas e integrales (**con demostración**), concentrarse en *ln*, e^x, a^x, *sen*, *cos*, , sus inversas y las hiperbólicas *senh*, *cosh*, y sus inversas. Regla de L'Hopital (como está en las diapositivas, **sin demostración**). Razones relativas de crecimiento (para Licenciatura).

- Capítulo 8: Integración por partes (**con deducción**). Saber los procedimientos para integrar funciones trigonométricas. Integrales impropias. Definición.
- Capítulo 10: sucesiones. Convergencia, gráficas y cálculo de límites. Sucesiones monótonas y acotadas, teorema (**sin demostración**). Series, definición. Serie geométrica, convergencia y divergencia. Deducción de la suma cuando converge. Criterio del término n-ésimo (**sin demostración**). Criterio de la integral (**sin demostración**). criterio de comparación (**sin demostración**). Criterios de la razón y Criterio de la raíz (**sin demostración**.) Series alternantes y criterio de Leibniz (**sin demostración**). Criterio de la convergencia absoluta (**sin demostración**). Series de Taylor. Deducción de los coeficientes y Definición. Teorema de la convergencia de series de Taylor (**sin demostración**). Radio e intervalo de convergencia. Teorema de derivación e integración de series de Taylor (**sin demostración**).