

Nombre y apellido:.....

Legajo y carrera.....:

Examen Final: Alumno Libre  
Análisis Matemático I-FI-UNCUYO  
3 de Julio de 2023

**Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios** para obtener el puntaje completo. No se permite corrector, tache si es necesario. Desarrolle sus respuestas con letra clara. **Debe obtener un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen escrito.** TIENE 2 HORAS PARA DESARROLLAR EL EXAMEN.

Puntaje examen final= 0.5 (examen escrito) + 0.5 (examen oral).

(1) (10 pts.) Determine si la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(1+n)},$$

converge. Si utiliza algún criterio, enúncielo completo.

(2) (a) (5 pts.) Enuncie el Teorema del Valor Medio para derivadas

(b) (15 pts.) Demuestre el Teorema del Valor Medio.

(3) Desde un depósito cónico de concreto (con vértice hacia abajo) de altura 6 m y cuyo radio de la base es de 45 m, fluye agua a razón de  $50 \text{ m}^3/\text{min}$ .

(a) (10 pts.) ¿Con qué rapidez disminuye el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?

(b) (10 pts.) En ese momento, ¿cuál es la rapidez con que cambia el radio de la superficie del líquido en el tanque?

(4) (a) (5 pts.) Plantee una integral que permita determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje  $x$  la región acotada por el gráfico de la función  $f(x) = \sqrt{x}/(1+x)$ , la recta  $x = 1$  y el intervalo  $[1, 3]$ .

(b) (10 pts.) Calcule la integral anterior.

(c) (10 pts.) Si ahora el intervalo a considerar es de  $[1, +\infty)$ , plantee una integral para calcular el volumen y determine si converge o no.

(5) Grafique una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes características:

• (3 pts.)  $f' \geq 0$  en  $(-\infty, -2)$ ,  $f' \leq 0$  en  $(2, +\infty)$ .

• (3 pts.)  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -2)$ , cóncava hacia arriba en  $(-2, 0)$  y en  $(2, +\infty)$ .

• (3 pts.)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ .

• (3 pts.)  $f$  tiene una asíntota horizontal en  $y = 1$  y un punto crítico en  $x = -2$ .

• (3 pts.)  $f(-2) = 0$  y  $f'(0)$  no existe.

(6) (10 pts.) Desarrolle en serie de Taylor centrada en  $a = 0$  la siguiente función:

$$y = \arctan(x).$$

Dé explícitamente el intervalo y el radio de convergencia donde es válido el desarrollo.