UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE
INGENIERÍA

ROBOTICA I

UNIDAD III: Cinematica

Fundamentos
Matemáticos

Prof: Carolina Díaz

JTP: Eric Sanchez

Contenido UNIDAD 3

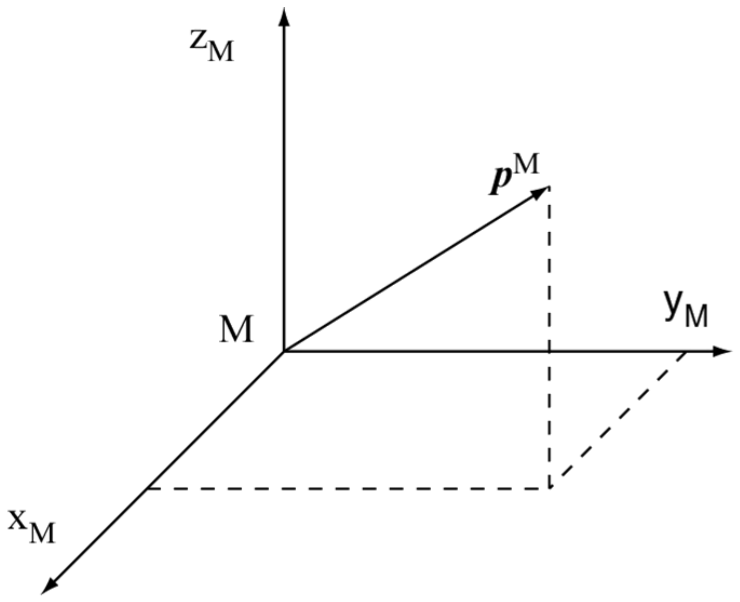
- Introducción repaso fundamentos matemáticos.
- Modelo cinemático directo Denavit Hartenberg .
- Modelo cinamático inverso.
- Cinemática del movimiento. Jacobiano. Singularidades.

- La manipulación de un objeto llevada a cabo por un robot implica un movimiento espacial de su extremo operativo.

- Para que el robot pueda acceder a un objeto es necesario saber la posición y orientación de la herramienta utilizada respecto del robot .

- Para esto se requieren de herramientas matemáticas que permiten especificar estas coordenadas, consideraremos que las piezas se pueden modelar como cuerpos rígidos, a los que se les puede asociar un sistema de referencia para conocer su posición y orientación.

Posición y Orientación en el espacio: cómos se define un punto en el espacio cartesiano 3D

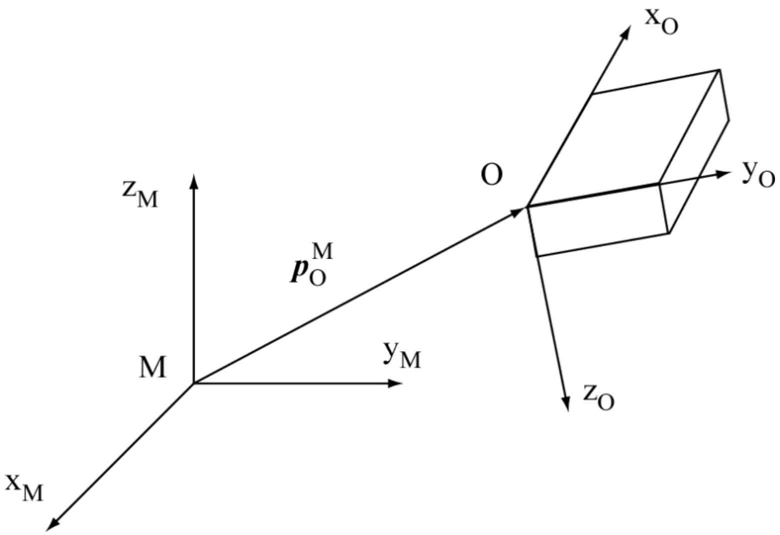


Vector p componentes

Punto P diferencias

Generalmente cuando hablamos del espacio tridimensional un punto P define una posición, mientras un vector p indica un desplazamiento

Posición y Orientación en el espacio: definir un objeto en el espacio 3D, posición y orientación del objeto

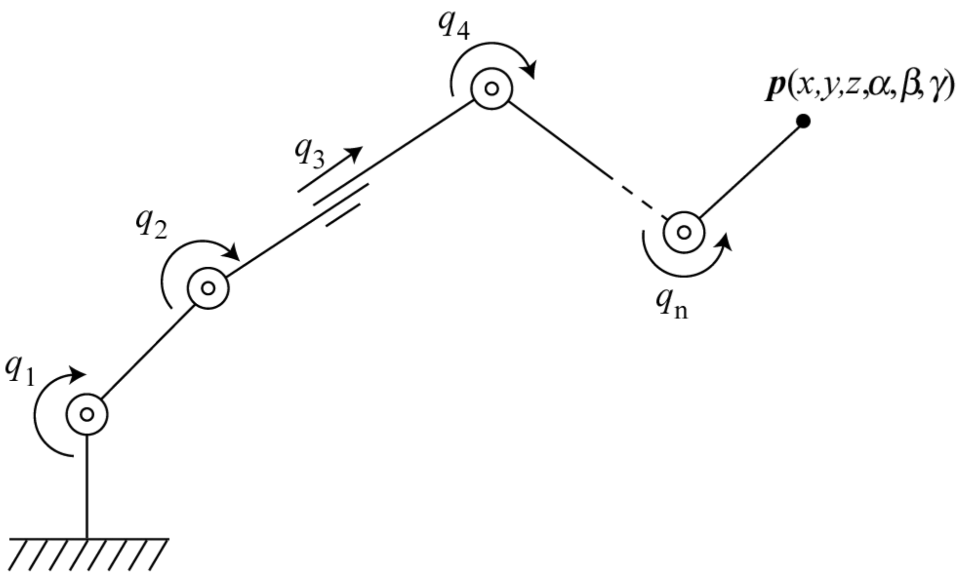


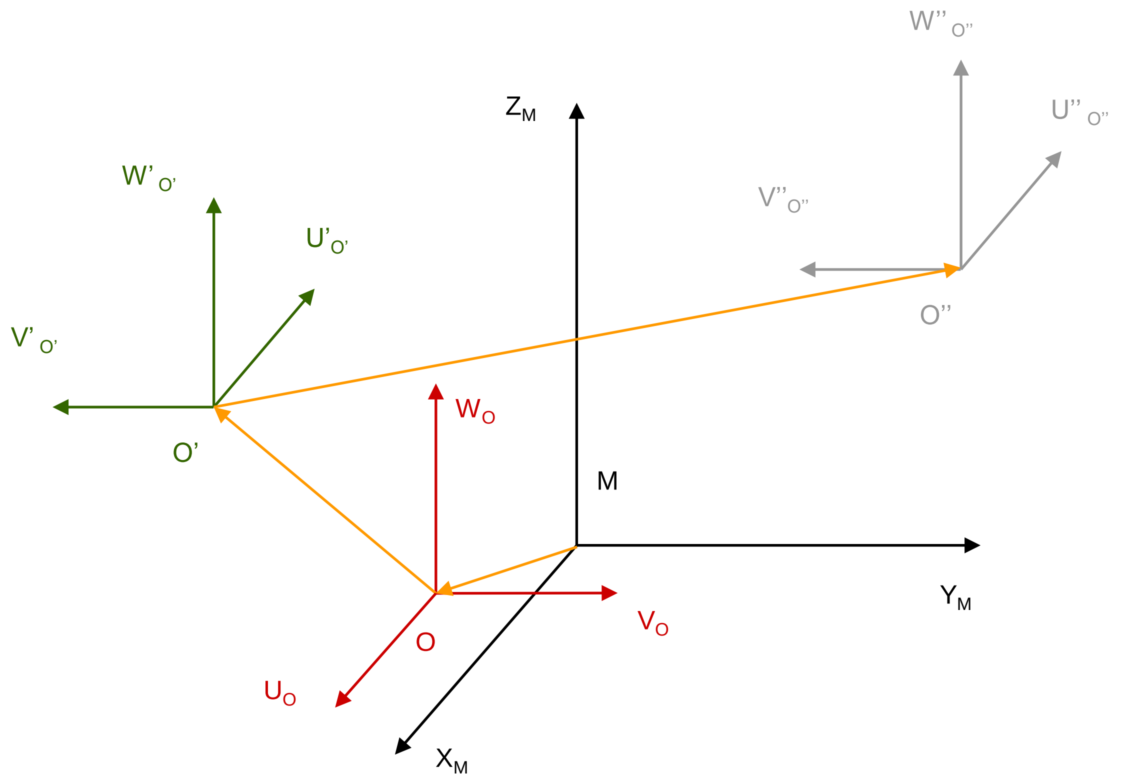
Traslación X, Y y Z {M}

Rotación X, Y y Z {M}

Traslación X, Y y Z {M} indica la posición del objeto respecto del sistema de coordenadas M, y la orientación se indica mediante el sistema de coordenadas propio de objeto y como este se encuentra rotado respecto en este caso al sistema {M}

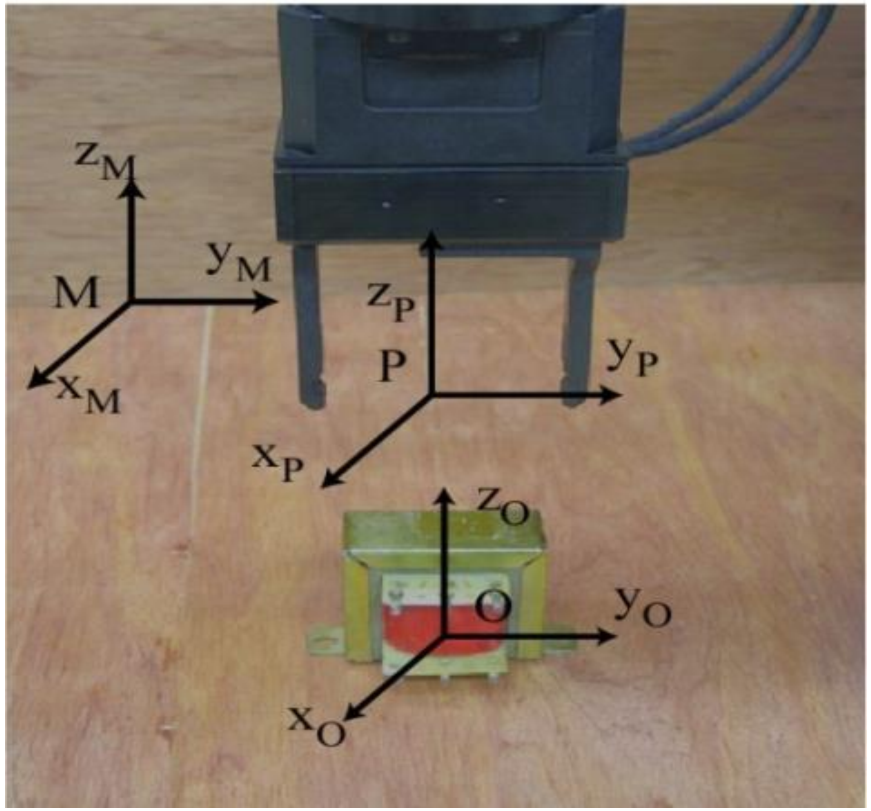
Posición y Orientación en el espacio: extremo operativo en el espacio tridimensional respecto base del robot

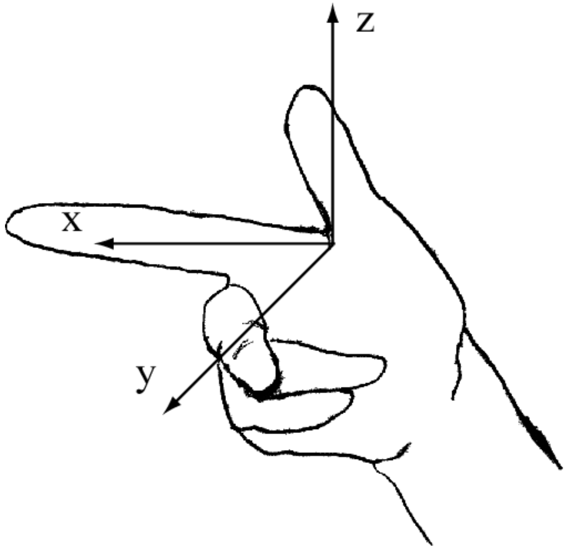




Posiciones en 3D y posiciones relativas

- Entonces consideraremos que las piezas se pueden modelar como cuerpos rígidos, con lo que se les puede asociar un sistema de referencia para conocer su posición y orientación.
- Se utilizaran sistemas de referencia dextrógiros asociados a cada cuerpo rígido.
- Regla de la mano derecha.





Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

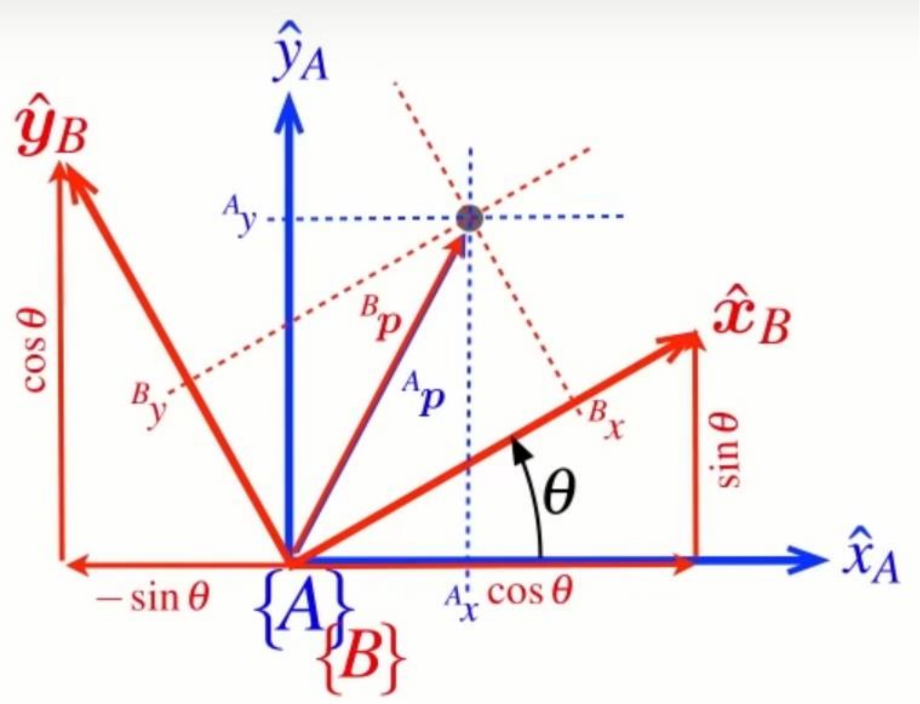
Matrices de rotación.

$$^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}x\,\hat{\boldsymbol{x}}_A + {}^{A}y\,\hat{\boldsymbol{y}}_A$$

$$^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}x\,\hat{\boldsymbol{x}}_B + {}^{B}y\,\hat{\boldsymbol{y}}_B$$

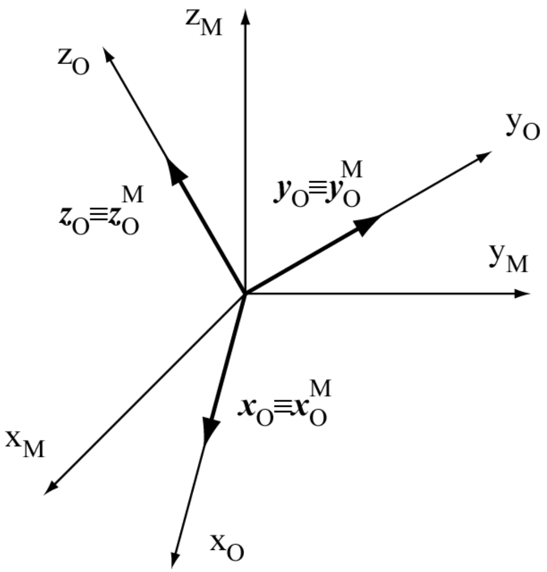
$$\hat{\boldsymbol{x}}_B = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_A + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_A$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_B = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_A + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_A$$



Matricez de rotación: los 9 elementos representan las proyecciones de los vectores unitarios $\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}$, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}$, $\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}$ sobre los ejes del sistema M, pudiéndose expresar por lo tanto como el producto escalar entre ellos y los vectores unitarios $\boldsymbol{x}_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{z}_{\mathrm{M}}$

$$
{}^{\mathrm{M}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} & \boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} & \boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{x}_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{x}_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} \\ \mathrm{y}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{y}_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{y}_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} \\ \mathrm{z}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{z}_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & \mathrm{z}_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} \end{bmatrix}
$$

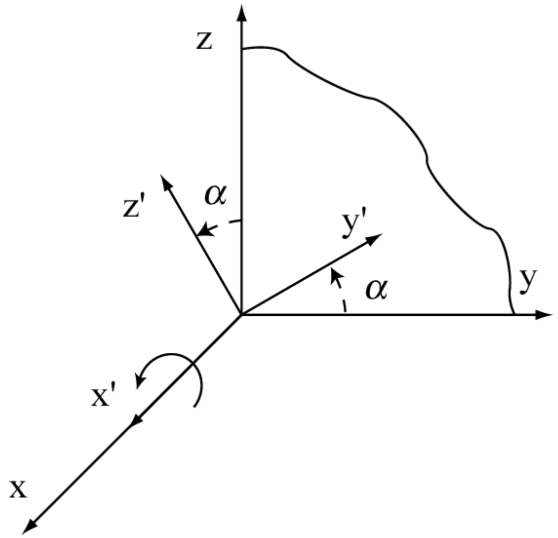


Propiedades

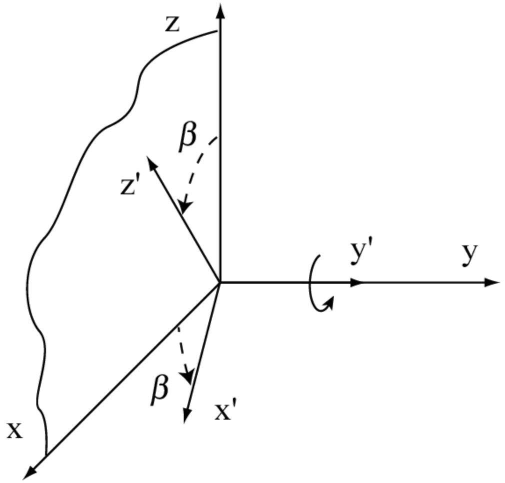
$$
\left({}^{\mathrm{M}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{O}}\right)^{\mathrm{T}} = \left({}^{\mathrm{M}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{O}}\right)^{-1} = \left({}^{\mathrm{O}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{M}}\right)
$$

$$
{}^{\mathrm{M}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{O}} \times {}^{\mathrm{O}}\mathbf{Rot}_{\mathrm{M}} = I
$$

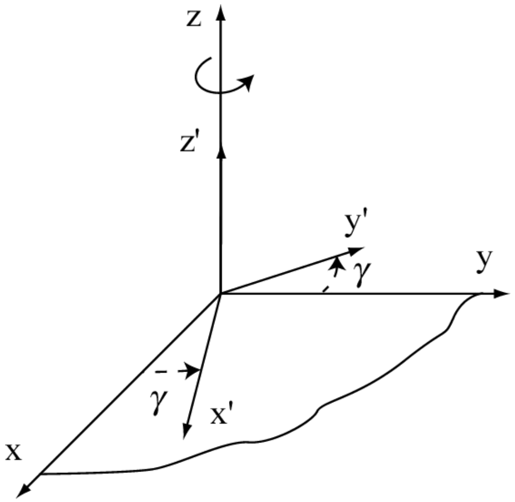
$$
\det(\mathbf{Rot}) = \pm 1
$$



$$\mathbf{Rot}(x,\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha\\ 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

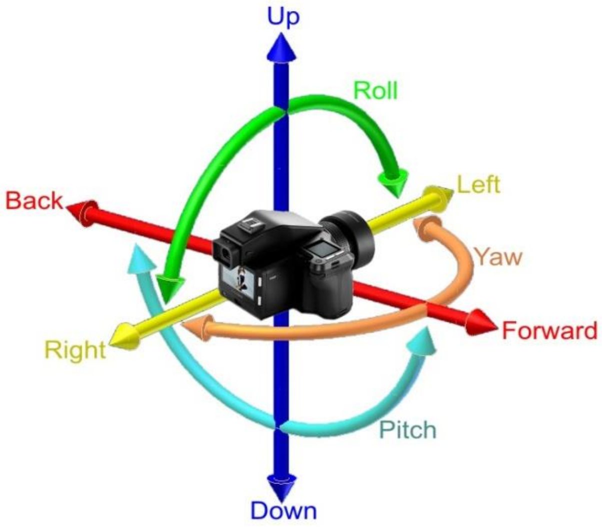


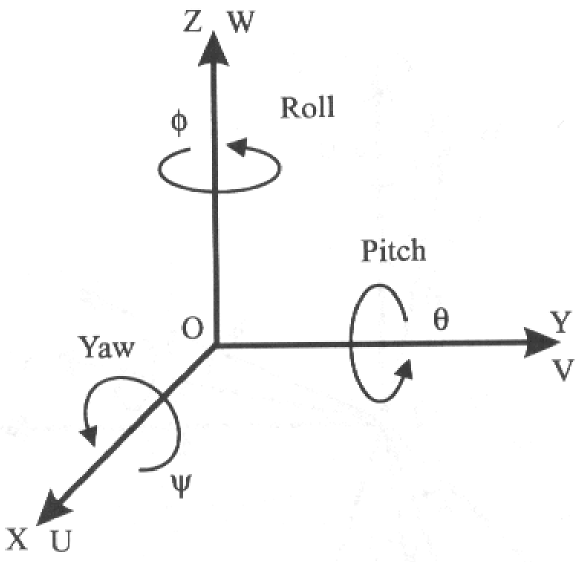
$$\mathbf{Rot}(y,\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \mathrm{sen}\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{sen}\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Rot}(z,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\mathrm{sen}\gamma & 0\\ \mathrm{sen}\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

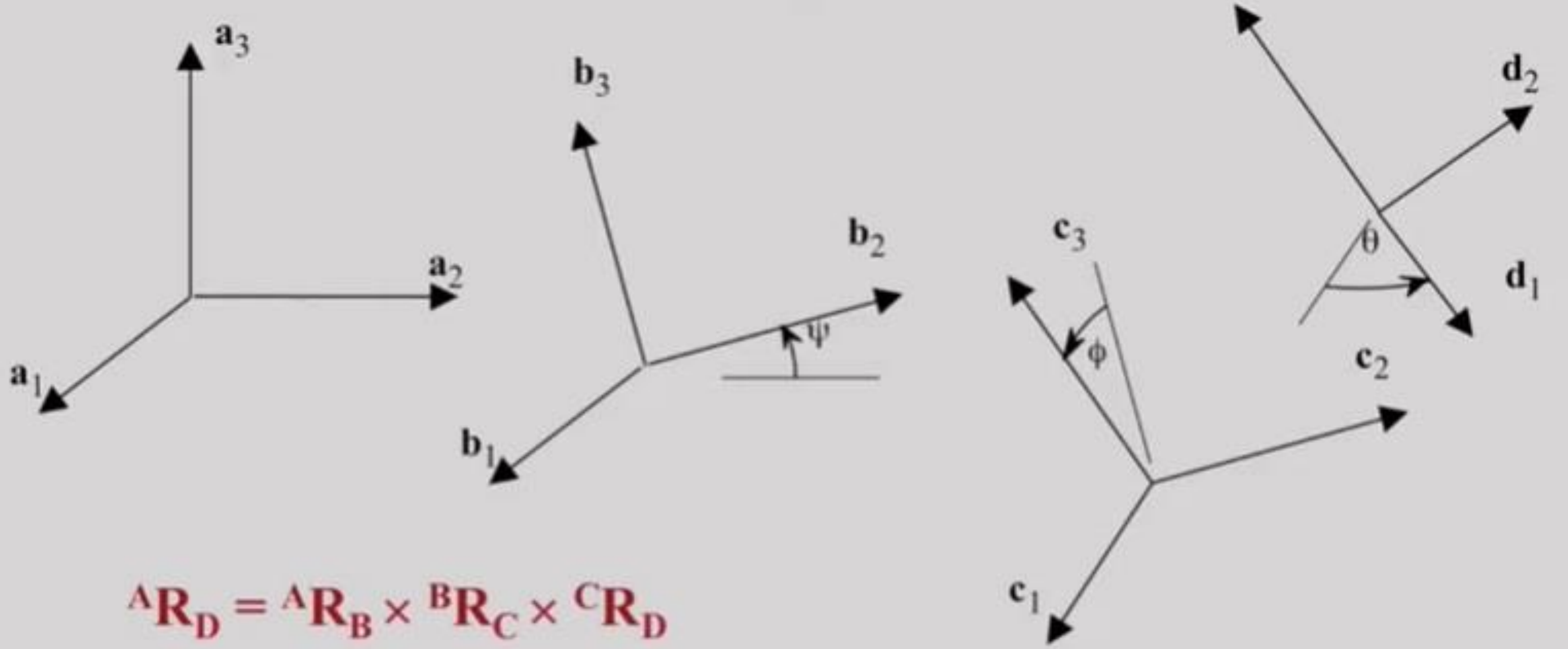
- Roll, pitch, yaw: ángulos respecto del sistema fijo XYZ. Estando OXYZ y OUVW inicialmente coincidentes se puede colocar OUVW en cualquier orientación siguiendo:
    - Girar el sistema OUVW un ángulo Ψ con respecto al eje OX.
      Es el denominado Yaw o guiñada
    - Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje OY.
      Es el denominado Pitch o cabeceo.
    - . Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ.
      Es el denominado Roll o alabeo.





https://luminous-landscape.com/the-phase-one-xf-story-past-present-future

Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación



$$^{A}R_{D} = {}^{A}R_{B} \times {}^{B}R_{C} \times {}^{C}R_{D}$$

$$^{A}R_{D} = \mathrm{Rot}(x, \psi) \times \mathrm{Rot}(y, \phi) \times \mathrm{Rot}(z, \theta)$$

roll *pitch* *yaw*

Fundamentos matemáticos: posición y orientación

Matrices y coordenadas homogéneas:

- Matriz de transformación homogénea. Representación de la posición y orientación de forma conjunta de un sistema de coordenadas.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & x_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & x_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & x_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \\ y_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & y_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & y_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & y_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \\ z_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & z_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & z_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}} & z_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propiedades:

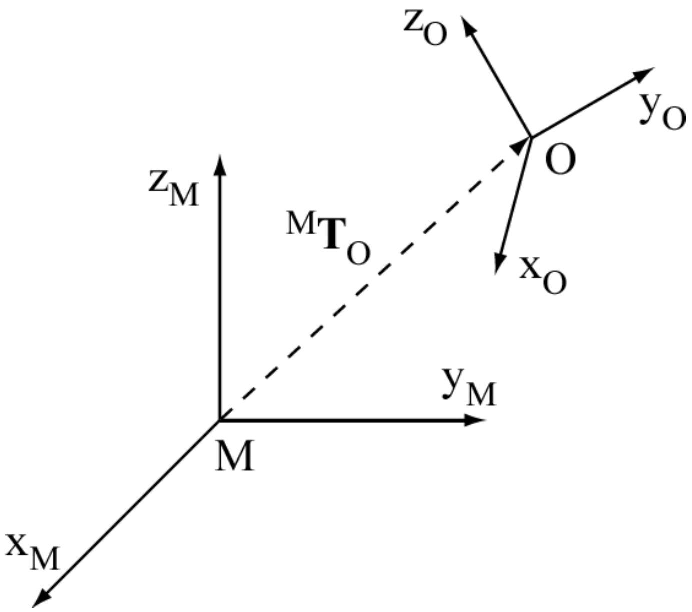
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Rotación}^{\mathrm{T}} & -\text{Rotación}^{\mathrm{T}} \cdot \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

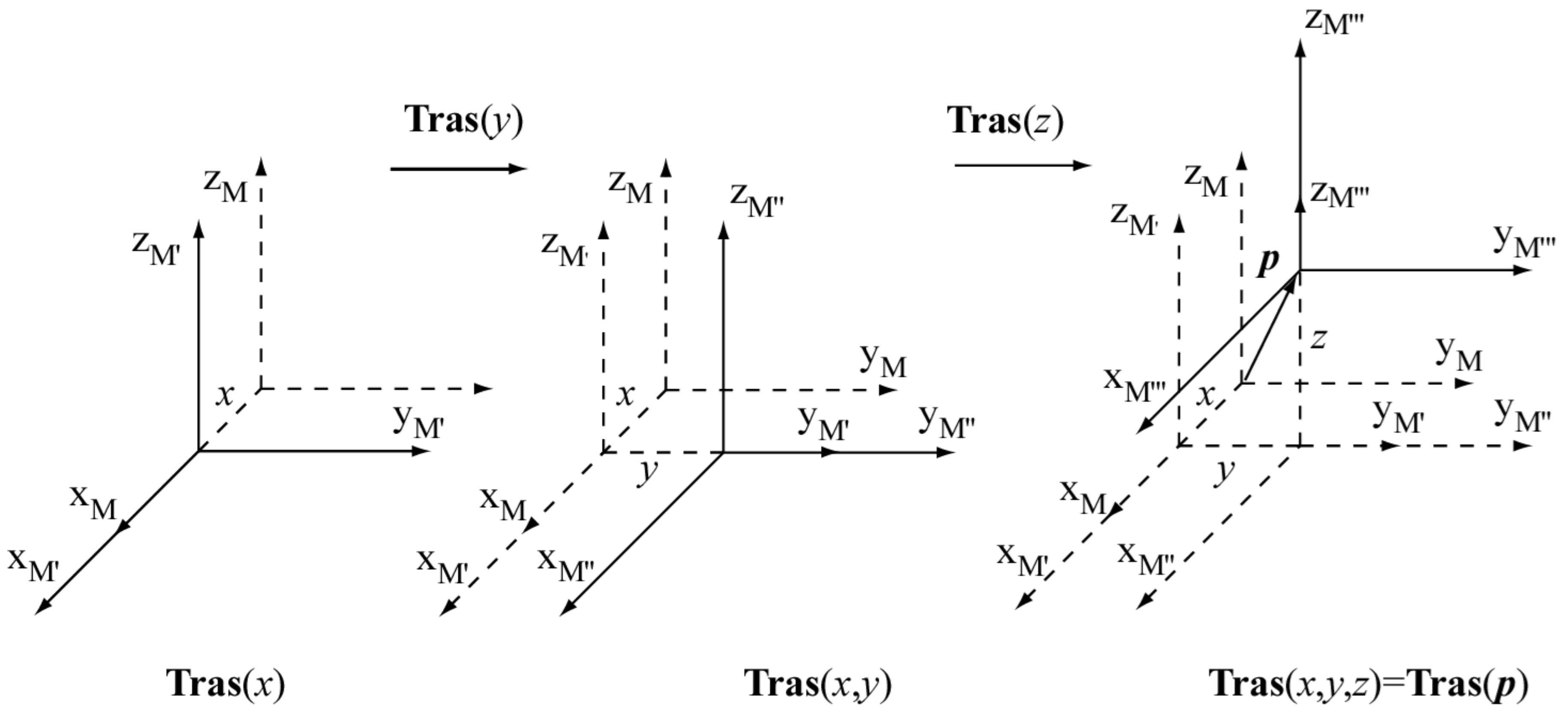
Las matrices homogéneas pueden emplearse para:

- Para representar la posición y orientación de un sistema O’UVW resultado de rotar y trasladar el sistema OXYZ según una matriz de traslación y rotación dadas.

$$ {}^{M}\mathbf{T}_{O} = \begin{bmatrix} {}^{M}\mathbf{Rot}_{O} & {}^{M}\mathbf{Tras}_{O} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$



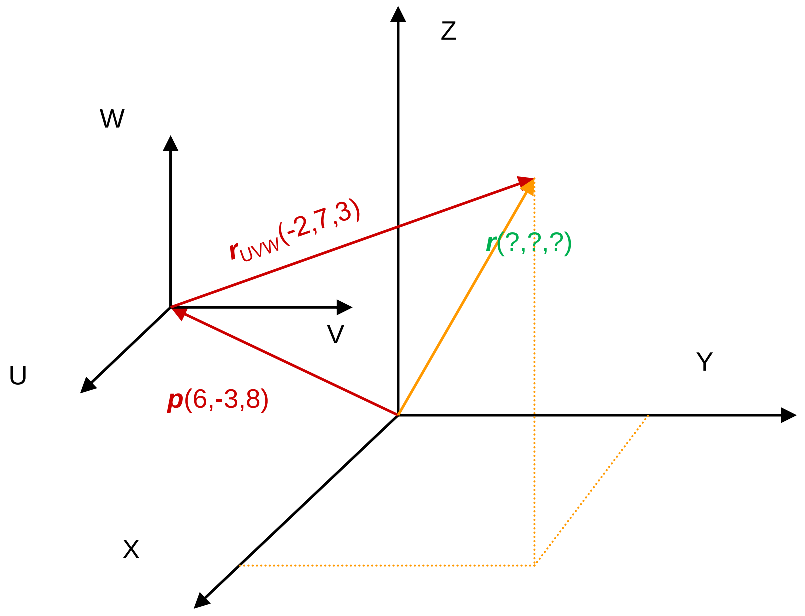
Fundamentos matemáticos: transformaciones básicas



$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x'} + x \\ p_{y'} + y \\ r_{z'} + z \\ 1 \end{bmatrix}$$

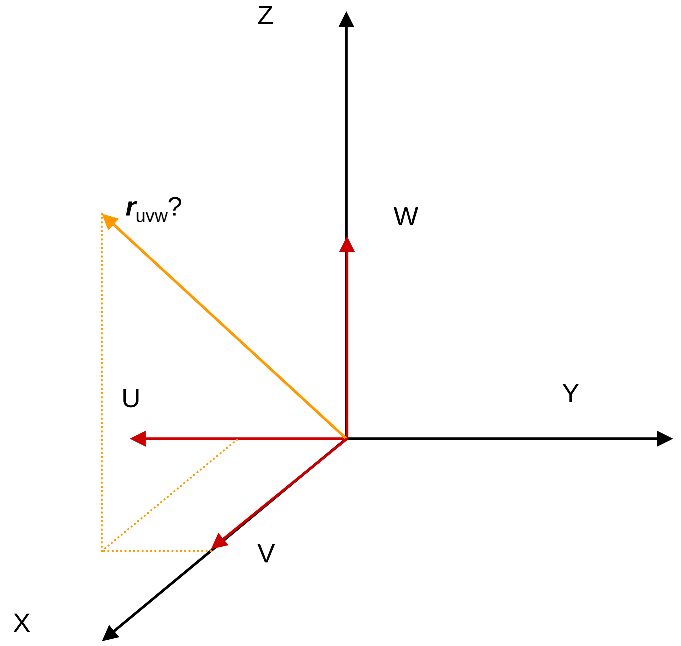
Ejemplo. El sistema O'UVW se encuentra trasladado un vector ***p***(6,-3,8) con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (r_x,r_y,r_z) del vector r cuyas coordenadas con respecto al sistema O'UVW son $\boldsymbol{r}_{UVW}$(-2,7,3).



$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. El sistema OUVW se encuentra girado -90º alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector $\boldsymbol{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\boldsymbol{r}_{uvw}$=(4,8,12).



$$\mathbf{Rot}(z,\gamma)=\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fuente: Gabriel J. García, UA.

Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

- Tener cuidado las operaciones matriciales no son conmutativas, no es lo mismo rotar y trasladar, que trasladar y luego rotar.

- Y siempre es importante tener en cuenta respecto de que sistemas me estoy moviendo, trasladando o girando.

- Generalmente en robótica referimos sistemas de coordenadas de referencias móviles a un sistema de referencia fijo.

Muchas Gracias por su atención.

¿Preguntas?