Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo

Primer examen parcial

1 de setiembre de 2023

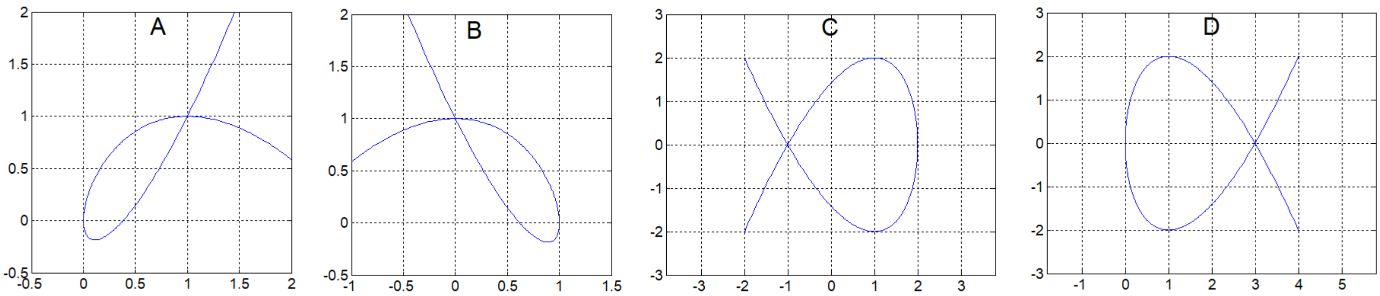
Nombre:..................

Legajo y Esp.:...........

INSTRUCCIONES: apague su teléfono; puede usar lápiz para trabajar pero debe escribir con tinta las respuestas; escriba con letra clara, no use corrector, tache si es necesario; justifique sus respuestas excepto en los casos en que se especifique lo contrario y deje anotados todos los cálculos que realiza; anote su nombre completo, legajo y especialidad. El examen se aprueba con 60 puntos. Tiene 2 horas.

1. Sea la trayectoria dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $t \in I$, para cierto $I \subset \mathbb{R}$.

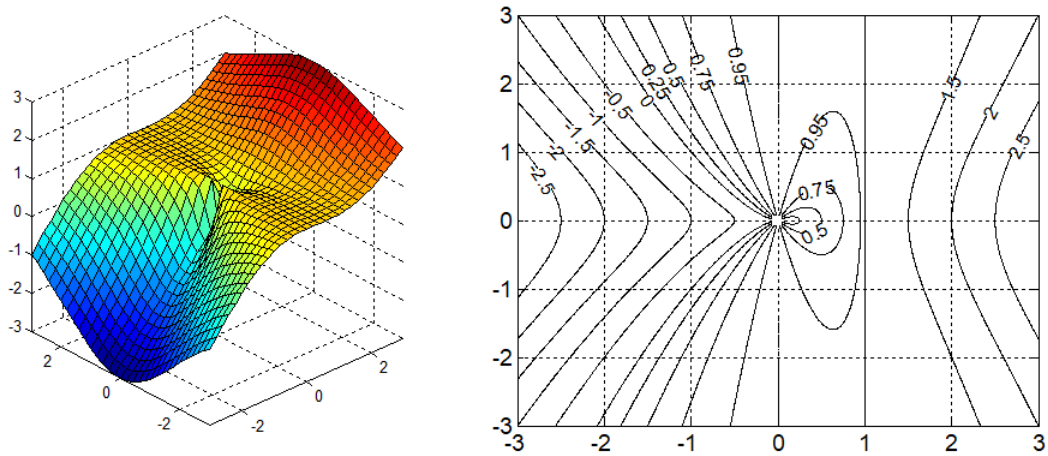
   a) (2 puntos) Indique cuál de los siguientes gráficos representa esta curva.



   b) (4 puntos) Indique para qué valores t_1 y t_2 del dominio de $\mathbf{c}$ se tiene $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$.

   c) (8 puntos) Halle $\mathbf{c}'(0)$ y $\mathbf{c}'(1)$ y represente estos dos vectores en el gráfico correspondiente.

2. Sea f la función dada por $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$. En la figura se presenta un gráfico de f junto a un diagrama con algunas curvas de nivel de f.



   a) (4 puntos) Indique cuál es el dominio de f (el máximo en el sentido de la inclusión).

   b) (6 puntos) Halle todos los puntos del dominio de f para los cuales $f(x,y) = 1$. Márquelos en el gráfico de curvas de nivel, si es posible; si no es posible, explique por qué.

   c) (6 puntos) Analice el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: si existe, indique el valor; si no existe, justifique.

   d) (4 puntos) Marque en el gráfico que considere apropiado el gradiente de f en el punto $(2,-2)$ (no importa la escala).

   e) (4 puntos) A partir de la información que le dan los gráficos, indique cuál será una dirección en que la derivada direccional de f en $(2,0)$ sea positiva.

3. Sea f la función dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2 y$.

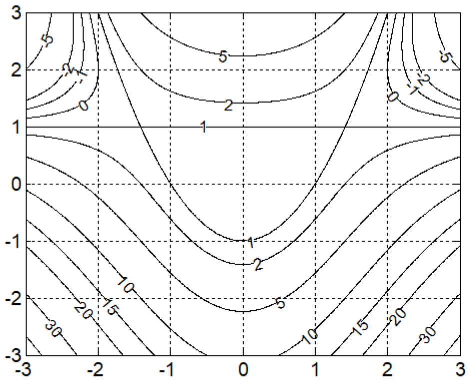
   a) (10 puntos) Halle los extremos locales y puntos de silla de f. Incluya un desarrollo completo y detallado.

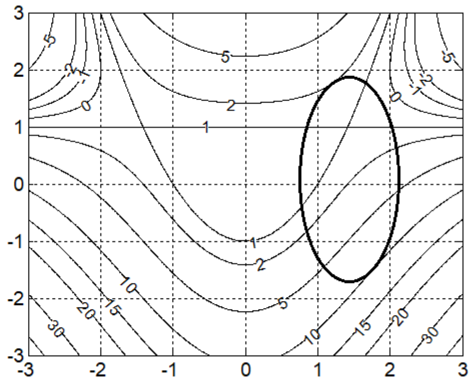
   b) (5 puntos) Calcule la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección del vector $(1,1)$.

   c) (6 puntos) Dé la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(0,1,f(0,1))$, si es posible; si no es posible, explique por qué.

d) (5 puntos) Para encontrar los extremos de f restringida a la condición dada por $x^2 + y^2 - 1 = 0$, se puede aplicar el método de multiplicadores de Lagrange. Haga un planteo completo para aplicar este método. NO DEBE RESOLVERLO.

4. Sea f la función diferenciable dada en el diagrama de curvas de nivel presentado en la figura, a la izquierda. En el diagrama de la derecha, se ha agregado una restricción que es una curva, correspondiente a una función diferenciable $g(x, y) = 0$.





Se sabe que f tiene un mínimo local en $(0, 0)$, y puntos de ensilladura en $(\sqrt{2}, 1)$ y en $(-\sqrt{2}, 1)$.

a) (6 puntos) Si se aplicara el método del descenso del gradiente para hallar el mínimo de esta función, ¿cuál podría ser un camino que se seguiría si comenzara en el punto $(2, -1)$? Márquelo en su gráfico. ¿Se llegaría al punto de mínimo?

b) (6 puntos) Si se aplicara el método del descenso del gradiente para hallar el mínimo de esta función, ¿cuál podría ser un camino que se seguiría si comenzara en el punto $(2, 1)$? Márquelo en su gráfico. ¿Se llegaría al punto de mínimo?

c) (6 puntos) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo (absolutos) de f restringida a $g(x, y) = 0$?

5. Sea la función dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$.

a) (6 puntos) Represente gráficamente y/o describa con claridad cada una de las superficies de nivel $f(x, y, z) = k$ con $k \in \{-1, 0, 1\}$, cuando sea posible; cuando no lo sea, explique por qué.

b) (6 puntos) Dé la linealización de f en el punto $(0, 0, 0)$, si es posible; si no es posible, explique por qué.

c) (6 puntos) Dé la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$, en el punto $(0, 0, 0)$, si es posible; si no es posible, explique por qué.