UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ROBOTICA I

UNIDAD III: Cinemática Inversa

Jacobiano

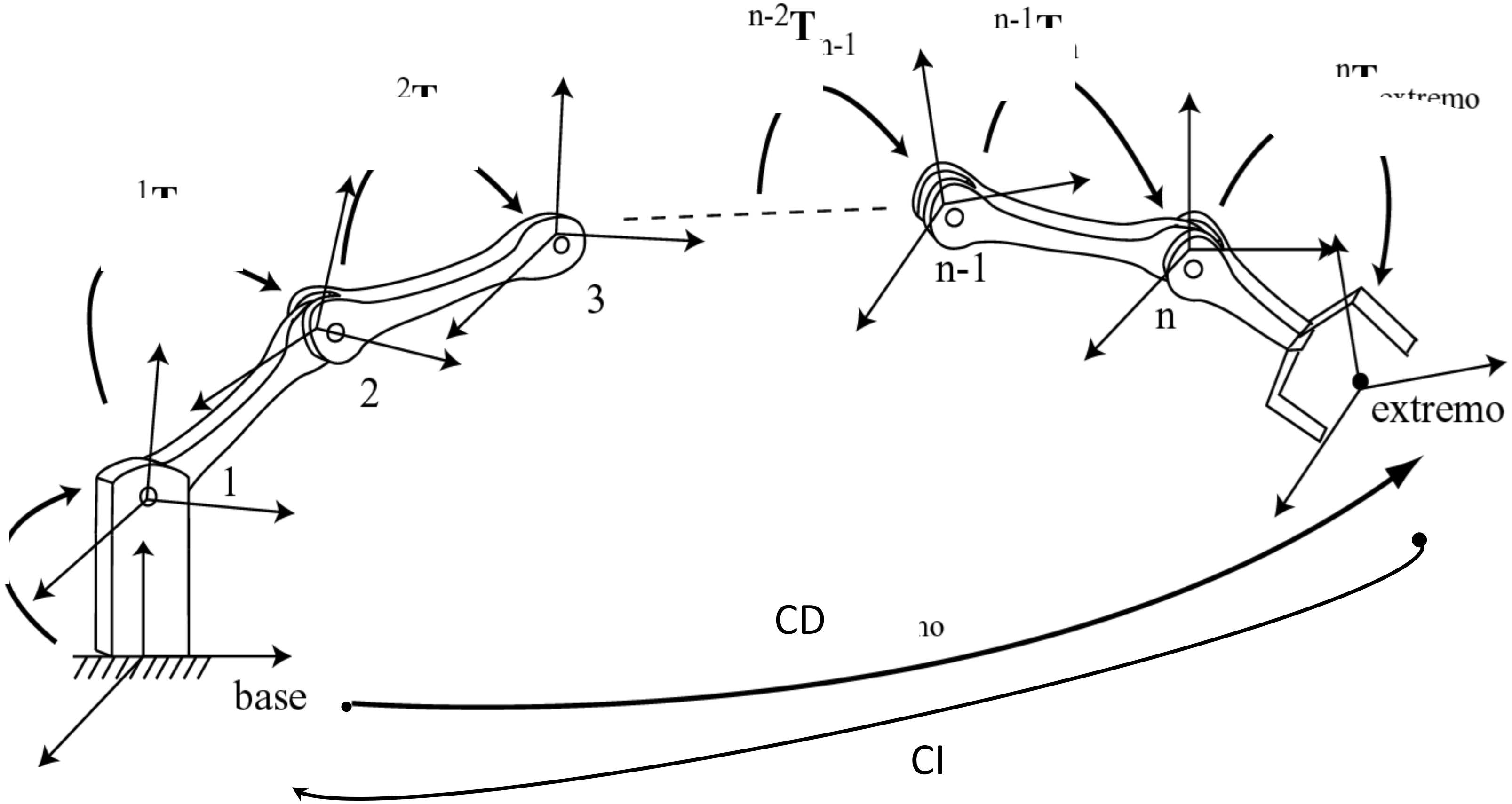
Prof: Carolina Díaz

JTP: Eric Sanchez

Contenido UNIDAD 3

- Introducción repaso fundamentos matemáticos.
- Modelo cinemático directo Denavit Hartenberg .
- Modelo cinamático inverso.
- Cinemática del movimiento. Jacobiano. Singularidades.

Cinemática



CD: $q \rightarrow EF$??

CI: $EF \rightarrow q$??

CM: $\dot{q} \leftrightarrow \dot{EF}$??

Cinemática, velocidades

Cinemática estudia la posición del robot sin tener en cuenta las fuerzas y pares que causan el movimiento.

Conocer las velocidades cartesianas del extremo a partir de las velocidades de cada articulación

ESPACIO ARTICULAR

Velocidades Articulares

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

JACOBIANA DIRECTA

JACOBIANA INVERSA

ESPACIO CARTESIANO

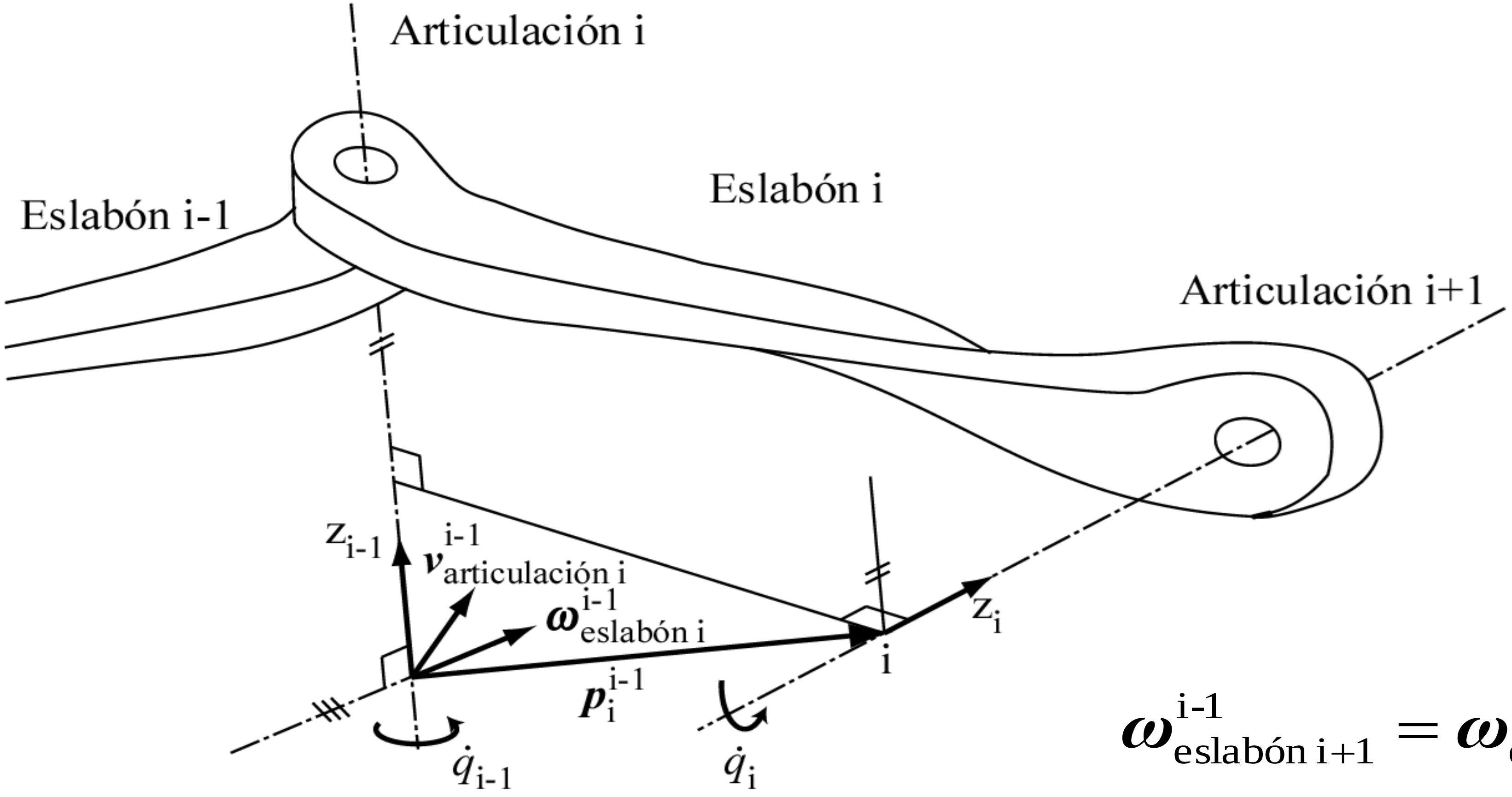
Velocidades extremo operativo

$$\dot{p} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

Conocer qué velocidades deben tener las articulaciones para lograr una determinada velocidad en el extremo

Cadena Serie

Propagación de velocidades (lineales y angulares)

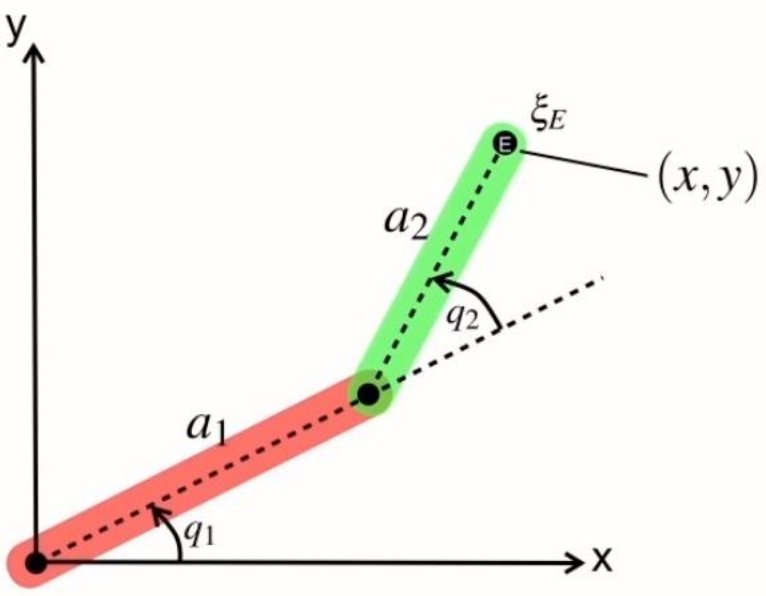


$$\boldsymbol{\omega}^{i\text{-}1}_{\text{eslabón } i+1} = \boldsymbol{\omega}^{i\text{-}1}_{\text{eslabón } i} + {}^{i\text{-}1}\mathbf{Rot}_{i} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{i} \cdot \boldsymbol{z}_{i}$$

$$\boldsymbol{v}^{i\text{-}1}_{\text{articulación } i+1} = \boldsymbol{v}^{i\text{-}1}_{\text{articulación } i} + \boldsymbol{\omega}^{i\text{-}1}_{\text{eslabón } i} \times \boldsymbol{p}^{i\text{-}1}_{i}$$

Ejemplo de robot planar 2 articulaciones RR

Cadena Serie → Propagación de velocidades



$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_1 \cos q_1 \\ a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_1 \sin q_1 \end{pmatrix}$$

- Las variables articulares están en función del tiempo

$$q_1 = q_1(t) \qquad q_2 = q_2(t)$$

- Aplicando derivadas usando regla de la cadena

$$\dot{x} = -a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$
$$\dot{y} = a_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

$$\dot{x} = -a_1\dot{q}_1 \sin q_1 - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2)$$
$$\dot{y} = a_1\dot{q}_1 \cos q_1 + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2)$$

- Put into matrix form

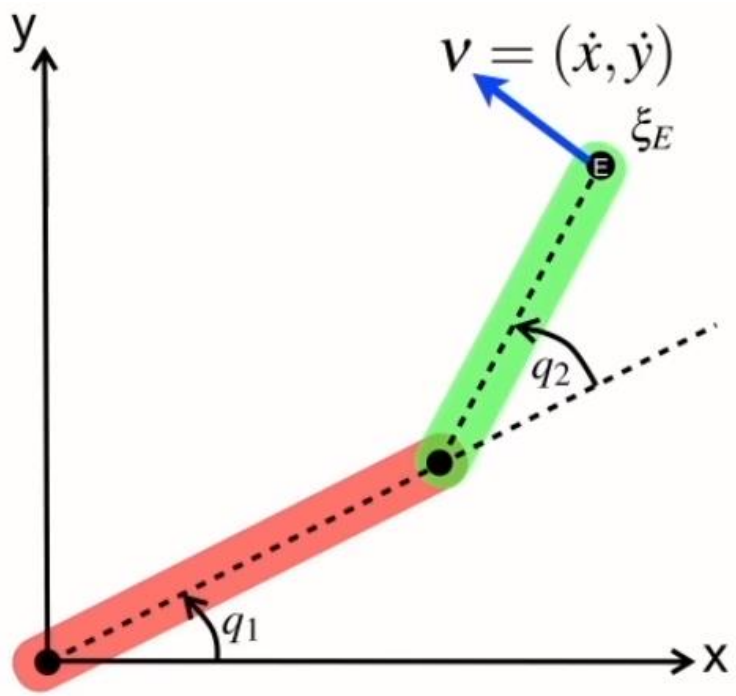
$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1+q_2) & -a_2 \sin(q_1+q_2)\\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) & a_2 \cos(q_1+q_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix}$$

tip velocity

- and write it succinctly as $\nu = \mathbf{J}(q)\dot{q}$

Jacobian matrix

$$\mathbf{J}(q) = \begin{pmatrix}-a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1+q_2) & -a_2 \sin(q_1+q_2)\\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) & a_2 \cos(q_1+q_2)\end{pmatrix}$$



Carl Gustav Jakob Jacobi

La **matriz jacobiana** es una matriz de derivadas, formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Supongamos una función *F* que va del espacio euclídeo *n*-dimensional a otro espacio euclídeo *m*-dimensional. Esta función está determinada por *m* funciones escalares reales:
Cuando la función anterior es diferenciable, entonces las derivadas parciales de estas *m* funciones pueden ser organizadas en una matriz *m* por *n*, la matriz jacobian:

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$$

$$\boxed{\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & y = f(x) \\ & \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \end{aligned}}$$

Matriz Jacobiana

Expresa la relación entre las velocidades articulares y las velocidades del extremo operativo, cuyos componentes se obtienen mediante las derivaciones parciales :

$$x = f_x(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$y = f_y(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$z = f_z(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\beta = f_\beta(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

- Expresando las derivadas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J.\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad , \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

- Esta matriz se denomina “Jacobiano”.
- Es de **6** filas y **n** columnas (no siempre cuadrada).
- Se puede obtener derivando relaciones entre ambos espacios. (Ej.: ecuaciones cerradas de cinemática inversa)
- Se puede obtener por otros métodos (ej.: vectoriales) pero sus elementos representan lo mismo.
- La matriz no es constante, depende de los $\boldsymbol{q_i}$

Dimensiones de la matriz Jacobiana - Ejemplos

- Fully actuated (6x6)
  - full access to SE(3)
  - Jacobian is square

- Under actuated (6xN), N < 6
  - limited access to SE(3)
  - remove some spatial degrees of freedom

- Over actuated (6xN), N > 6
  - full access to SE(3)
  - use pseudo inverse
  - has **spare** joints
  - can do null-space motion

Matriz Jacobiana – Ejemplo robot TRR

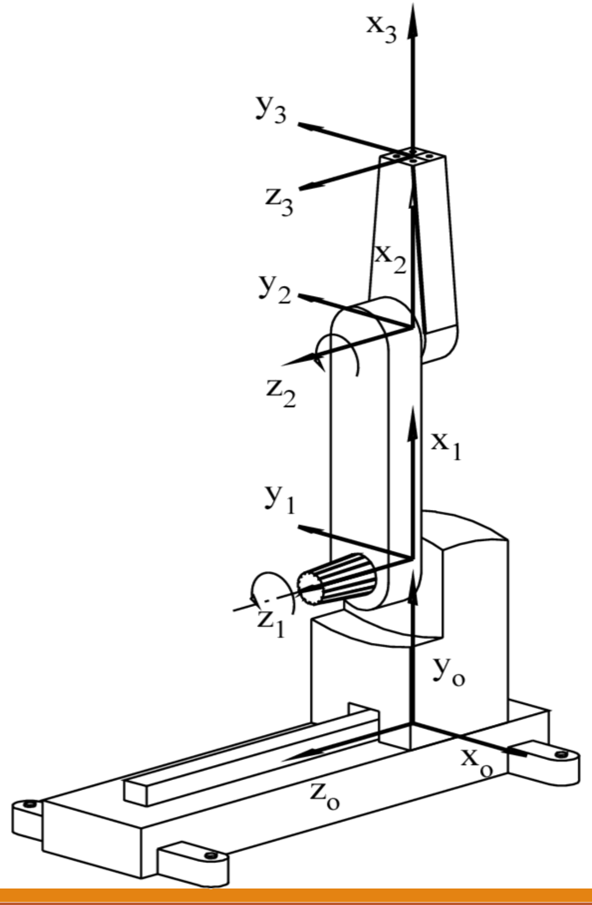
$$\begin{cases} x^0_{extremo} = l_2 \sin(q_2) + l3 \sin(q_2 + q_3) \\ y^0_{extremo} = l_1 + l_2 \cos(q_2) + l3\cos(q_2 + q_3) \\ z^0_{extremo} = q_1 \end{cases}$$

Derivada respecto al tiempo por regla de la cadena:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^0_{extremo}}{dt} = \sum \dfrac{\partial x^0_{extremo}}{\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial t} \\ \dfrac{dy^0_{extremo}}{dt} = \sum \dfrac{\partial y^0_{extremo}}{\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial t} \\ \dfrac{dz^0_{extremo}}{dt} = \sum \dfrac{\partial z^0_{extremo}}{\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial t} \end{cases}$$

Matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & -l_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_2 + q_3) & -l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



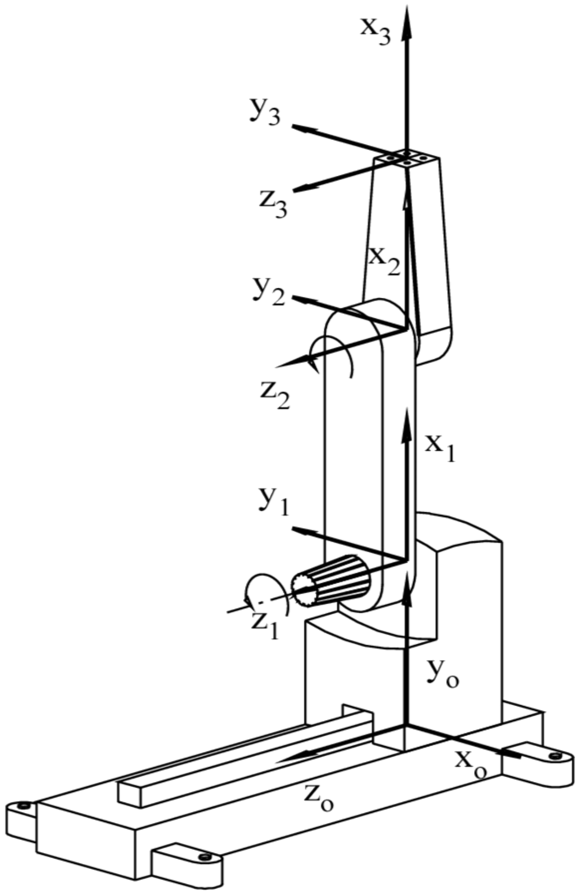
$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3) & l_3\cos(q_2+q_3) \\ 0 & -l_2\sin(q_2) - l_3\sin(q_2+q_3) & -l_3\sin(q_2+q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de cálculo:

- $q = [5m \quad 60° \quad -15°]$
- $\dot{q} = [0{,}5m/s \quad 90°/s \quad 45°/s]$
- $l_1 = 10m, l_2 = 5m, l_3 = 8m$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8{,}157 & 5{,}657 \\ 0 & -9{,}987 & -5{,}657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17{,}256 \\ -20{,}13 \\ 0{,}500 \end{bmatrix} m/s$$

- $q = [15m \quad 30° \quad -30°]$?????



Cinemática, velocidades

Cinemática estudia la posición del robot sin tener en cuenta las fuerzas y pares que causan el movimiento.

Conocer las velocidades cartesianas del extremo a partir de las velocidades de cada articulación

ESPACIO ARTICULAR

Velocidades Articulares

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

JACOBIANA DIRECTA →

← **JACOBIANA INVERSA**

ESPACIO CARTESIANO

Velocidades extremo operativo

$$\dot{p} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

Conocer qué velocidades deben tener las articulaciones para lograr una determinada velocidad en el extremo

Matriz Jacobiana Inversa

- El problema inverso está dado por:

$$\dot{q} = J^{-1} \begin{bmatrix} v_{extremo}^{0} \\ \omega_{extremo}^{0} \end{bmatrix}$$

- Permite saber qué velocidades articulares se deben imponer para lograr una determinada velocidad en extremo operativo.
- La $\boldsymbol{J^{-1}}$ no es exactamente la inversa algebraica de $\boldsymbol{J}$, ya que esta última podría no ser cuadrada (**6** filas y **n** columnas).
- Se puede obtener por métodos analíticos (similar al de $\boldsymbol{J}$) y numéricos (inversa cuando es posible, pseudoinversa, otros).
- De mucha utilidad en estrategias avanzadas de control dinámico.

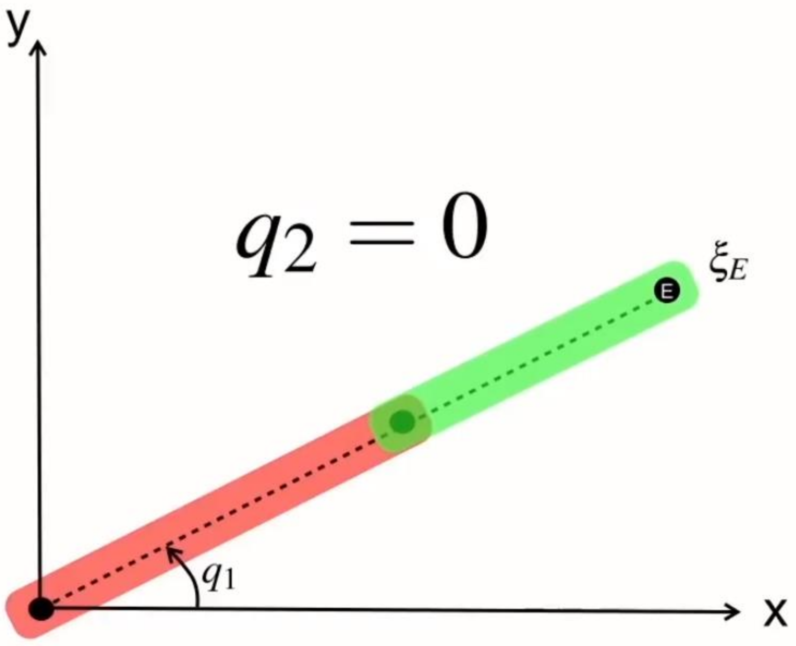
Matriz Jacobiana Inversa – Singularidades

- La J depende de las variables articulares.
- Hay configuraciones de $\bar{q}$ que hacen imposible el cálculo de J^{-1} (o de su pseudo-inversa).
- A estas posturas del robot se las denomina **configuraciones singulares** o **singularidades** y son de especial importancia:
  - El movimiento en ciertas direcciones es imposible.
  - Para velocidades finitas del extremo pueden necesitarse velocidades articulares infinitas.
  - Para fuerzas y pares finitos en el extremo pueden corresponderles fuerzas y pares infinitos en articulaciones.
  - Se pierde al menos 1 gdl.
- **Todo robot presenta singularidades en el límite del Espacio de Trabajo?**

Singularidades - Ejemplo robot planar

$$v = \mathbf{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{q})^{-1} v$$



$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1+q_2) & -a_2 \sin(q_1+q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) & a_2 \cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q})^{-1} = \frac{1}{a_1 a_2 \sin q_2} \begin{pmatrix} a_2 \cos(q_1+q_2) & a_2 \sin(q_1+q_2) \\ -a_1 \cos q_1 - a_2 \cos(q_1+q_2) & -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

- Cuando q2= 0 ➔Det (J) = 0➔ Singularidad => Pierdo 1GDL
- ¿Que pasa en los casos donde q2 tiene un valor cercano a 0?

Matriz Jacobiana Inversa – Singularidades

- Det (**J**) = 0, ó cercano a cero implica => Singularidad
  - Movimiento imposible difícil de realizar.
  - Velocidades infinitas en las articulaciones para velocidades finitas en el extremo.

- ¿Puedo tener casos donde el Det (**J**) ≠ 0 y estar en un punto singular ?

- Analizar el cond (**J**)

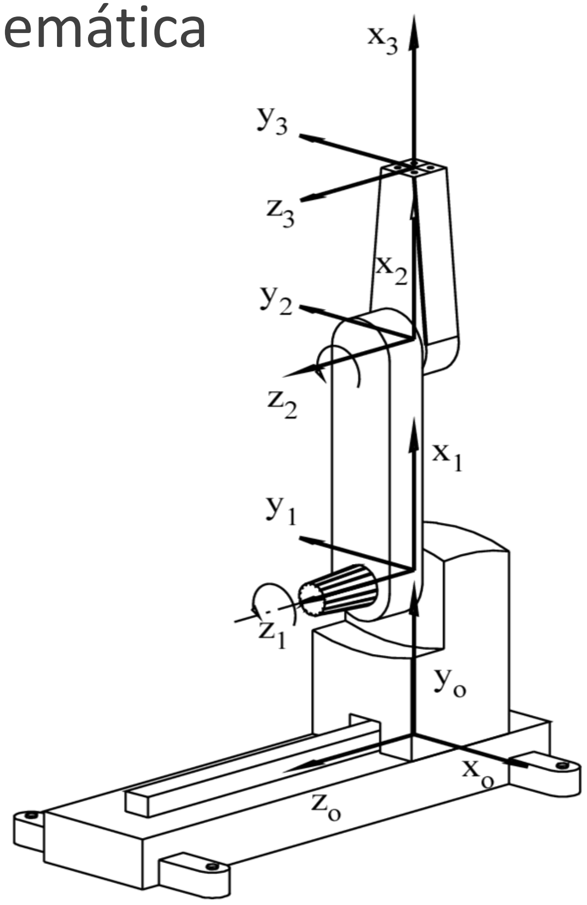
  → Cond (J) = 1

  → Cond (J) significativamente mayor. Cerca de una singularidad

- Elipse de "manipulabilidad"

Matriz Jacobiana Inversa – Ejemplo robot TRR

1. Calcular $J(q)$ a partir de un q dato, y luego su inversa algebraica.
2. Hallar el $J^{-1}(q)$ a partir de $J(q)$ de forma general, y calcularlo para cada q dato.
3. Hallar el $J^{-1}(q)$ a partir de las ecuaciones cerradas de cinemática inversa, y calcularlo para cada q dato.



Ejemplo de cálculo:

- $q = [5m \quad 60° \quad -15°]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8{,}157 & 5{,}657 \\ 0 & -9{,}987 & -5{,}657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17{,}256 \\ -20{,}13 \\ 0{,}500 \end{bmatrix} m/s$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0{,}5464 & -0{,}5464 & 0 \\ 0{,}9647 & 0{,}7879 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17{,}256 \\ -20{,}13 \\ 0{,}500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} rad/s$$

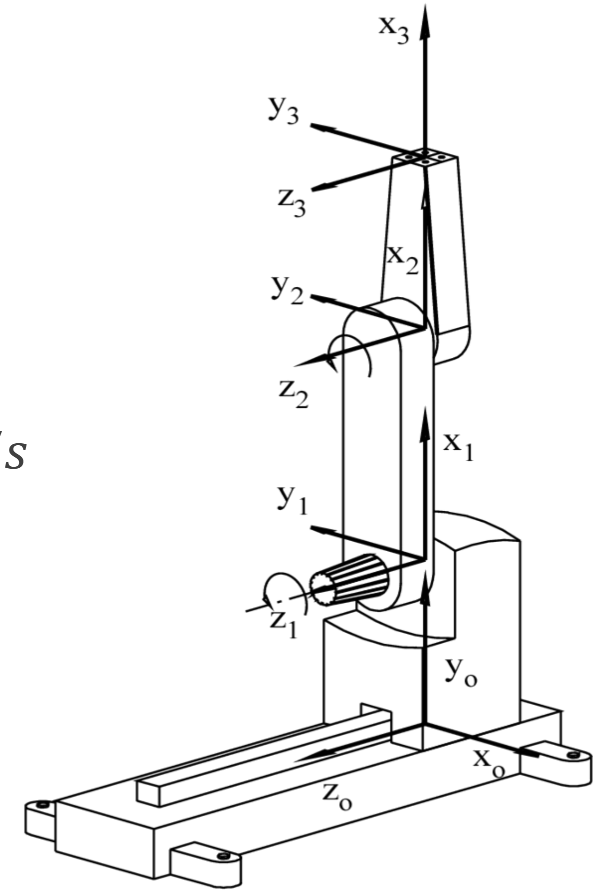
$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3) & l_3\cos(q_2+q_3) \\ 0 & -l_2\sin(q_2) - l_3\sin(q_2+q_3) & -l_3\sin(q_2+q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de cálculo:

- $q = [5m \quad 60° \quad -15°]$
- $\dot{q} = [0{,}5m/s \quad 90°/s \quad 45°/s]$
- $l_1 = 10m, l_2 = 5m, l_3 = 8m$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8{,}157 & 5{,}657 \\ 0 & -9{,}987 & -5{,}657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17{,}256 \\ -20{,}13 \\ 0{,}500 \end{bmatrix} m/s$$

- $q = [15m \quad 30° \quad -30°]$?????

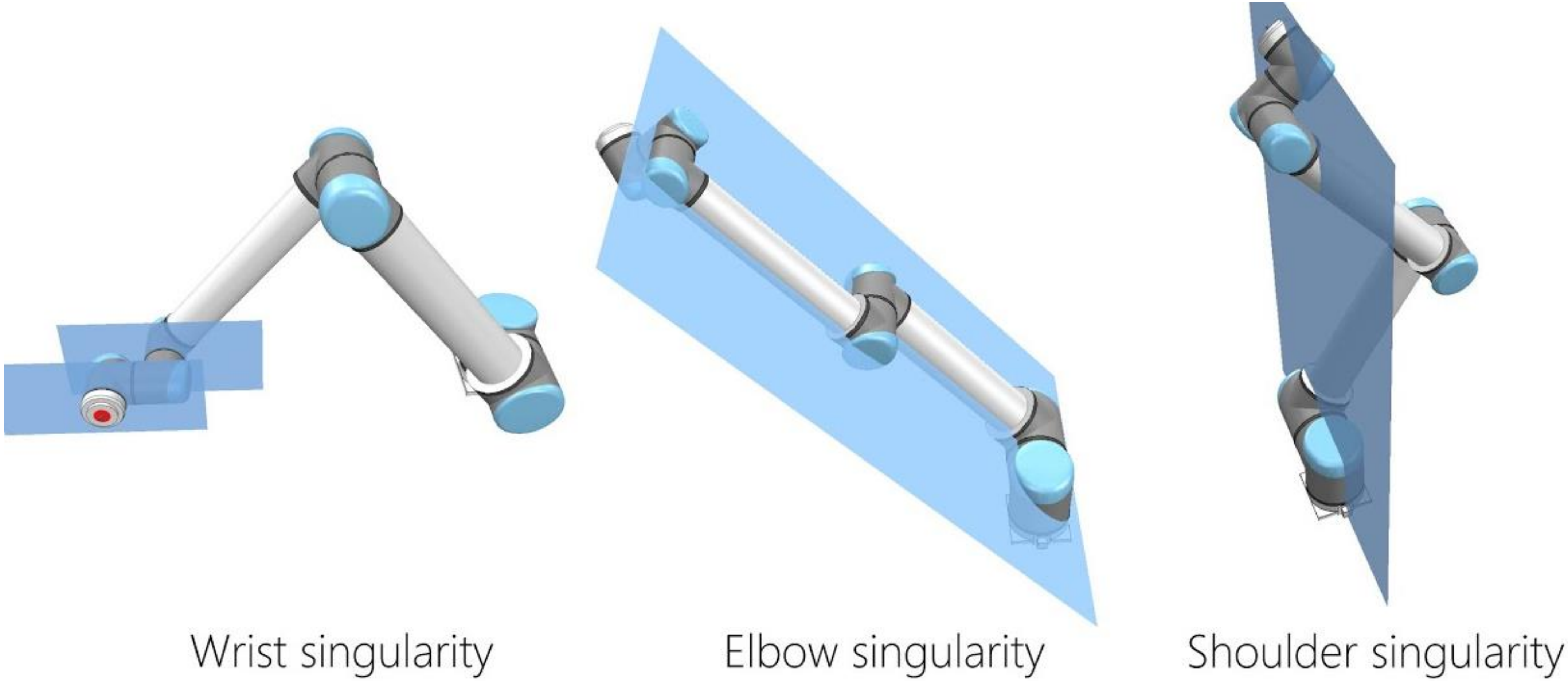


Matriz Jacobiana – Resumen y aclaraciones

- Para el cursado se adopta lo siguiente:
  - “**Matriz Jacobiana**” y “**Jacobiano**” se entienden como el mismo objeto, la matriz ya presentada.
  - Al determinante de dicha matriz no se le asigna nombres particulares, simplemente es el “**determinante del jacobiano**” o “determinante de la matriz jacobiana”.
  - En gran parte de la bibliografía, un **punto singular** es aquel en el que el Jacobiano no presenta inversa (det [J] = 0).
  - En este cursado consideraremos a los puntos singulares como un subconjunto de los **puntos críticos**, siendo estos últimos “todos los puntos de espacio articular donde se pierde al menos 1 GDL”, que serían los singulares y también los que se encuentran en el límite del espacio de trabajo debido a los límites articulares.

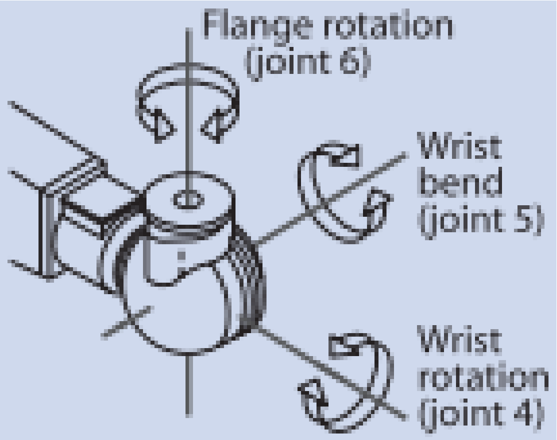
Muchas gracias

Preguntas



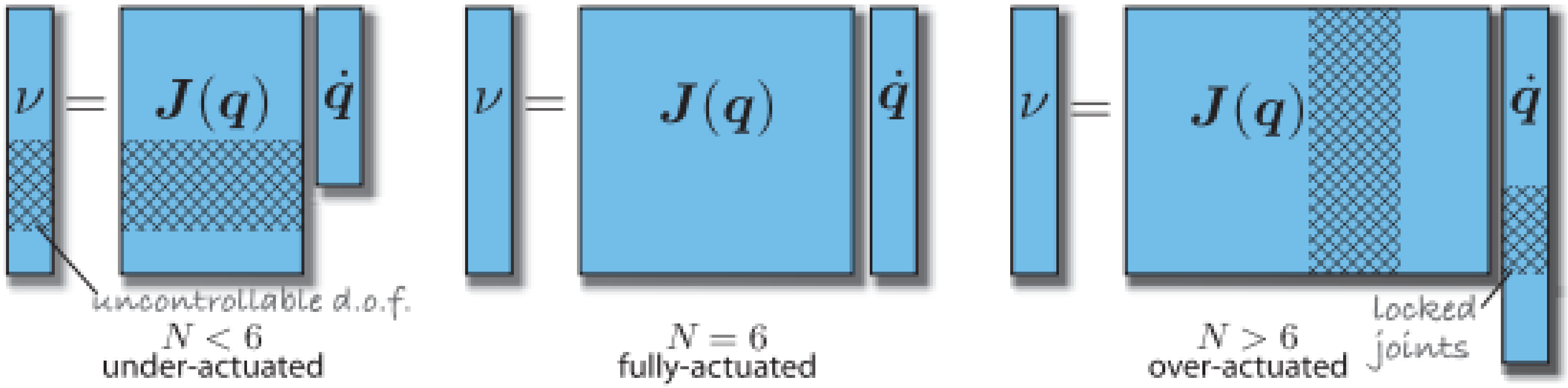
universal-robots.com/articles/ur/application-installation/what-is-a-singularity/

youtube.com/watch?v=6Wmw4lUHlX8



Spherical wrists are a key component of almost all modern arm-type robots. They have three axes of rotation that are orthogonal and intersect at a common point. This is a gimbal-like mechanism, and as discussed in Sect. 2.2.1.3 and will have a singularity.

The robot end-effector pose, position and an orientation, is defined at the center of the wrist. Since the wrist axes intersect at a common point they cause zero translation, therefore the position of the end-effector is a function only of the first three joints. This is a critical simplification that makes it possible to find closed-form inverse kinematic solutions for 6-axis industrial robots. An arbitrary end-effector orientation is achieved independently by means of the three wrist joints.



Schematic of Jacobian, $\boldsymbol{\nu}$ and $\dot{\boldsymbol{q}}$ for different cases of N. The *hatched* areas represent matrix regions that could be deleted in order to create a square sub-system capable of solution

Matriz Jacobiana Inversa – Control de Movimiento

- Consider discrete time steps numbered 0, 1, 2, ...
  - ➥ update the computation every Δ_t seconds
- At each time step:
  - ➥ Compute joint velocity $\dot{q} = \mathbf{J}(q_k)^{-1} \nu$
  - ➥ Compute next joint configuration $q_{k+1} = q_k + \Delta_t \dot{q}$
  - ➥ Move joint to next configuration q_{k+1}