UNIDAD 2: integrales dobles y triples

Integrales triples

Recorrido

Recorrido

Recorrido

Ejemplo 5.15

Integrar e^{x+y+z} en la caja $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo 5.15

Integrar e^{x+y+z} en la caja $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left(e^{x+y+z} \Big|_{x=0}^{1} \right) dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(e^{1+y+z} - e^{y+z} \right) dy\, dz \\
&= \int_0^1 \left(e^{1+y+z} - e^{y+z} \right) \Big|_{y=0}^{1} dz \\
&= \int_0^1 \left(e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z} \right) dz \\
&= \left(e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z} \right) \Big|_0^1 \\
&= e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e-1)^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$.

Describimos la bola por

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Describimos la bola por

$$1 \leq \quad x \quad \leq 1,$$

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\big\}$.

Describimos la bola por

$$\begin{aligned} 1 \le \quad & x \quad \le 1, \\ -\sqrt{1 - x^2} \le \quad & y \quad \le \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Describimos la bola por

$$\begin{aligned} 1 \leq & \quad x \quad \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & \quad z \quad \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Describimos la bola por

$$\begin{aligned} 1 \leq \quad & x \quad \leq 1, \\ -\sqrt{1 - x^2} \leq \quad & y \quad \leq \sqrt{1 - x^2}, \\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq \quad & z \quad \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$$

Ejemplo 5.17

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) dy\,dx \end{aligned}$$

Ejemplo 5.17

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{1/2} dy\,dx
\end{aligned}
$$

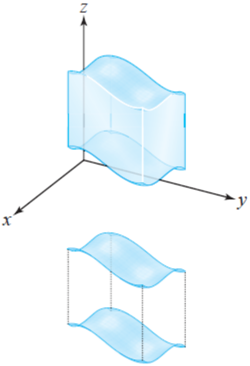
Ejemplo 5.17

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{1/2} dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{1/2} dy \right)}_{\int_{-a}^{a} (a^2-y^2)^{1/2}\,dy = \frac{a^2}{2}\pi = \frac{1-x^2}{2}\pi} dx
\end{aligned}
$$

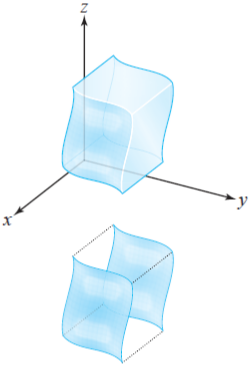
Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{1/2} dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{1/2} dy \right)}_{\int_{-a}^{a} (a^2-y^2)^{1/2}\,dy = \frac{a^2}{2}\pi = \frac{1-x^2}{2}\pi} dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

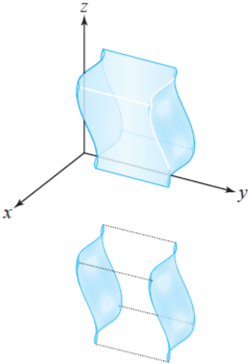
Regiones elementales



Top and bottom are surfaces $z = \gamma(x, y)$

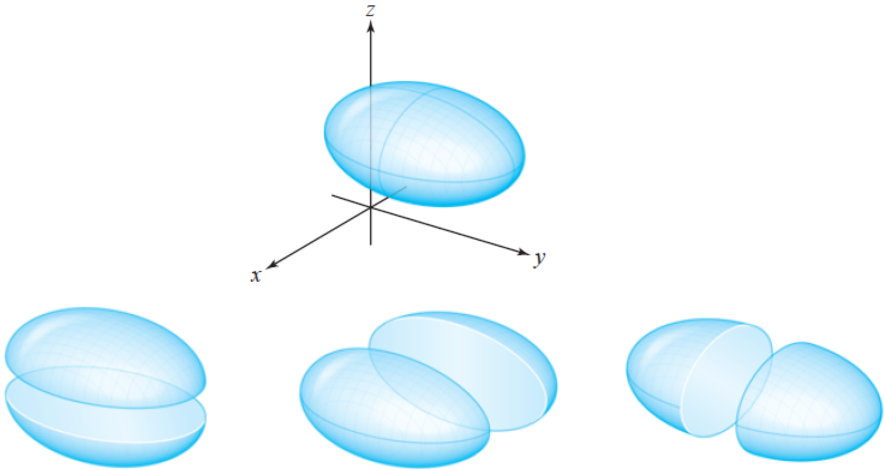


Front and rear are surfaces $x = \rho(y, z)$



Left and side are surfaces $y = \delta(x, z)$

Regiones elementales simétricas



Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$ y esbozar la región.

Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

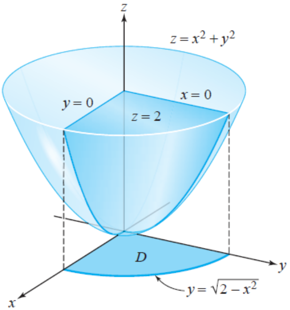
Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 1:

$$0 \le x \le \sqrt{2},$$
$$0 \le y \le \sqrt{2 - x^2},$$
$$x^2 + y^2 \le z \le 2.$$

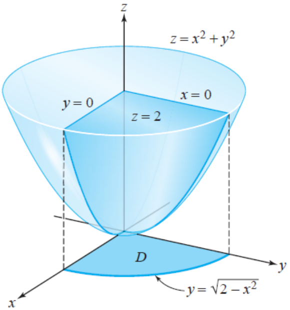


Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

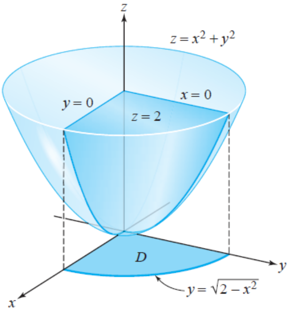
Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$



$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx =$$

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.



Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 2:

$$0 \leq z \leq 2,$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$ y esbozar la región.

Método 2:

$$0 \leq z \leq 2,$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{z},$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 2:

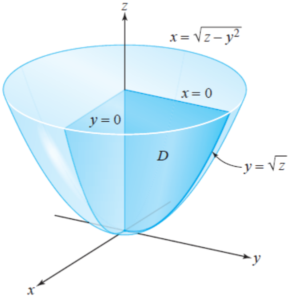
$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 2, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{z}, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{z - y^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$ y esbozar la región.

Método 2:

$$
\begin{gathered}
0 \leq z \leq 2, \\
0 \leq y \leq \sqrt{z}, \\
0 \leq x \leq \sqrt{z - y^2}.
\end{gathered}
$$

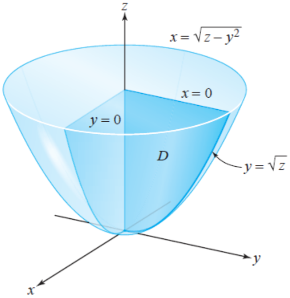


Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 2:

$$0 \leq z \leq 2,$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{z},$$
$$0 \leq x \leq \sqrt{z - y^2}.$$



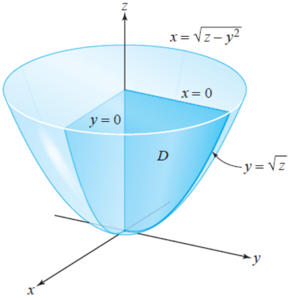
$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x\,dx\,dy\,dz =$$

Ejemplo 5.18

Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el primer octante. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Método 2:

$$0 \le z \le 2,$$
$$0 \le y \le \sqrt{z},$$
$$0 \le x \le \sqrt{z - y^2}.$$



$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x\,dx\,dy\,dz = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx.$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx.$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz \, dy \, dx.$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^{2} \, dy \, dx$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz \, dy \, dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\,dy\,dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x z\Big|_{x^2+y^2}^2 dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (2-x^2-y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left(2y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^x z\Big|_{x^2+y^2}^2 dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(2y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{4x^3}{3}\right) dx
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^x z\Big|_{x^2+y^2}^2 \, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(2y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x \, dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3}\right)\, dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{4x^3}{3}\right)\, dx \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.19

a) Hemos calculado $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 5.19

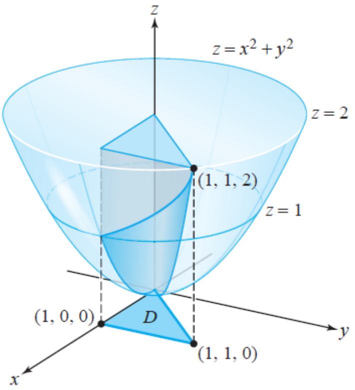
a) Hemos calculado $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$.

b) Dibujar la región de integración.

Ejemplo 5.19

a) Hemos calculado $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$.

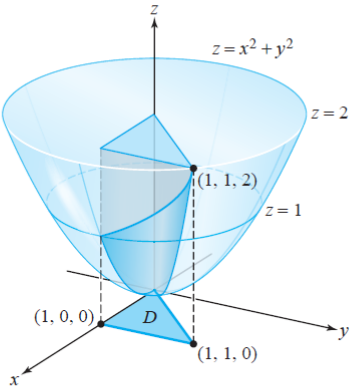
b) Dibujar la región de integración.



Ejemplo 5.19

a) Hemos calculado $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 \, dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$.

b) Dibujar la región de integración.

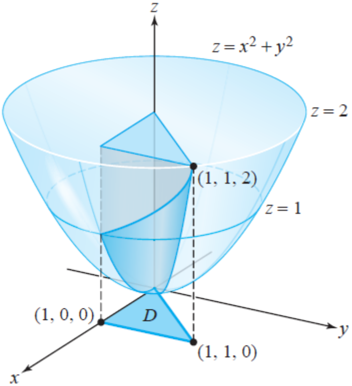


c) Interpretar la integral.

Ejemplo 5.19

a) Hemos calculado $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}.$

b) Dibujar la región de integración.



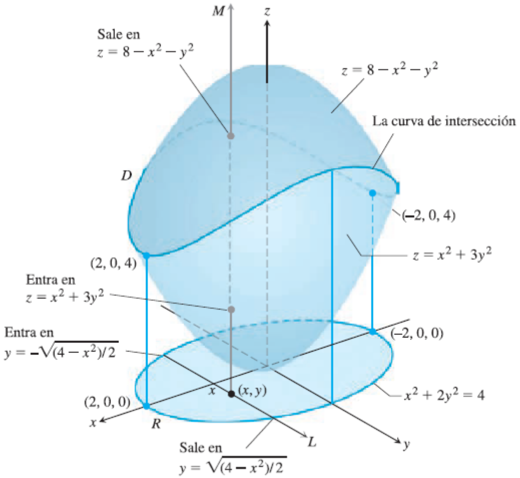
c) Interpretar la integral. La integral es el volumen de la región de integración.

Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL Thomas, pag.862.

Ejemplo: masa

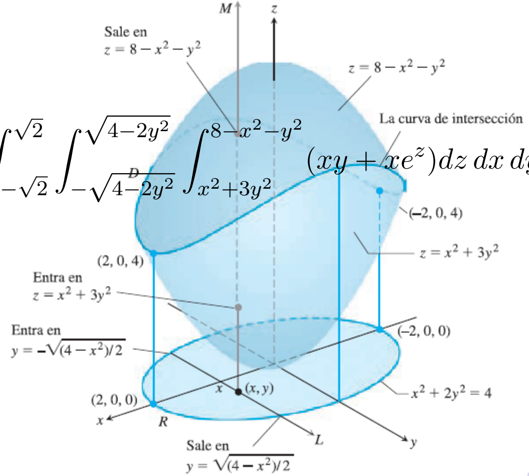
Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL Thomas, pag.862.



Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$. SOL Thomas, pag.862.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} (xy + xe^z)\,dz\,dx\,dy.$$



Recorrido

Ejercicios capítulo 5

En los ejercicios del 1 al 4, efectuar la integración indicada en la caja dada.

2. $\displaystyle\iiint_B e^{-xy}y\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

3. $\displaystyle\iiint_B (2x + 3y + z)\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

En los ejercicios del 5 al 8, describir la región dada como una región elemental.

5. La región que está entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

6. La región cortada por el cilindro $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ en la bola $2x^2 + z^2 = 1$, esto es, la región dentro del cilindro y de la bola.

En los ejercicios del 9 al 12 hallar el volumen de la región correspondiente.

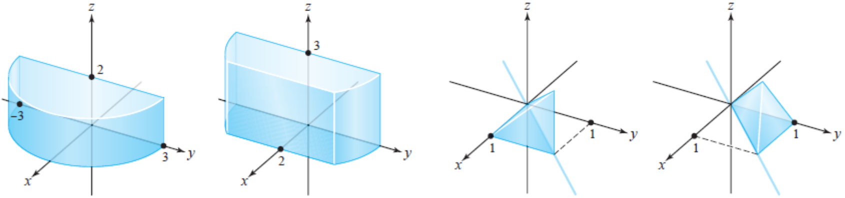
9. La región limitada por $z = x^2 + y^2$, y $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

11. El sólido limitado por $x = y$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, y $x + y + z = 0$.

Ejercicio

1. Cada integral iterada (a) a (d) es una integral sobre una región D. Aparee cada integral con la correspondiente región de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x}}^{\sqrt{9-x}} dy\,dz\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx\,dz$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y dz\,dy\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^x dz\,dx\,dy$



(i) (ii) (iii) (iv)

Ejercicios capítulo 5

Calcular las integrales en los ejercicios del 13 al 21.

14. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz)\, dz\, dy\, dx.$

19. $\displaystyle\iiint_W (1 - z^2)\, dx\, dy\, dz$; W es la pirámide con vértice superior en $(0, 0, 1)$ y cuyos vértices en la base son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

21. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\, dy\, dx.$

22. **a)** Dibujar la región de integración de la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$

b) Escribir la integral con el siguiente orden de integración: $dx\, dy\, dz$.

Ejercicios capítulo 5

Para las regiones de los ejercicios del 23 al 26, encontrar los límites de integración apropiados $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\gamma_1(x, y)$, y $\gamma_2(x, y)$, y escribir la integral triple en la región W como una integral iterada de la forma:

$$\iiint_W f\,dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x,\,y)}^{\gamma_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

23. $W = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

Recorrido

Recorrido

Aplicaciones de una región en otra

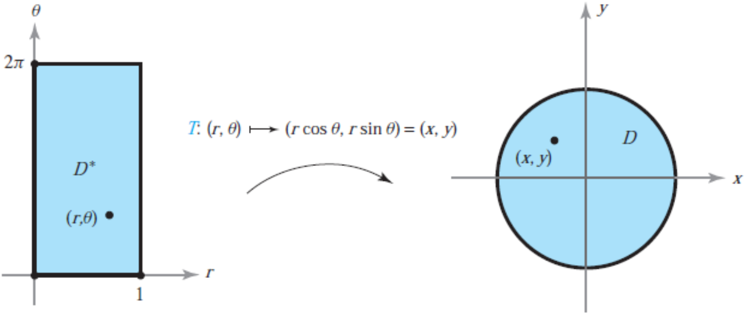
Sean $D^* \subset \mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable; llamamos $D = T(D^*)$.

Aplicaciones de una región en otra

Sean $D^* \subset \mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable; llamamos $D = T(D^*)$.
Una forma de comprender la geometría de una aplicación T es ver cómo deforma a D^*.

Aplicaciones de una región en otra

Sean $D^* \subset \mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable; llamamos $D = T(D^*)$.
Una forma de comprender la geometría de una aplicación T es ver cómo deforma a D^*.
Ej 6.1: Sean $D^* = [0,1] \times [0, 2\pi]$ y
$T : D^* \to \mathbb{R}^2 / T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.



Aplicaciones inyectivas

Definición

Una aplicación $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva en D^* si para (u, v) y (u', v') en D^*, $T(u, v) = T(u', v')$ implica $u = u'$ y $v = v'$.

Aplicaciones inyectivas

Definición

Una aplicación $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva en D^* si para (u, v) y (u', v') en D^*, $T(u, v) = T(u', v')$ implica $u = u'$ y $v = v'$.

Ej 6.3: la aplicación de cambio a coordenadas polares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ no es inyectiva si su dominio es $\mathbb{R}^2$.

Aplicaciones inyectivas

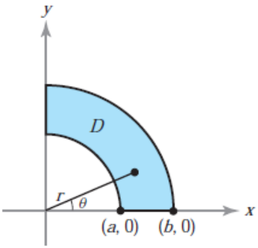
Definición

Una aplicación $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva en D^* si para (u, v) y (u', v') en D^*, $T(u, v) = T(u', v')$ implica $u = u'$ y $v = v'$.

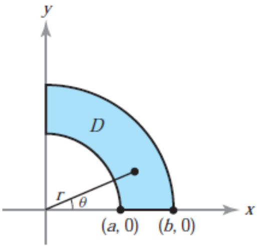
Ej 6.3: la aplicación de cambio a coordenadas polares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ no es inyectiva si su dominio es $\mathbb{R}^2$. (Analizar $T(0, \theta_1)$ y $T(0, \theta_2)$.)

Ejemplo 6.7

Sea D la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$. Sea T la transformación a coordenadas polares, $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.



Sea D la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$. Sea T la transformación a coordenadas polares, $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.



Rta: $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$.

Propiedad (sin demostración)

Si D^* y D son regiones elementales y $T : D^* \to D$ tiene la propiedad de que el determinate de $\mathbf{D}T(u, v)$ no se anula en ningún $(u, v) \in D^*$, y si T transforma la frontera de D^* de forma inyectiva y sobreyectiva en la frontera de D, entonces T es inyectiva y sobreyectiva de D^* en D.

Recorrido

Recorrido

Dados D y D^* en $\mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to D$ (diferenciable), $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in D^*$, buscamos calcular

$$\iint_D f(x, y) dx\, dy.$$

Motivación cambio de variables

Dados D y D^* en $\mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to D$ (diferenciable), $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in D^*$, buscamos calcular

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy.$$

Si fuera cierto que $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\,dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))du\,dv$,

Motivación cambio de variables

Dados D y D^* en $\mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to D$ (diferenciable), $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in D^*$, buscamos calcular

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy.$$

Si fuera cierto que $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\,dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))du\,dv$, en particular tendríamos que

$$\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{A(D)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\iint_{D^*} du\,dv}_{A(D^*)},$$

que es falso.

Definición (Determinante jacobiano)

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$. El determinante jacobiano de T, que se escribe $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de $\mathbf{D}T(u,v)$, la matriz derivada de T:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Determinantes Jacobianos

Definición (Determinante jacobiano)

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$. El determinante jacobiano de T, que se escribe $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de $\mathbf{D}T(u, v)$, la matriz derivada de T:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ej. 6.8: para la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas, el determinante jacobiano es

Determinantes Jacobianos

Definición (Determinante jacobiano)

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$. El determinante jacobiano de T, que se escribe $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de $\mathbf{D}T(u,v)$, la matriz derivada de T:

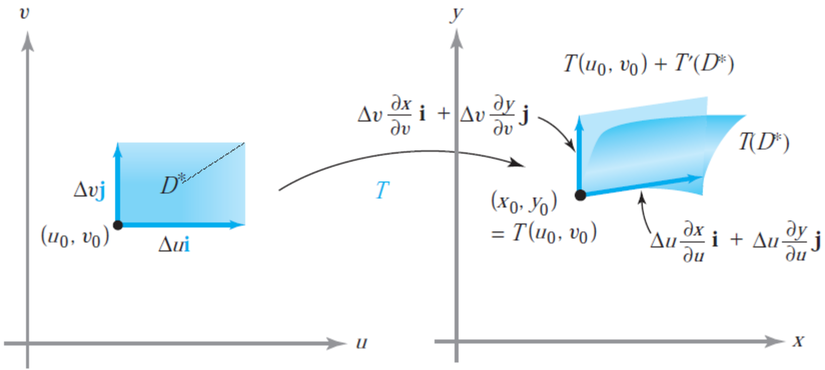
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ej. 6.8: para la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas, el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

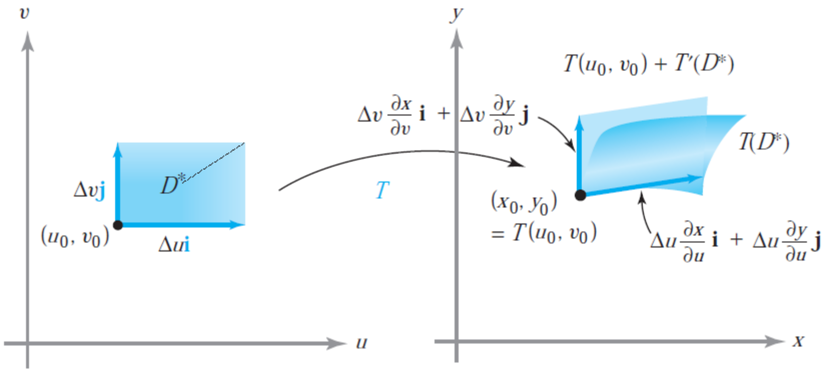
$A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$



$A(D)$ (explicación de la fórmula)

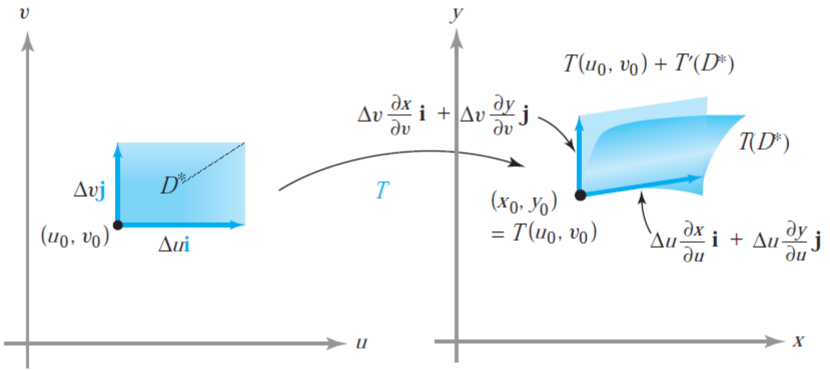
$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, T' es una matriz 2x2, la linealización de T en (u_0, v_0) es: $L(u,v) = T(u_0,v_0) + T'\binom{u-u_0}{v-v_0}$.



$A(D)$ (explicación de la fórmula)

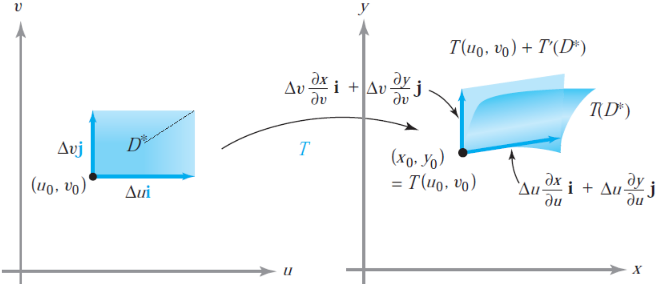
$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, T' es una matriz 2x2, la linealización de T en (u_0, v_0) es: $L(u,v) = T(u_0,v_0) + T'\binom{u-u_0}{v-v_0}$.

$$T'(\Delta u\,\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u\,\mathbf{T}_u \qquad T'(\Delta v\,\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v\,\mathbf{T}_v$$



$A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, T' es una matriz 2x2, la linealización de T en (u_0, v_0) es: $L(u,v) = T(u_0,v_0) + T'\binom{u-u_0}{v-v_0}$



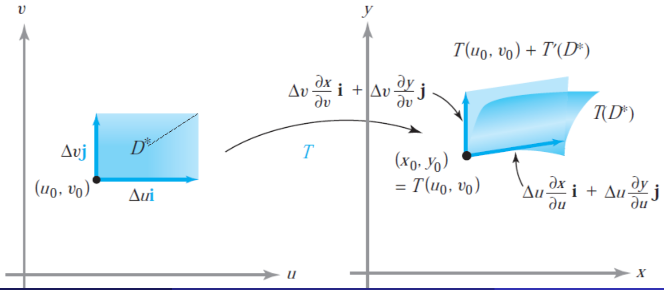
$A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, T' es una matriz 2x2, la linealización de T en (u_0, v_0) es: $L(u,v) = T(u_0,v_0) + T'\binom{u-u_0}{v-v_0}$

area of $T(D^*)$

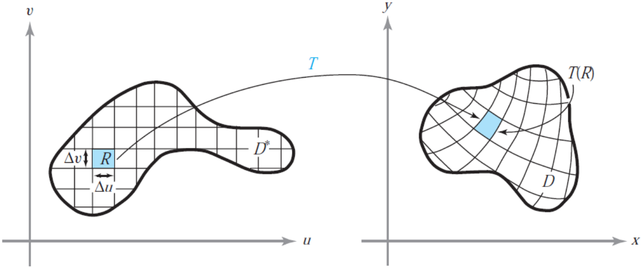
$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right| \Delta u\, \Delta v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta u\, \Delta v$$

evaluated at (u_0, v_0).



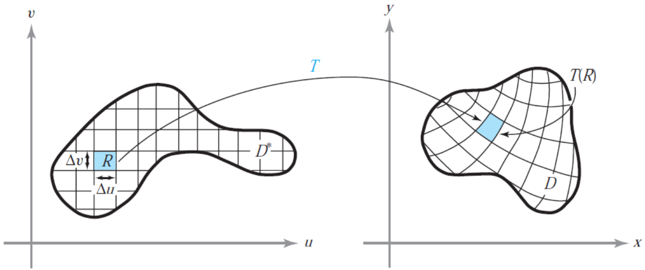
$A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$



$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$



$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Coordenadas polares

$$A(D) = \iint_D dx\, dy = \iint_{D^*} r\, dr\, d\theta.$$

Recorrido

Cambio de variables en integrales dobles

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1 e inyectiva, tal que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv.$$

Sin demostración.

Cambio de variables en integrales dobles

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1 e inyectiva, tal que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Sin demostración.

Coordenadas polares

La fórmula

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

es válida cuando T transforma D^* en D de forma inyectiva, excepto tal vez en la frontera de D^*.

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

I^2

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr\right)d\theta \end{aligned}$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\lim_{a\to\infty}\int_0^{a} e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{a} d\theta = \int_0^{2\pi}\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-a^2}-1)d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.12: **integral gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-r^2} r\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-a^2} - 1) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

Recorrido

Cambio de variables en integrales triples

$$\iiint_W f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw,$$

Cambio de variables en integrales triples

$$\iiint_W f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw,$$

donde W^* es una región elemental en el espacio que se corresponde con W en el espacio xyz por una aplicación $T:(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, supuesto que T es C^1 e inyectiva, excepto posiblemente en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables.

Recorrido

Coordenadas cilíndricas

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Coordenadas cilíndricas

$$T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Cambio de variables: coordenadas cilíndricas

$$\iiint_W f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Coordenadas esféricas

$$T(r,\theta,z) = (\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Coordenadas esféricas

$$T(r,\theta,z) = (\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Cambio de variables: coordenadas esféricas

$$\iiint_W f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Ejemplo 6.13

Sea W la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$. Calcular

$$\iiint_W e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV.$$

Ejemplo 6.13

Sea W la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$. Calcular

$$\iiint_W e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV.$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

Ejemplo 6.13

Sea W la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$. Calcular

$$\iiint_W e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV.$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$\begin{aligned}
\iiint_W e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV &= \iiint_{W^*} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho \\
&= \frac{4}{3}\pi(e-1).
\end{aligned}$$

Recorrido

Recorrido

Valor medio de una función

La media de los números $x_1, \cdots, x_n$ es
$[x_i]_m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Valor medio de una función

La media de los números $x_1, \cdots, x_n$ es
$[x_i]_m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$

Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ es
$[f]_m = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$

Valor medio de una función

La media de los números $x_1, \cdots, x_n$ es
$[x_i]_m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$

Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ es
$[f]_m = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$
El valor medio de una función de dos variables en la región $D \subset \mathbb{R}^2$ es
$[f]_m = \dfrac{\iint_D f(x,y)dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}.$

Valor medio de una función

La media de los números $x_1, \cdots, x_n$ es
$[x_i]_m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$

Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo $[a,b]$ es
$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$
El valor medio de una función de dos variables en la región $D \subset \mathbb{R}^2$ es
$$[f]_m = \frac{\iint_D f(x,y)dx\,dy}{\iint_D \,dx\,dy}.$$
El valor medio de una función de tres variables en la región $W \subset \mathbb{R}^3$ es
$$[f]_m = \frac{\iiint_W f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_W \,dx\,dy\,dz}.$$

Recorrido

Para una región en el espacio W con densidad de masa $\delta(x, y, z)$,

$$volumen = \iiint_W dx\, dy\, dz,$$

$$masa = \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

Recorrido

Tipos de integrales impropias

Integramos $f : D \to \mathbb{R}$, donde $f(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.

Tipos de integrales impropias

Integramos $f : D \to \mathbb{R}$, donde $f(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.
Las integrales impropias que analizaremos se encuadran en uno de estos tres casos:

Tipos de integrales impropias

Integramos $f : D \to \mathbb{R}$, donde $f(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.
Las integrales impropias que analizaremos se encuadran en uno de estos tres casos:

1) f es continua excepto en la frontera de D (que es una región acotada).

Tipos de integrales impropias

Integramos $f : D \to \mathbb{R}$, donde $f(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.
Las integrales impropias que analizaremos se encuadran en uno de estos tres casos:

1) f es continua excepto en la frontera de D (que es una región acotada).
2) f es no acotada en puntos aislados de D.

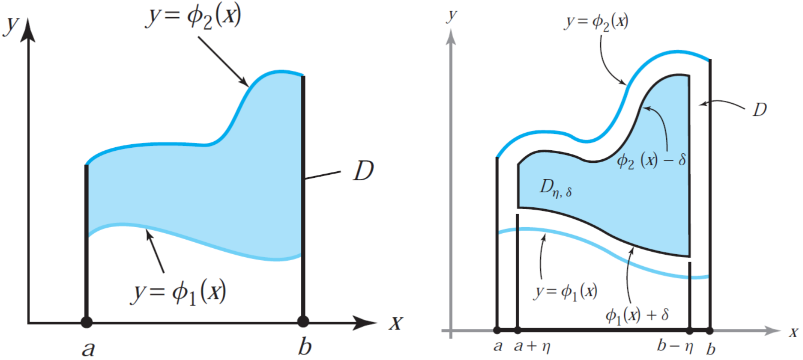
Tipos de integrales impropias

Integramos $f : D \to \mathbb{R}$, donde $f(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.
Las integrales impropias que analizaremos se encuadran en uno de estos tres casos:

1) f es continua excepto en la frontera de D (que es una región acotada).
2) f es no acotada en puntos aislados de D.
3) D es una región no acotada.

Ejemplos de integrales impropias

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$,
$f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$; $\iint\limits_D f\, dA$ da el área de la semiesfera de radio 1.



y
$y = \phi_2(x)$
D
$y = \phi_1(x)$
a
b
x
y
$y = \phi_2(x)$
D
$\phi_2(x) - \delta$
$D_{\eta,\delta}$
$y = \phi_1(x)$
$\phi_1(x) + \delta$
a
$a + \eta$
$b - \eta$
b
x

Caso 1. Teorema de Fubini para integrales impropias

Teorema

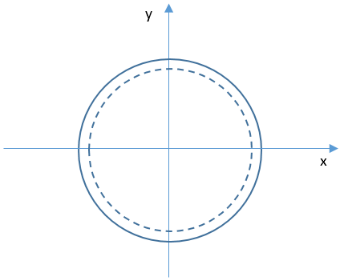
Sea D una región elemental del plano y $f \geq 0$ una función continua excepto quizá en puntos de la frontera de D. Si una de las integrales

$$\iint_D f(x,y)dA, \quad \underbrace{\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{para regiones } y\text{-simples}}, \quad \underbrace{\int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{para regiones } x\text{-simples}},$$

existe como integral impropia, entonces f es integrable y todas son iguales.

Observación: en este caso se dice que la integral es convergente.

1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$, $f:D\to\mathbb{R}$,
$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $\iint\limits_D f\,dA$ da el área de la semiesfera de radio 1.



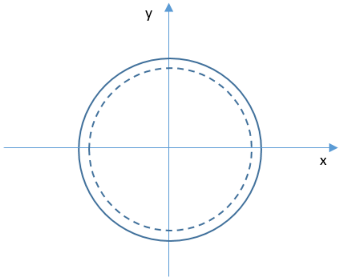
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta}=\pi.$$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-1+\eta}^{1-\eta}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=2\pi.$$

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$,
$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $\iint\limits_D f\,dA$ da el área de la semiesfera de radio 1.



$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\lim_{R\to 1}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{R\to 1}\left(-\sqrt{1-r^2}\,\Big|_0^R\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{R\to 1}\left(-\sqrt{1-R^2}+1\right)d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Caso 2: funciones $f \geq 0$ que no están definidas o no son acotadas en puntos aislados

Si D es una región x-simple o y-simple y f no está definida en $(x_0, y_0) \in D$ o f se hace «infinito»cerca de (x_0, y_0), pero sí es continua en todos los puntos de D excepto en (x_0, y_0), entonces $\displaystyle\iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA$ está definida.

Caso 2: funciones $f \geq 0$ que no están definidas o no son acotadas en puntos aislados

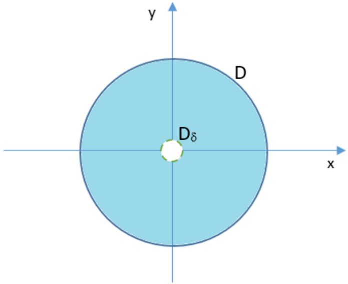
Si D es una región x-simple o y-simple y f no está definida en $(x_0, y_0) \in D$ o f se hace «infinito»cerca de (x_0, y_0), pero sí es continua en todos los puntos de D excepto en (x_0, y_0), entonces $\iint_{D \setminus D_\delta} f\, dA$ está definida.

Decimos que **f es integrable en D** o que **$\iint_D f\, dA$ es convergente** si

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{D \setminus D_\delta} f\, dA$$

existe.

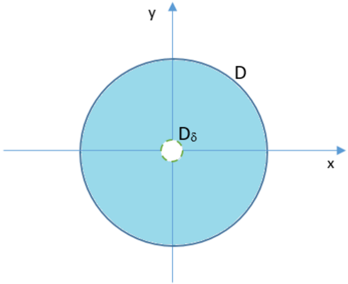
2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\iint\limits_D f\,dA$. No definida en $(0,0)$, no acotada en D. Se trabaja en una región $D \setminus D_\delta$, donde D_δ es un disco con radio δ, centrado en el origen.



$$\iint_{D \setminus D_\delta} f\,dA$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_\delta^1 \frac{1}{r} r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_\delta^1 dr\,d\theta = 2\pi(1-\delta)$$

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$\displaystyle\iint_D f\,dA$. No definida en $(0,0)$, no acotada en D. Se trabaja en una región $D \setminus D_\delta$, donde D_δ es un disco con radio δ, centrado en el origen.



$$\iint_{D\setminus D_\delta} f\,dA = \int_0^{2\pi}\int_\delta^1 \frac{1}{r} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_\delta^1 dr\,d\theta = 2\pi(1-\delta)$$

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\delta\to 0} \iint_{D\setminus D_\delta} f\,dA = 2\pi.$$

Caso 3: la región D es no acotada

Ya lo vimos en el Ejemplo 6.12, **integral gaussiana**, donde para integrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

se plantea

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-r^2} r\, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi. \end{aligned}$$