Trabajo Práctico 4

Ecuaciones diferenciales

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera"de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

1. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden.

   a) $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x$
   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$
   c) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$
   d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$
   e) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$
   f) $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$
   g) $(2x+y+1)y' = 1$
   h) $(2x+\ln x+1)y' = 1$
   i) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$
   j) $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$
   k) $(sen\theta)y'' - (cos\theta)y' = 2$

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$
   b) $y' + 20y = 24;\ y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$
   c) $(y-x)y' = y - x + 8;\ y = x + 4\sqrt{x+2}$

3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la ecuación diferencial dada.

   a) $y' = (y-1)(1-2y);\ \ln\dfrac{2y-1}{y-1} = x$
   b) $2xy + (x^2-y)y' = 0;\ -2x^2y + y^2 = 1$

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$
   b) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$

5. Determine el o los valores de m para que $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.

6. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = A\cos x + B\operatorname{sen} x$ de la ecuación diferencial $y''+y = 0$, para resolver el problema de valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

7. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = Ae^{x} + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, para resolver los problemas de valores iniciales cuyas condiciones se especifican a continuación:

   a) $y(0) = 1, y'(0) = 2$
   b) $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$

8. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, para resolver el problema de valores de frontera con $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

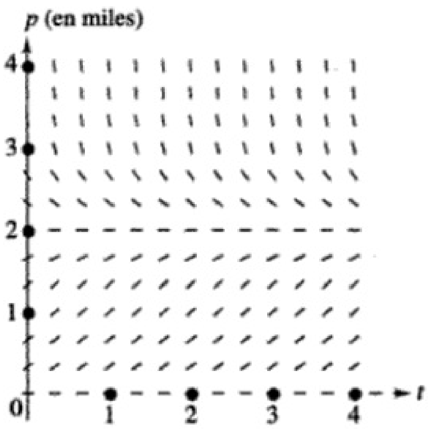
9. Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto (0,9). Plantee un PVI que permita hallarla.

10. La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación:

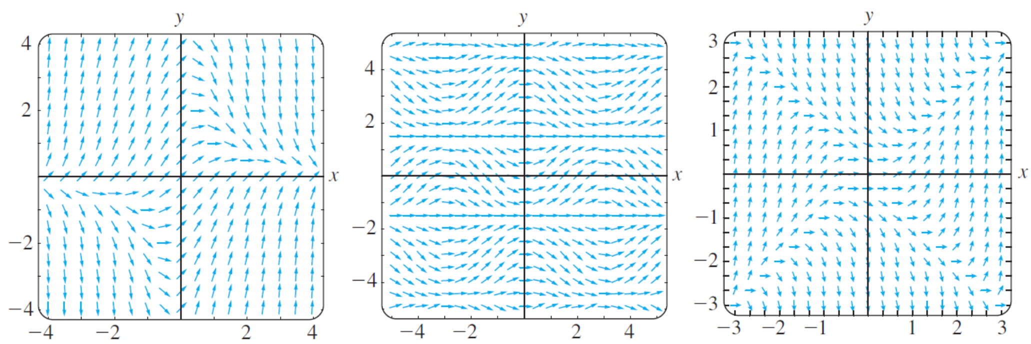
$$\frac{dp}{dt} = p(2 - p)$$

En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

   a) Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?
   b) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?
   c) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?



11. Dados los siguientes campos direccionales:



a) Indique a qué campo direccional corresponde cada ecuación:

$$i)\ y' = x^2 - y^2 \qquad ii)\ y' = 1 - xy \qquad iii)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$$

b) Para la ecuación dada en *ii*) represente en el gráfico correspondiente las curvas solución correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

1) $y(0) = 0$;

2) $y(2) = 2$.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ecuaciones Separables

12. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables si es posible:

    a) $\dfrac{dy}{dx} = sen(5x)$

    b) $dx + e^{3x}dy = 0$

    c) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares.)

13. Resuleva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.

14. Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2+1)$, $x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

15. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto de temperatura T se introduce en un medio a temperatura M, la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferentica $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial $dT/dt = k(M - T)$.

    a) Resuelva la ecuación diferencial en términos de T.

    b) Una cerveza fría, inicialmente a $2°C$, se calienta hasta $5°C$ en 3 minutos estando en un cuarto a $21°C$. Determine la temperatura de la cerveza si uno se demora 30 minutos en tomarla.

Ecuaciones Lineales

16. Determine si la ecuación diferencial dada es lineal. Si es así, halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.

    a) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

    b) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

    c) $y' + 3x^2y = x^2$

17. Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

18. Al determinar el factor integrante en la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden no usamos una constante de integración en la integral de $P(x)$, indique por qué.

Ecuaciones Exactas

19. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuélvala.

    a) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$

    b) $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)dy = 0$

    c) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$

20. Considere la ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y'(x) = 0$. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y que f es una función potencial de $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^2$. Si es posible, indique una solución a la ecuación planteada. Si no es posible, explique por qué.

21. Resuelva el siguiente PVI:

$$(4y - 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0, \; y(-1) = 2$$

22. Determine el valor de k para el que la ecuación diferencial sea exacta:

$$(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0$$

23. a) Muestre que una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación $(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0$ es $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.

    b) Demuestre que las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(1) = 1$ determinan la misma solución implícita.

    c) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial dada, tales que $y_1(0) = -2$ y $y_2(1) = 1$.

24. Responda verdadero o falso y justifique:
    Toda ecuación de primer orden separable $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ es exacta.

Ecuaciones con soluciones por sustitución

25. Resuelva las siguientes *ecuaciones de Bernoulli* usando sustituciones adecuadas:

    a) $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

    b) $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$

    c) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$

26. En el estudio de la población dinámica, uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la ecuación logística

$$P'(t) = P(t)(a - bP(t)),$$

donde a y b son constantes positivas. Resuelva la ecuación. Indique en qué instante la tasa de crecimiento de la población es máxima.

Ejercicios integradores:

27. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, exacta, lineal, Bernoulli o ninguna. Algunas ecuaciones pueden ser de más de una clase. No las resuelva.

    a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$
    b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y-x}$
    c) $(x+1)\frac{dy}{dx} = -y + 10$
    d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$
    e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$
    f) $t\frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$
    g) $(2x+y+1)y' = 1$

28. Clasifique cada ecuación diferencial y resuelva.

    a) $y' = (xy)^{1/4}$
    b) $y' + y = xe^{-x} + 1$
    c) $2ydx - xdy = 0$
    d) $(2x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + y^2)dy = 0$
    e) $xy' + y = x^4y^3$

29. Encuentre si existe $M(x,y)$ para que la ecuación $M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0$ sea exacta.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Problemas de valor inicial y frontera

30. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.

    a) $y = C_1 x + C_2 x\ln x$, $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(0,\infty)$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.
    b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
    c) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x \operatorname{sen} x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

Ecuaciones Homogéneas

31. En los siguientes problemas encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial dado tiene una solución única.

    a) $(x-2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
    b) $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

32. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty,\infty)$:

    a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$

b) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$
c) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$

33. ¿Qué deben cumplir las funciones y_1 e y_2 definidas en un mismo intervalo I para que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ sea una solución general de la ecuación diferencial $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ en I?

34. Compruebe que las siguientes funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo dado. Forme la solución general.

    a) $y'' - y' - 12y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$, $y_1 = e^{4x}$, $(-\infty, \infty)$.
    b) $y^{(4)} + y'' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$.

35. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

    a) $4y'' + y' = 0$
    b) $y'' + 8y' + 16y = 0$
    c) $y'' - 3y' + 2y = 0$
    d) $2y'' + 2y' + y = 0$
    e) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
    f) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

Ecuaciones no Homogéneas

36. En los siguientes problemas compruebe que la familia dada es solución de la ecuación diferencial no homogénea:

    a) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$.
    b) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$, $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$.

37. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:

    a) $y'' + 3y' + 2y = 6$
    b) $y'' + y' - 6y = 2x$
    c) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
    d) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
    e) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
    f) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

38. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:

    a) $y'' + y = \sec x$
    b) $y'' + y = \tan x$
    c) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$
    d) $y'' + y = \sec^2 x$

39. Obtenga la solución para los siguientes problemas de valor inicial:

    a) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    b) $y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    c) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
    d) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$.

Lista de ejercicios seleccionados: 1, 2ac, 3a, 4a, 6, 9, 10, 12b, 13, 16b, 17, 19, 21, 25ac, 32, 35, 37bcf, 38be, 39c.