Programa de Desarrollo Institucional 2018 – PDI 2018
Fortalecimiento de las Ciencias Básicas

NOTAS DE ÁLGEBRA PARA INGENIERÍA

Carolina Bernaldo de Quirós - Yanina Boiteux - Ana Narvaez
María Panella - Gabriela Tomazzeli - Noemí Vega

2018 AÑO DEL CENTENARIO DE LA REFORMA UNIVERSITARIA

Prólogo

Este material perfectible, que se presenta, está pensado para ayudar a los docentes a enseñar y al estudiante a aprender las ideas básicas de algunos contenidos curriculares de Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la UNCuyo, a saber: Lógica proposicional, Transformaciones lineales y Autovalores y autovectores.

Se han colocado algunas demostraciones con nivel adecuado para el estudiante de Ingeniería con el objetivo de ir logrando a generar la competencia de pensamiento crítico, y ejercicios adicionales resueltos al finalizar cada uno de los temas mencionados, con el fin de ayudarlo en sus prácticas de reflexión para el aprendizaje .

Se ha tratado de no perder la esencia que caracteriza a la fascinante rama de la matemática que es el Álgebra Lineal, tan usada actualmente en las ciencias, en general y en las Ingenierías, en particular.

Agradeciendo el apoyo de la Facultad de Ingeniería para la escritura de este texto y con el afán que sea de utilidad, esperamos sugerencias y aportes.

Ana Narvaez

LÓGICA PROPOSICIONAL

El gran filósofo y pensador Immanuel Kant, dejó una leyenda de absoluta verdad: “La Lógica es una ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, sin la cual no se comprende ni se razona”.

Así, todo desarrollo matemático exige razonar en forma válida, de allí que debamos recurrir a la Lógica, la cual nos brinda las herramientas necesarias para el estudio de los razonamientos, deducciones e inferencias y así poder concluir si éstas son o no correctas.

Por otra parte, la matemática exige un lenguaje claro y preciso, en ella solo se aceptan razonamientos correctos. Es entonces la lógica simbólica, la que se encarga de dar a cada expresión un significado exacto y a cada símbolo una interpretación sin ambigüedades.

Nos interesa entonces saber cuáles son los tipos de afirmaciones que deben usarse en los razonamientos matemáticos. Estos enunciados reciben el nombre de proposiciones.

Proposición

Una proposición es una afirmación de la que podemos decir, sin ambigüedad que, o es verdadera o es falsa.

Llamaremos valor de verdad de una proposición a su veracidad o falsedad.

De esta manera, el valor de verdad de una proposición verdadera es verdad y el de una proposición falsa es falso. Denotaremos verdad con V y falso con F.

Las proposiciones se corresponden con las oraciones declarativas o enunciativas. Como por ejemplo:

a) “sen150° = ½ ”

b) “El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ -\frac{3}{4}x + y = -2 \end{cases}$ tiene solución única.”

c) “Existen valores de n $\in$ IN que verifican que $n^3 + 1 = 0$”

Estos tres enunciados son proposiciones, de los cuales, el primero es verdadero y los dos restantes son falsos.

Cabe aclarar que no todos los enunciados son proposiciones, por ejemplo, los enunciados exclamativos, interrogativos, desiderativos y los que contienen variables no cuantificadas, no son proposiciones.

A continuación se presentan algunos ejemplos de estos tipos de enunciado:

"¿Vendrán esta noche?" Enunciado interrogativo

"¡Qué hermoso día!" Enunciado exclamativo

"Ojala vuelva mañana." Enunciado desiderativo

"x> 0 y x <2" Enunciado que contiene variables no cuantificadas

Estos enunciados no son proposiciones, ya que para cada uno de ellos no es posible determinar el valor de verdad. La última expresión puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de x.

Podemos decir que las proposiciones son los conceptos básicos sobre los cuales se construye la Lógica proposicional. Las representaremos con letras minúsculas tales como p, q, r, s, t, etc.

Las proposiciones pueden clasificarse en simples o compuestas.

Las **proposiciones simples** son aquellas que no pueden descomponerse en otras proposiciones. Como por ejemplo:

p: "2 es un número par" (proposición simple)

q: "3 es un número impar" (proposición simple)

En cambio:

r: "2 es un número par y 3 es un número impar" (proposición compuesta)

no es una proposición simple ya que está compuesta por más de una proposición simple.

Desde el punto de vista lógico, el contenido material de los enunciados resulta irrelevante, sólo nos interesa su valor de verdad.

Ejemplo 1 - Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

p: "2n+1, con n entero, es un número impar" V

q: "$\left\{x \in IR \ / \ tgx = \frac{1}{ctg(x)}\right\} = IR$" F

r: "x = 2 es solución de la ecuación $x^2 - 2x = 0$" V

s: "$\{x \in IR \ / \ sen^2x + cos^2x = 1\} = IR$" V

u: "El conjunto imagen de la función secante es [-1;1]" F

v: "La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución" F

Tablas de verdad

La tabla de verdad de una proposición compuesta, nos muestra todos los valores de verdad que puede tomar dicha proposición para cada una de las distintas combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

El tamaño de la tabla varía de acuerdo a la cantidad de proposiciones simples que la componen. Teniendo en cuenta que para cada proposición tenemos dos posibles valores de verdad, V o F, la cantidad de valores de verdad que se le puede asignar a una proposición compuesta, se puede obtener mediante la siguiente fórmula:

$$\text{cantidad de asignaciones de valores de verdad} : 2^n$$

Siendo n la cantidad de proposiciones simples que componen la proposición compuesta, cuya tabla de verdad se quiere construir.

Operaciones Lógicas. Conectivos lógicos

Las proposiciones simples se pueden combinar entre sí, mediante el uso de conectivos lógicos, dando así lugar a proposiciones compuestas.

El valor de verdad de una proposición compuesta está completamente determinado por los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen conjuntamente con la forma en que estén conectadas estas proposiciones.

A estas formas de conectar proposiciones, se las denomina operaciones lógicas, aquí estudiaremos:

- la negación
- la conjunción
- la disyunción incluyente
- la disyunción excluyente o diferencia simétrica
- la implicación
- la doble implicación.

De todas estas operaciones lógicas, solo la NEGACIÓN es una operación unitaria, es decir requiere de una sola proposición para ser aplicada, mientras que las restantes son operaciones binarias, necesitan de dos proposiciones para su aplicación.

Negación

La negación de una proposición p, le cambia a la misma su valor de verdad. Se simboliza $\sim p$ o $-p$ y se lee "no p"

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	**$\sim p$**
V	**F**
F	**V**

Ejemplo

Dada la proposición p: "25 es divisible por 5" V

Su negación es $\sim p$: "25 no es divisible por 5" F

Conjunción

La conjunción entre dos proposiciones p y q se simboliza $p \wedge q$, y se lee "p y q"

Esta nueva proposición $p \wedge q$ es VERDADERA sólo cuando ambas proposiciones componentes son VERDADERAS.

A continuación se muestra la tabla de verdad.

P	q	**$p \wedge q$**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Ejemplo:

Dadas las proposiciones:

p: "8 es número par" V

q: "8 es divisible por 4" V

La conjunción entre ambas proposiciones, simbolizada por $p \wedge q$, puede expresarse:

$p \wedge q$: "8 es número par y 8 es divisible por 4", cuyo valor de verdad es V, ya que tanto p como q son V. Esta proposición también puede expresarse como:

$p \wedge q$: "8 es número par y divisible por 4"

Disyunción incluyente

La disyunción entre dos proposiciones p y q se simboliza $p \vee q$, y se lee "p o q".

Esta nueva proposición $p \vee q$ es FALSA sólo cuando ambas proposiciones componentes son FALSAS o verdadera cuando al menos una de las proposiciones componentes es verdadera.

A continuación se muestra la tabla de verdad.

p	*q*	$\boldsymbol{p \vee q}$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

p: "5 es el inverso aditivo de - 5" V

q: "5 es el inverso multiplicativo de – 1/5" F

La disyunción entre ambas proposiciones, simbolizada por $p \vee q$, puede expresarse:
$p \vee q$: "5 es el inverso aditivo de – 5 o 5 es el inverso multiplicativo de – 1/5", cuyo valor de verdad es V, ya que al menos la proposición p es V.

Disyunción excluyente o diferencia simétrica

La disyunción excluyente entre dos proposiciones p y q se simboliza $p \veebar q$, y se lee "o p o q" o bien "p o q"

La nueva proposición $p \veebar q$, es FALSA cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad o VERDADERA cuando ambas proposiciones tienen diferente valor de verdad.

A continuación se muestra su tabla de verdad.

p	*q*	$\boldsymbol{p \veebar q}$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

p: "$2^3 = 6$" F

q: "$2^3 = 8$" V

La disyunción exclusiva entre ambas proposiciones, simbolizada por $p \underline{\vee} q$, puede expresarse:
$p \underline{\vee} q$: "$2^3 = 6$ o $2^3 = 8$", cuyo valor de verdad es V, ya que las proposiciones p y q tienen distinto valor de verdad.

Implicación o condicional

La implicación entre dos proposiciones p y q, se simboliza $p \Rightarrow q$ y se lee "Si *p* entonces *q*"; "*p* implica *q*";"q, si p"; "p sólo si q", etc.

Esta nueva proposición $p \Rightarrow q$ es FALSA, sólo cuando el antecedente es VERDADERO y el consecuente es FALSO.

Su tabla de verdad es:

p	*q*	$p \Rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

p: "8 es múltiplo de 4"

q: "8 es divisible por 2"

La implicación entre ambas proposiciones, simbolizada por $p \Rightarrow q$, puede expresarse:
$p \Rightarrow q$: "Si 8 es múltiplo de 4, entonces es divisible por 2", cuyo valor de verdad es V, ya que las proposiciones p y q son ambas V. Esta proposición también puede expresarse como:
$p \Rightarrow q$: "Que 8 sea múltiplo de 4 implica que 8 es divisible por 2".

Doble implicación o bicondicional

La doble implicación entre dos proposiciones *p* y *q*, se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p sí y solo si q", "p es condición necesaria y suficiente para q"; "p es equivalente a q", etc.

La nueva proposición $p \Leftrightarrow q$, es VERDADERA cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Su tabla de verdad es:

p	*q*	***p* ⇔ *q***
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

p: "El triángulo abc es rectángulo"

q: "El triángulo abc tiene un ángulo recto"

La dobleimplicación entre ambas proposiciones, simbolizada por $p \Leftrightarrow q$, puede expresarse: $p \Leftrightarrow q$: "El triángulo abc es rectángulo si y sólo si tiene un ángulo recto", cuyo valor de verdad es V, ya que ambas proposiciones p y q tienen el mismo valor de verdad.

En síntesis:

OPERACIÓN LÓGICA	CONECTIVO (símbolo)	PROPOSICIÓN	LENGUAJE COLOQUIAL
NEGACIÓN	$\sim$	$\sim p$, $-p$	no *p*
CONJUNCIÓN	$\wedge$	$p \wedge q$	*p* y *q*
DISYUNCIÓN INCLUYENTE	$\vee$	$p \vee q$	*p* o *q*
DISYUNCIÓN EXCLUYENTE	$\veebar$	$p \veebar q$	o *p* o *q* *p* o *q*
IMPLICACIÓN	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	si p entonces q p implica q q si p p sólo si q
DOBLE IMPLICACIÓN	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p es equivalente a q p si y sólo si q

Ejemplo

Construya la tabla de valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ b) $[(p \wedge q) \vee \sim q] \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

a) $[(p \vee q) \wedge \sim q\,] \Leftrightarrow (\,p \wedge \sim q)$

Solución

Como en la proposición dada aparecen dos proposiciones simples: *p* y *q,* la cantidad de posibles valores de verdad que se les puede atribuir a *p y* a *q* es $2^2 = 4$

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q$	$[(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \sim \boldsymbol{q}\,] \Leftrightarrow (\,\boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q})$
V	V	F	V	F	F	**V**
V	F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	**V**
F	F	V	F	F	F	**V**

b) $[(p \wedge q) \vee \sim q\,] \Leftrightarrow (\,p \vee \sim q)$

Solución

Como en la proposición dada aparecen dos proposiciones simples: *p* y *q,* la cantidad de posibles valores de verdad que se les puede atribuir a *p y* a *q* es $2^2 = 4$

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$	$p \vee \sim q$	$[(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \sim \boldsymbol{q}\,] \Leftrightarrow (\,\boldsymbol{p} \vee \sim \boldsymbol{q})$
V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	F	V	V	**V**
F	V	F	F	F	F	**V**
F	F	V	F	V	V	**V**

Jerarquía de los conectivos

Las proposiciones compuestas pueden a su vez volver a combinarse entre sí formando nuevas proposiciones.

Para evitar el excesivo uso de paréntesis, se puede establecer entre los conectivos lógicos definidos, una jerarquía, de manera similar a la establecida entre operaciones matemáticas.

Esta convención indica que la doble implicación es más fuerte que la implicación, ésta a su vez es más fuerte que la conjunción y que la disyunción y éstas a su vez lo son respecto de la negación.

El siguiente cuadro nos muestra los conectivos ordenados de mayor a menor jerarquía.

CONECTIVO	SÍMBOLO
Doble implicación	$\Leftrightarrow$
Implicación	$\Rightarrow$
Conjunción y disyunción	$\wedge$; $\vee$; $\underline{\vee}$
Negación	$\sim$

Teniendo en cuenta esta jerarquía, la proposición $p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r$ es equivalente a $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$, la misma podrá escribirse de cualquiera de las dos formas.

Es importante destacar que si se desea construir la tabla de verdad de una proposición, se deben resolver las operaciones lógicas de menor a mayor jerarquía, es decir primero la negación, luego las conjunciones y disyunciones, después las implicaciones y por último la doble implicación.

En las expresiones que incluyen algunos o todos los operadores: $\sim$; $\wedge$ y $\vee$, en la ausencia de paréntesis, primero se evalúa la negación ($\sim$), después la conjunción $\wedge$ y por último, la disyunción $\vee$. Esta convención se conoce como PRECEDENCIA DEL OPERADOR.

Según esta convención, la proposición $\sim p \wedge q \vee r$ debe interpretarse como $(\sim p \wedge q) \vee r$, al igual que la proposición $\sim p \vee q \wedge r$ debe interpretarse como $\sim p \vee (q \wedge r)$.

Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes cuando toman los mismos valores de verdad para todos los valores de verdad posibles de las proposiciones simples que la componen.

Tautología

Una TAUTOLOGÍA es una proposición que es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad que se le asigne a cada una de las proposiciones simples que la componen.

Las tautologías se indican con **t**.

Ejemplos

a) $p \vee \sim p$

Construimos la tabla de valores de verdad de dicha proposición. Como en la proposición dada aparece una sola proposición simple (*p*), la cantidad de valores de verdad que se le puede atribuir a *p* son dos ($2^1 = 2$).

p	$\sim p$	$\boldsymbol{p \vee \sim p}$
V	F	**V**
F	V	**V**

De la tabla se puede ver que la proposición $\boldsymbol{p \vee \sim p}$ es siempre verdadera, cualesquiera sean los valores de verdad de *p*, por lo tanto $\boldsymbol{p \vee \sim p}$ es una tautología.

b) $p \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow p$

Como en la proposición dada aparecen dos proposiciones simples: *p* y *q*, la cantidad de posibles valores de verdad que se les puede atribuir a *p* y a *q* es $2^2 = 4$.

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$	$\boldsymbol{p \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow p}$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	**V**

La tabla nos muestra que la proposición $\boldsymbol{p \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow p}$ es siempre verdadera, por lo tanto dicha proposición es una tautología.

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

Como en la proposición dada aparecen tres proposiciones simples: *p*, *q* y *r*, la cantidad de posibles valores de verdad que se les puede atribuir a *p*, *q* y *r* es $2^3 = 8$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$\boldsymbol{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)}$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Se concluye que la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es una tautología.

Contradicción

Una CONTRADICCIÓN es una proposición que es siempre falsa, independientemente de los valores de verdad que se le asignen a cada una de las proposiciones simples que la componen.

Las contradicciones se indican con **c.**

Ejemplo

a) $p \wedge \sim p$

Construimos la tabla de verdad:

p	$\sim p$	$\boldsymbol{p \wedge \sim p}$
V	F	**F**
F	V	**F**

Esta tabla nos muestra que la proposición $p \wedge \sim p$ es siempre F, por lo que dicha proposición es una contradicción.

Contingencia

Si una proposición compuesta no es ni tautología ni contradicción recibe el nombre de CONTINGENCIA.

Ejemplo

a) $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \vee (q \wedge r)]$

Construimos la tabla de verdad

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$\boldsymbol{[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \vee (q \wedge r)]}$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	V	**F**
V	F	V	V	V	F	V	**V**
V	F	F	V	F	F	V	**F**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	F	**V**
F	F	V	F	F	F	F	**V**
F	F	F	F	F	F	F	**V**

Esta tabla nos muestra que para algunos valores de verdad de las proposiciones simples que la componen, la proposición dada es V y para otros valores de verdad de p, q y r, es F. Por lo que al no ser ni una tautología ni una contradicción, recibe el nombre de contingencia.

Leyes lógicas

LEY	Símbolos
Involución	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la conjunción	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la disyunción	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Conmutativa de la conjunción	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Conmutativa de la disyunción	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Asociativa de la conjunción	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
Asociativa de la disyunción	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Distributiva de la conjunción respecto de la disyunción	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Distributiva de la disyunción respecto de la conjunción	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Elemento neutro para la conjunción	$p \wedge \boldsymbol{t} \Leftrightarrow p$
Elemento neutro para la disyunción	$p \vee \boldsymbol{c} \Leftrightarrow p$
Elemento absorbente para la conjunción	$p \wedge \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}$
Elemento absorbente para la disyunción	$p \vee \boldsymbol{t} \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$
De Morgan para la conjunción	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
De Morgan para la disyunción	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Transitividad de la implicación	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
Transitividad de la doble implicación	$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
Negación de la doble implicación	$p \veebar q \Leftrightarrow \sim(p \Leftrightarrow q)$
Equivalencia implicación	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Negación de la implicación	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
Equivalencia doble implicación	$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

Consistencia	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
	$p \wedge \sim p \Leftrightarrow \boldsymbol{c}$ $p \vee \sim p \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$

Simplificación de proposiciones

Las leyes lógicas permiten simplificar proposiciones compuestas en proposiciones más simples.

Ejemplo
Simplifique las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge q) \vee \sim p$
b) $(p \wedge \sim q) \vee [\ q \Rightarrow \sim(p \wedge q)]$

Solución

a) $(p \wedge q) \vee \sim p$ por prop. distributiva de la disyunción respecto de la conjunción

$(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)$ por $p \vee \sim p \Leftrightarrow t$

$\boldsymbol{t} \wedge (q \vee \sim p)$ por prop. elemento neutro para la conjunción

$q \vee \sim p$

Concluimos que $[(p \wedge q) \vee \sim p] \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$

b) $(p \wedge \sim q) \vee [\ q \Rightarrow \sim(p \wedge q)]$ expresando la implicación como disyunción

$(p \wedge \sim q) \vee [\sim q \vee \sim(p \wedge q)]$ por De Morgan

$(p \wedge \sim q) \vee [\sim q \vee (\sim p \vee \sim q)]$ por propiedad asociativa de la disyunción

$[(p \wedge \sim q) \vee \sim q\ ] \vee (\sim p \vee \sim q)$ por ley de consistencia

$\sim q \vee (\sim p \vee \sim q)$ por prop. asociativa y conmutativa de la disyunción

$(\sim q \vee \sim q) \vee \sim p$ por idempotencia de la disyunción

$\sim q \vee \sim p$

Concluimos que $\{(p \wedge \sim q) \vee [\ q \Rightarrow \sim(p \wedge q)]\} \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p)$

La implicación

En toda implicación de la forma $p \Rightarrow q$, la proposición *p* recibe el nombre de hipótesis o ANTECEDENTE de la implicación y la proposición *q* recibe el nombre de conclusión o CONSECUENTE de la implicación.

$$\underbrace{p}_{\boxed{\text{ANTECEDENTE}}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\boxed{\text{CONSECUENTE}}}$$

Condición necesaria, condición suficiente y condición necesaria y suficiente.

En este curso trabajaremos exclusivamente con implicaciones verdaderas. Teniendo en cuenta esto, dada una implicación verdadera, el antecedente *p* es condición suficiente para el consecuente *q*, mientras que el consecuente *q* es condición necesaria para el antecedente p.

$$p \Rightarrow q$$

p es condición SUFICIENTE para q

q es condición NECESARIA para p

Una **condición necesaria** es una condición que se necesita para lograr un resultado o conclusión en particular, es decir, si no se cumple la condición no se puede lograr la conclusión, pero que la condición se cumpla no garantiza que dicho resultado se logre, este puede lograrse o no.

Ejemplo

p: “8 es múltiplo de 4”
q: “8 es número par”

$p \Rightarrow q$: “Si 8 es múltiplo de 4, entonces 8 es un número par.” V

Dada la implicación verdadera, podemos afirmar que:

p* es condición suficiente para *q, esto quiere decir que saber que un número es múltiplo de 4 es suficiente para afirmar que dicho número es par.

q* es condición necesaria para *p, es decir que para que un número sea múltiplo de 4 es necesario que dicho número sea par. En otras palabras, si un número no es par no puede ser múltiplo de 4.

Cabe aclarar que el hecho de que *q* sea condición necesaria no implica que sea suficiente para *p*, pues un número puede ser par como por ejemplo el número 6, pero no ser múltiplo de 4.

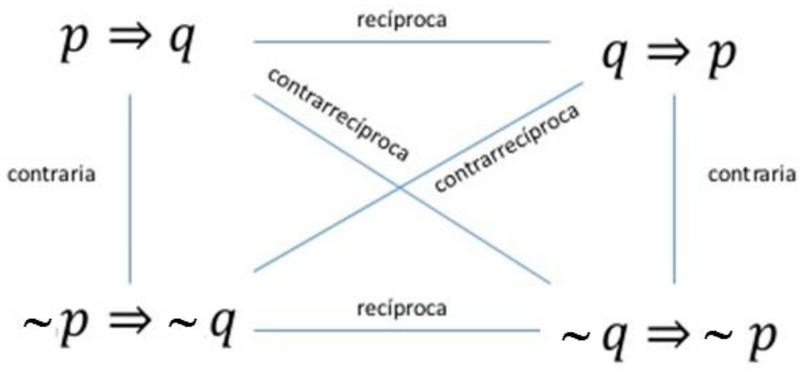
Implicaciones asociadas

Dada una implicación *p*⇒*q*, a dicha implicación es posible asociarle otras implicaciones:

Implicación recíproca: aquella que se obtiene a partir de la implicación dada intercambiando antecedente y consecuente. Es decir $q \Rightarrow p$

Implicación contraria: aquella que se obtiene a partir de la implicación dada negando antecedente y consecuente. Es decir $\sim p \Rightarrow \sim q$

Implicación contrarrecíproca: aquella que se obtiene a partir de la implicación dada negando e intercambiando antecedente y consecuente. Es decir $\sim q \Rightarrow \sim p$.



Toda implicación con su implicación contrarrecíproca siempre tienen el mismo valor de verdad. Es decir se trata de implicaciones equivalentes. Simbólicamente $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Aplicación: circuitos lógicos digitales

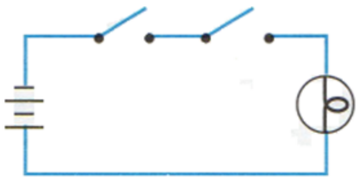
En 1930 Claude Shannon un estudiante del Instituto Tecnológico de Massachusetts, observó la analogía entre el funcionamiento de ciertos dispositivos y los conectivos lógicos.

El siguiente dibujo muestra las dos posiciones de un interruptor.

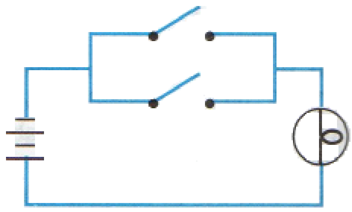
Interruptor abierto | Interruptor cerrado

Cuando el interruptor se cierra, la corriente puede fluir por el circuito, mientras que cuando el interruptor está abierto, la corriente no fluye.

Gráfico de circuitos



circuito en serie



circuito en paralelo

En el primer circuito, la corriente fluye y por lo tanto la lámpara se enciende si y sólo si, ambos interruptores están cerrados. En este caso se dice que los interruptores están en serie.

En el segundo circuito, la corriente fluye y por lo tanto se enciende la lámpara si y sólo si, al menos uno de los interruptores está cerrado. En este caso se dice que los interruptores están en paralelo.

Si consideramos la siguiente asignación

<u>Interruptores</u>
Circuito cerrado o circulación de corriente: 1
Circuito abierto o no circula corriente: 0

<u>Lámparas</u>
Encendida: 1
Apagada: 0

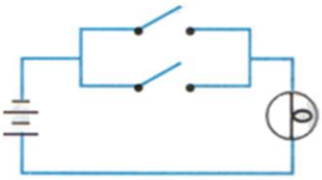
De esta manera, para un circuito en SERIE, se puede construir la siguiente tabla de entradas y salidas.

circuito en serie

Interruptores		*ESTADO*
p	*q*	*Lámpara*
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

La lámpara se enciende sólo si, ambos interruptores están cerrados

Para un circuito en PARALELO, la tabla de entradas y salidas será la siguiente.



circuito en paralelo

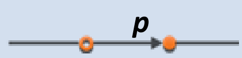
Interruptores		ESTADO
p	q	*Lámpara*
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

La lámpara se enciende cuando al menos uno de los interruptores está cerrado.

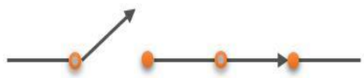
Si ahora **consideramos**:

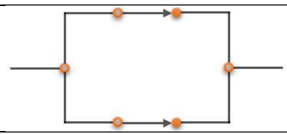
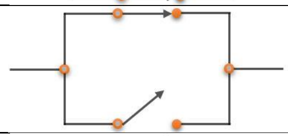
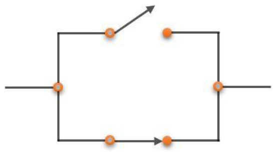
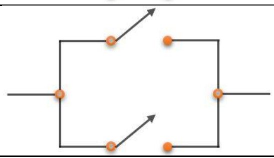
1 equivalente a V

0 equivalente a F

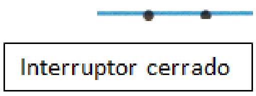
p	*circuitos*	
V		**Circula corriente**
F		**No circula corriente**

Podemos observar que la tabla de entradas y salidas de un circuito con interruptores en serie, se corresponde con la tabla de verdad de una proposición de la forma $p \wedge q$ (conjunción), de la misma manera que la tabla de entradas y salidas de un circuito con interruptores en paralelo, se corresponde con la tabla de verdad de una proposición de la forma $p \vee q$ (disyunción).

p	***q***	***Circuito en serie***	$p \wedge q$	
V	**V**		**V**	Circula corriente
V	**F**		**F**	No circula corriente
F	**V**		**F**	No circula corriente
F	**F**		**F**	No circula corriente

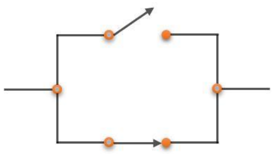
p	**q**	**Circuitos**	$p \vee q$	
V	**V**		**V**	Circula corriente
V	**F**		**V**	Circula corriente
F	**V**		**V**	Circula corriente
F	**F**		**F**	No circula corriente

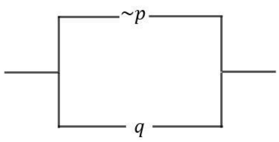
NOTA: Por simplicidad en la construcción de los gráficos de los circuitos, **en algunos casos**, en lugar de distinguir los interruptores como abierto o cerrado mediante los gráficos



es aceptable la representación en la cual a los interruptores cerrados por los que circula corriente se los indica con una proposición sin negar (p) y a los interruptores abiertos, por los que no circula corriente se los indica con una proposición negada (~ p).

De esta manera, los circuitos siguientes son equivalentes.



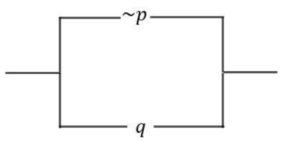


Circuito lógico que representa un condicional

Para representar un condicional por medio de un circuito lógico, nos basamos en la siguiente ley lógica:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Según esta ley, la implicación p $\Rightarrow$ q es equivalente a la disyunción, ~ p $\vee$ q, por lo tanto, el circuito que representa a $p \Rightarrow q$ es el siguiente:



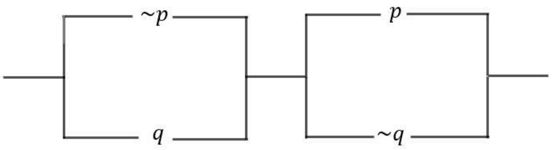
Circuito lógico que representa un bicondicional

Para representar un bicondicional por medio de un circuito lógico, nos basamos en las siguientes leyes lógicas:

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$$

De esta manera, un bicondicional es equivalente a la conjunción de dos disyunciones. El circuito que representa a p $\Leftrightarrow$ q, es:



Circuito lógico de la disyunción excluyente

Por ultimo para representar una disyunción excluyente por medio de un circuito lógico, debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$p \veebar q \Leftrightarrow \sim (p \Leftrightarrow q)$$

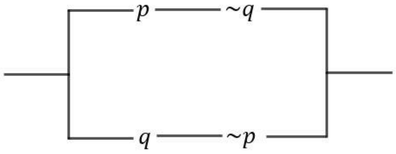
$$p \veebar q \Leftrightarrow \sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

$$p \veebar q \Leftrightarrow \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$$

$$p \veebar q \Leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)]$$

$$p \veebar q \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$$

Esta ley nos dice que toda diferencia simétrica es equivalente a la conjunción de dos disyunciones. El circuito que representa a p $\underline{\vee}$ q es:

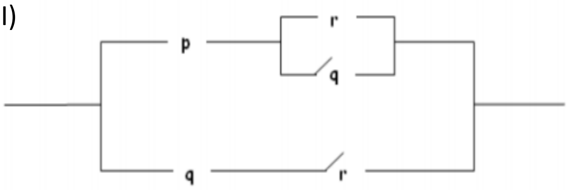


En particular, los ingenieros electrónicos utilizan el lenguaje lógico para simplificar circuitos complicados.

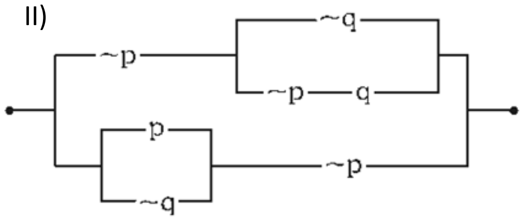
Ejemplo

Dados los siguientes circuitos:

I)



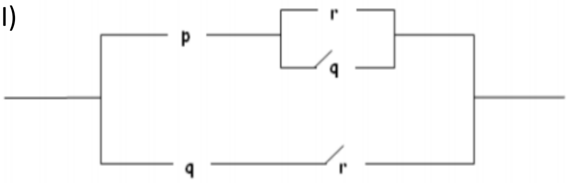
II)



a) Escriba la proposición equivalente al circuito dado.
b) Simplifique dicha proposición mediante el uso de las leyes lógicas.
c) Construya el circuito lógico más simple equivalente al dado.

Solución

I)

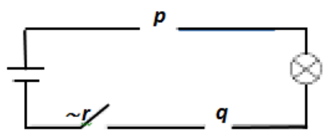


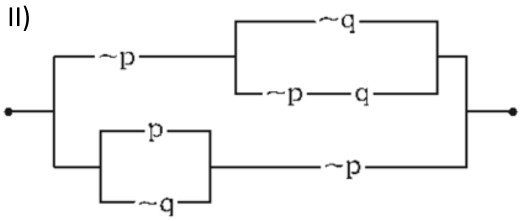
a) La proposición equivalente al circuito I) es: $[\,p \wedge (\,r \vee \sim q)] \vee (q \wedge \sim r)$

b) Simplificando la proposición

$[\,p \wedge (\,r \vee \sim q)] \vee (q \wedge \sim r)$	por Ley de De Morgan y ley conmutativa de la disyunción
$[\,p \wedge (\,r \vee \sim q)] \vee \sim (\mathrm{r} \vee \sim q)$	por Ley $[(\,p \wedge q\,) \vee \sim q] \Leftrightarrow p \vee \sim q$ (ejemplo 2)
$p \vee \sim (\,r \vee \sim q)$	por Ley de De Morgan
$p \vee (\sim r \wedge\, q)$	

c) El circuito I) es equivalente a:





Solución

a) La proposición equivalente al circuito II) es $\{ \sim p \wedge [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$

b) Simplificando la proposición:

$\{ \sim p \wedge [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$ por prop. distributiva de la $\vee$ respecto de la $\wedge$

$\{ \sim p \wedge [\mathbf{(\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)}]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$ por $p \vee \sim p \Leftrightarrow t$

$\{ \sim p \wedge [(\sim q \vee \sim p) \wedge \mathbf{t}]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$ por Elem. Neutro de la $\wedge$

$\{ \sim p \wedge [(\sim q \vee \sim p)]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$ por prop. conmutativa de la $\wedge$

$[\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p)] \vee \mathbf{[\sim p \wedge (p \vee \sim q)}]$ por prop. distrib. de la $\wedge$ respecto de la $\vee$ (factor común)

$\sim p \wedge [(\sim q \vee \sim p) \vee (p \vee \sim q)]$ por prop. conmutativa y asociativa de la $\vee$

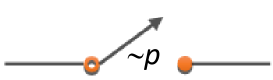
$\sim p \wedge [(\sim q \vee \sim q) \vee (p \vee \sim p)]$ por idempotencia de por la $\vee$ y por $p \vee \sim p \Leftrightarrow t$

$\sim p \wedge (\sim q \vee \mathbf{t})$ por elemento absorbente de la $\vee$

$\sim p \wedge \mathbf{t}$ por prop. elemento neutro de la $\wedge$

$\sim p$

c) El circuito II) es equivalente a:



Función proposicional

En matemática se suelen emplear expresiones tales como "$x^2 - 1 > 0$". Este enunciado no es una proposición, ya que si no conocemos el valor de x, no podemos atribuirle un valor de verdad. Es decir su valor de verdad depende del valor de la variable x. Por ejemplo, si $x = 2$ la expresión es verdadera, pero si $x = 1$, la expresión es falsa.

A estas expresiones en las cuales el valor de verdad depende del valor que se le asigne a la variable x, se las llama funciones proposicionales. Se designan con letras mayúsculas, de la siguiente forma P(x); Q(x); ….., etc.

Podemos escribir entonces: P(x) : "$x^2 - 1 > 0$".

Definición:

> Se llama **FUNCIÓN PROPOSICIONAL** a todo enunciado que contiene un número finito de variables.

Toda función proposicional se convierte en una proposición cuando se le atribuyen a cada una de las variables un valor específico.

Al conjunto de valores que pueden tomar la o las variables se lo llama dominio de la función proposicional.

Así por ejemplo son funciones proposicionales:

P(x,y): "$x + y > 0$" Dominio: IR^2

Q(x): "x es un número par" Dominio: Z

Donde P(2;3): "$2 + 3 > 0$" resulta ser una proposición verdadera. Y P(- 5;2): "$-5 + 2 > 0$" es una proposición falsa.

De igual manera, Q(12): "12 es un número par" es una proposición verdadera y Q(7): "7 es un número par" resulta ser una proposición falsa.

Otra forma de lograr que una función proposicional se convierta en una proposición, es cuantificándola.

Cuantificadores

Hay dos tipos de cuantificadores:

CUANTIFICADOR	Símbolo	Se lee:	Su esquema es:
EXISTENCIAL	$\exists$	"existe"; "para algún"; "para al menos uno"	$\exists x/P(x)$
UNIVERSAL	$\forall$	"para todo"; "para cualquier"	$\forall x: P(x)$

En toda función proposicional P(x) la variable x recibe el nombre de variable libre. Si cuantificamos una función proposicional, decimos que la variable está acotada por el cuantificador, es decir, la variable deja de ser libre.

Toda afirmación sin variables libres es una proposición. Es decir toda función proposicional cuantificada es una proposición.

Negación de una función proposicional cuantificada

Para negar que una proposición es verdadera para todo elemento x de un conjunto X, es suficiente encontrar un valor de x del conjunto X para el cual, la proposición no se verifica.

$$\sim[\forall x: P(x)] \Leftrightarrow [\exists x /\sim P(x)]$$

Para negar que una proposición es verdadera para algunos valores x de X, debemos demostrar que la proposición es falsa para todo valor x de X.

$$\sim[\exists x/P(x)] \Leftrightarrow [\forall x : \sim P(x)]$$

Ejemplo
Niegue la siguiente proposición: $(\forall x \in IR)(\exists\, y \in IR)/\, x + y = 0$

Solución

a) $(\forall x \in IR)(\exists\, y \in IR)/\, x + y = 0$

La negación de $(\forall x \in IR)(\exists\, y \in IR)/\, x + y = 0$ será:

$$\sim[(\forall x \in IR)(\exists y \in IR)/\ x + y = 0] \Leftrightarrow (\exists x \in IR)/\sim[(\exists y \in IR)/\ x + y = 0]$$

$$\sim[(\forall x \in IR)(\exists y \in IR)/\ x + y = 0] \Leftrightarrow (\exists x \in IR)(\forall\ y \in IR):\ \sim[\ x + y = 0]$$

$$\sim[(\forall x \in IR)(\exists y \in IR)/\ x + y = 0] \Leftrightarrow (\exists x \in IR)(\forall\ y \in IR):\ [\ x + y \neq 0]$$

La negación es: $(\exists x \in IR)(\forall\ y \in IR):\ [\ x + y \neq 0]$

Métodos de demostración

La Lógica es la herramienta que nos permite analizar las demostraciones.

Conceptos previos

Axioma: es una proposición evidente en sí misma y que por lo tanto, no necesita demostración. Por ejemplo: "Por dos puntos pasa una única línea recta".

Postulado: es una proposición que se admite sin demostración, aunque sin la evidencia del axioma. Por ejemplo: "Por un punto exterior a una recta sólo se puede dibujar una sola paralela a la recta".

Teorema: es una proposición que para ser evidente necesita demostración. Por ejemplo:

"La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos".

Lema: es un teorema preliminar que sirve de base para demostrar otras proposiciones.

Corolario o consecuencia: es un teorema cuya verdad se deduce simplemente de otro ya demostrado.

En Matemática, es común, que se pida probar la veracidad o falsedad de un enunciado.

Si un enunciado es falso, la falsedad del mismo se muestra mediante un contraejemplo. Es decir con un ejemplo que muestre que dicho enunciado no se cumple. Por ejemplo:

El enunciado $(\forall\ a \in IR)\ (\forall\ b \in IR)$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ es FALSO

Mostramos su falsedad mediante el siguiente contraejemplo.

Sea $a = 2$ y $b = 3$

$(a + b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Esto muestra que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, es decir, que el enunciado es FALSO

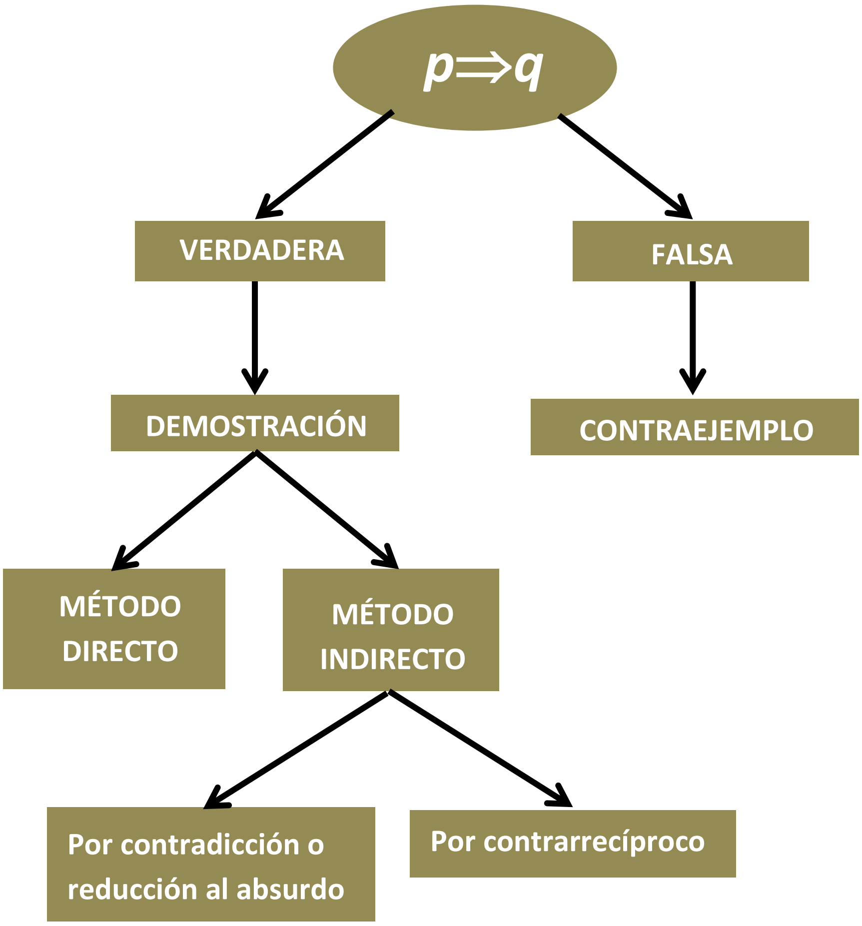
Si un enunciado es verdadero, la forma de probar la veracidad del mismo es sólo por medio de una demostración.

Una **demostración** es una sucesión de afirmaciones que permiten argumentar la validez de un enunciado matemático. Alguna de estas afirmaciones pueden ser axiomas, definiciones o resultados establecidos previamente.

* Si dicho enunciado tiene forma de **condicional**, entonces el antecedente es la hipótesis (verdades de las que partimos) y el consecuente es la tesis (conclusión a la que debemos llegar partiendo de la hipótesis).

$$p \Rightarrow q$$

HIPÓTESIS (Premisa) — TESIS (Conclusión)



Existen varios métodos de demostración:

. Demostración directa

. Demostración indirecta por contrarrecíproco

. Demostración indirecta por reducción al absurdo

1) Demostración directa:

La demostración directa de un enunciado condicional, de la forma $p\Rightarrow q$, comienza suponiendo que p es verdadera y concluyendo que q es verdadera.

Ejemplo: Demuestre que:

"Si a y b son números pares, entonces $a + b$ es también un número par"

Demostración por el método directo

"Si *a* y *b* son números pares, entonces *a* + *b* es también un número par"

H) *a* es número par
b es número par

T) *a* + *b* es número par

D) Por definición de número par:

"Un número entero *a* es par si existe un entero n, tal que *a* = 2n"

Por hipótesis sabemos que :

a es par, por lo tanto: $\boldsymbol{a = 2n \;,\; n \in Z}$ **y**

b es par, por lo tanto: $\boldsymbol{b = 2m \;,\; m \in Z}$

Teniendo en cuenta esto:

$\boldsymbol{a + b = 2n + 2m}$

$\boldsymbol{a + b = 2(n + m)}$ donde $n + m = k \in Z$ ya que la suma de números enteros es otro entero.

$\boldsymbol{a + b = 2k \quad k \in Z}$

Por lo tanto:

***a* + *b* es un número par**

Con esto queda demostrada la implicación por el método directo.

2) Demostración indirecta

Este tipo de demostración se aplica cuando la demostración directa se complica.

La demostración indirecta puede ser:

- por contrarrecíproco

- por contradicción o por reducción al absurdo.

2.1) Demostración por contrarrecíproco

Este tipo de demostración se basa en la siguiente ley $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
La cual nos dice que toda implicación $p \Rightarrow q$, es equivalente a su implicación contrarrecíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$.
Por lo tanto, la demostración indirecta, por contrarrecíproco del enunciado $p \Rightarrow q$ consiste en partir de la negación de q y junto con otros axiomas, definiciones y/o teoremas demostrados anteriormente, concluir que *p* también es falso.

Ejemplo

Demuestre que: ***"Si a² es par entonces a es un número par"***

Demostración por método indirecto: contrarrecíproco

"Si a² es par entonces a es un número par"

Teniendo en cuenta la siguiente ley:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Sabemos que toda implicación es equivalente a su implicación contrarrecíproca.

Por lo tanto, la implicación anterior es equivalente a:

"Si *a* no es par entonces *a*² no es par" o "Si *a* es impar entonces *a*² es impar"

Este método consiste en demostrar esta última implicación.

H) a es impar **T)** a^2 es impar

D) Por definición de número impar:

"Un número entero a es impar si existe un entero n, tal que $a = 2n + 1$ "

Por hipótesis sabemos que:

a es impar, por lo tanto: $\boldsymbol{a = 2n + 1}$, $\boldsymbol{n \in Z}$

calculamos ahora a^2:

$$\boldsymbol{a^2 = (2n + 1)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 = 4n^2 + 4n + 1}$$
$$\boldsymbol{a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1} \quad \text{teniendo en cuenta que } 2n^2 + 2n = k \in Z$$
$$\boldsymbol{a^2 = 2k + 1 \quad \text{con } k \in Z}$$

Concluimos entonces que:

a^2 es impar

De esta manera queda demostrada la implicación contrarrecíproca, pero como esta es equivalente a la implicación directa, queda demostrada también ésta última por método indirecto (contrarrecíproco).

2.2) Demostración por contradicción o por reducción al absurdo

La demostración por contradicción se basa en la ley

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

La cual nos dice que la negación de una implicación es equivalente a la conjunción de su antecedente con la negación de su consecuente.

De esta manera, la demostración por contradicción consiste en partir de la suposición de que la implicación dada es falsa, es decir, partir de la veracidad del antecedente y la falsedad del consecuente, y luego mediante axiomas, definiciones y/o teoremas demostrados anteriormente, llegar a una contradicción. Esto implicará que la suposición de la que se partió es falsa por lo que se concluye que la implicación inicial es verdadera.

Ejemplo

Demuestre que: **"Si a^2 es par entonces a es un número par"**

Demostración por método indirecto: Reducción al absurdo o contradicción

"Si a^2 es par entonces a es un número par"

Para demostrar por contradicción, suponemos que la implicación dada es falsa.

Es decir, suponemos que **a^2 es par** y que **a es impar.**

Por ser a es impar, se cumple: $a = 2n + 1$, $n \in Z$

calculamos ahora a^2:

$$a^2 = (2n + 1)^2$$
$$a^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \quad \text{teniendo en cuenta que } 2n^2 + 2n = k \in Z$$
$$a^2 = 2k + 1 \quad \text{con } k \in Z$$

Concluimos entonces que:

a^2 es impar

Pero esto contradice nuestro supuesto, lo cual implica que el supuesto es falso. Es decir la implicación inicial es verdadera.

"Si a^2 es par entonces a es un número par" es VERDADERA

** Si un teorema tiene la forma de bicondicional $p \Leftrightarrow q$, teniendo en cuenta la siguiente ley:

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

podemos ver que la demostración consta de dos partes:

- en una de ellas, se demuestra $p \Rightarrow q$, es decir partiendo de la veracidad de p llegar a probar la veracidad de q, y

- en la otra, se demuestra $q \Rightarrow p$, es decir, partiendo de la veracidad de q llegar a probar la veracidad de p.

Ejemplo

Demuestre que: **“ Sea n un número entero, n es impar si y solo si n – 1 es par”**

“ Sea n un número entero, n es impar si y solo si n – 1 es par”

⇒) implicación a derecha

H) n es impar **T) n – 1** es par

D) Por definición de número impar:

“Un número entero n es impar si existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$”

Por hipótesis sabemos que:

n es impar, por lo tanto: $\mathbf{n = 2\,k + 1}$, $\mathbf{k \in Z}$

$\mathbf{n - 1 = 2\,k}$, $\mathbf{k \in Z}$

Por lo tanto:

n – 1 **es un número par**

⇐) implicación a izquierda

H)n – 1 es par **T) n** es i mpar

D) Por definición de número par:

“Un número entero *a* par si existe un entero k, tal que $a = 2k$”

Por hipótesis sabemos que:

n - 1 es par, por lo tanto: $\mathbf{n - 1 = 2\,k}$, $\mathbf{k \in Z}$

$\mathbf{n = 2\,k + 1}$, $\mathbf{k \in Z}$

Por lo tanto:

n **es un número impar**

*** Para demostrar un teorema de la forma: “$\forall x \in X$: P(x)” es necesario tomar un elemento arbitrario de X y probar que P(x) es verdadera. No basta con probar que P(x) se cumple para un valor en particular de X.

Si X es el conjunto de los números naturales, es decir, el teorema tiene la forma “$\forall n \in$ IN: P(n)” entonces podemos demostrarlo usando el método de inducción matemática.

Principio de inducción matemática

Suponga que P(n) es una Función Proposicional cuyo dominio de discurso es el conjunto de los enteros positivos. Si se cumple que:

a) P(1) verdadero
b) $\forall n, n \geq 1$: [P(n) verdadero, entonces P(n+1) es verdadero].

Entonces P(n) es verdadero para todo entero positivo n.

Ejemplo

Demuestre que: **" ($\forall n \in Z^+$):n^3+ 2n es múltiplo de 3"**

" ($\forall n \in Z^+$):n^3+ 2n es múltiplo de 3"

P(n) : n^3+ 2n es múltiplo de 3

a) P(1) : $1^3 + 2 . 1 = 3$ es múltiplo de 3

b) ($\forall n \geq 1$): {n^3+ 2n es múltiplo de 3, entonces $(n+1)^3$+ 2(n+1) es múltiplo de 3}

H) n^3+ 2n es múltiplo de 3 **T) $(n+1)^3$+ 2(n+1) es múltiplo de 3**

D)

$$(n+1)^3 + 2(n+1)= n^3 + 3 n^2 + 3 n + 1 + 2n + 2$$

$$(n+1)^3 + 2(n+1)= (n^3 + 2n) + 3 (n^2 + n + 1)$$

Por hipótesis sabemos que: $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3

además3 $(n^2 + n + 1)$ también es múltiplo de 3.

Por otra parte la suma de dos múltiplos de 3 es otro múltiplo de 3.

Por lo tanto:

$(n+1)^3 + 2(n+1)$ múltiplo de 3

Se cumple a) y b) con lo que por el principio de inducción queda demostrado:

" ($\forall n \in Z^+$):n^3+ 2n es múltiplo de 3"

Ejercicios resueltos de lógica

1) Construya la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas y determine si son tautologías, contingencias o contradicciones.

a) $(\boldsymbol{p} \Rightarrow \sim\boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$

b) $[(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}] \Rightarrow \boldsymbol{q}$

c) $[\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})] \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$

d) $(\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow \sim[(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{p})]$

e) $\boldsymbol{q} \vee (\boldsymbol{p} \wedge\sim \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}$

Solución

$\boldsymbol{a}) \ (\boldsymbol{p} \Rightarrow \sim\boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$

Como en la proposición dada intervienen 3 proposiciones simples, la tabla de verdad deberá contener $2^3 = 8$ filas.

Tabla de verdad

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\sim\boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \sim\boldsymbol{q})$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \sim\boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$
V	V	V	F	F	**V**
V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	V	**V**
F	V	V	F	V	**V**
F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	**V**

De la última columna de la tabla se puede observar que la proposición compuesta toma valores verdaderos o falsos por lo tanto dicha proposición es una CONTINGENCIA.

$\boldsymbol{b})\ [(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}] \Rightarrow \boldsymbol{q}$

Como en la proposición dada intervienen 2 proposiciones simples, la tabla de verdad deberá contener $2^2 = 4$ filas

Tabla de verdad

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}$	$[(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}] \Rightarrow \boldsymbol{q}$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

La proposición dada toma valores verdaderos para cualquier combinación de valores de verdad de sus proposiciones componentes. La proposición compuesta es una TAUTOLOGÍA. Por lo tanto se puede escribir la equivalencia de forma simbólica como:

$$\{[(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}] \Rightarrow \boldsymbol{q}\} \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$$

$\boldsymbol{c})\ [\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})] \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$

Como en la proposición dada intervienen 2 proposiciones simples, la tabla de verdad deberá contener $2^2 = 4$ filas.

TABLA DE VERDAD

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\sim \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim \boldsymbol{p})$	$\sim (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$[\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p})] \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$[\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})] \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$
V	V	F	F	F	F	V	**V**
V	F	F	V	F	V	V	**F**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	F	V	V	**F**

La proposición compuesta resulta ser una CONTINGENCIA.

$\boldsymbol{d})\ (\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow \sim[(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{p})]$

Como en la proposición dada intervienen 3 proposiciones simples, la tabla de verdad deberá contener $2^3 = 8$ filas.

Tabla de verdad

p	q	r	$p \Leftrightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)$	$\sim[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]$	$(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow \sim[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]$
V	V	V	V	V	V	V	F	**F**
V	V	F	F	F	V	F	V	**F**
V	F	V	V	V	V	V	F	**F**
V	F	F	F	F	V	F	V	**F**
F	V	V	F	V	F	F	V	**F**
F	V	F	V	V	V	V	F	**F**
F	F	V	F	V	F	F	V	**F**
F	F	F	V	V	V	V	F	**F**

La proposición dada resulta falsa para toda combinación de valores de verdad de sus proposiciones simples componentes. Por lo tanto, es una CONTRADICCIÓN y en lenguaje simbólico se puede escribir

$$\{(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow \sim[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]\} \Leftrightarrow c$$

$e)\ q \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow q \vee p$

Como en la proposición dada intervienen 2 proposiciones, la tabla de verdad deberá contener $2^2 = 4$ filas

Tabla de verdad

p	q	$\sim q$	$p \wedge\sim q$	$q \vee (p \wedge\sim q)$	$q \vee p$	$q \vee (p \wedge\sim q) \Leftrightarrow q \vee p$
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	V	**V**
F	F	V	F	F	F	**V**

La tautología aquí obtenida es una ley lógica que llamaremos "Ley de consistencia parcial de la disyunción"

$$q \vee (p \wedge\sim q) \Leftrightarrow q \vee p$$

……

2) Determine el valor de verdad de cada proposición simple p, q y r según corresponda en cada caso.

a) $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ es falsa

b) $\boldsymbol{p} \Rightarrow (\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \boldsymbol{q}$ es verdadera y el valor de verdad de p es V

c) $(\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ es verdadera y el valor de verdad de q es V.

Solución

a) $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ es **falsa**

Si la implicación es falsa entonces el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Análisis del antecedente:

$$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{es\ verdadero}$$

Al ser una conjunción verdadera, ambas proposiciones, p y r son verdaderas.

Análisis del consecuente:

$$\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \quad \boldsymbol{es\ falso}$$

La negación de la disyunción es falsa, por lo tanto la disyunción es verdadera. La proposición p toma el valor verdadero y entonces q puede ser verdadera o falsa.

Luego, los valores de verdad son p es **V**, q es **V** o **F** y r es **V** .

Disposición del cálculo (leer de abajo hacia arriba):

<table>
<tr><td>(p</td><td>$\wedge$</td><td>r)</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$\sim$</td><td>(p</td><td>$\vee$</td><td>q)</td></tr>
<tr><td>V</td><td></td><td>V</td><td></td><td></td><td>V</td><td></td><td>V o F</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">V</td></tr>
<tr><td colspan="4">V</td><td colspan="4">F</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

b) $\boldsymbol{p} \Rightarrow (\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \boldsymbol{q}$ es verdadera y el valor de verdad de p es V.

Disposición del cálculo (leer de abajo hacia arriba):

p	$\Longrightarrow$	**(~p**	$\vee$	$\boldsymbol{r}$**)**	$\wedge$	**q**
		F		V		
			V			V
V					V	
	V					

Entonces el valor de verdad de *r* es verdadero y el de *q* es verdadero.

c) $(\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es **verdadera** y el valor de verdad de q es V.

Disposición del cálculo (leer de abajo hacia arriba):

(p	$\veebar$	**q)**	$\wedge$	$\boldsymbol{r}$	$\Leftrightarrow$	**q**
F		**V**				
	V			V		
			V			**V**
					V	

Entonces el valor de verdad de *r* es verdadero y el de p es falso.

……

3) Simplifique las siguientes proposiciones. Justifique

$\boldsymbol{a})\ [(\sim\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \Rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \sim\boldsymbol{r})] \wedge \sim\boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{b})\ [\sim(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \Rightarrow \sim(\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})] \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

$\boldsymbol{c})\ [\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee (\sim\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})] \Rightarrow (\sim\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

Solución

a)

$[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q \;\Leftrightarrow [\sim(\sim p \wedge q) \vee (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

(por la equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \vee (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$ (por ley De Morgan para la conjunción)

$\Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \vee \;\; c\,] \;\wedge \sim q$ (por ley del complemento para la conjunción)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \;\wedge\; \sim q,$ (por ley elemento neutro para la disyunción)

$\Leftrightarrow \sim q$ (por ley de consistencia de la conjunción)

b)

$[\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow [\sim(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim(\sim q \vee p)] \wedge (p \vee q)$

(por la equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \quad \vee \;\sim(\sim q \vee p)] \wedge (p \vee q)$ (por la equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow \; [(\sim p \vee q) \quad \vee \quad (q \wedge \sim p)] \;\; \wedge (p \vee q)$ (por ley De Morgan de la disyunción)

$\Leftrightarrow [(\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \vee [q \vee (q \wedge \sim p)] \wedge (p \vee q)$

(por ley distributiva de la disyunción respecto de la conjunción)

$\Leftrightarrow \; (\sim p \quad \vee \quad q) \;\wedge (p \vee q)$ (por ley de consistencia de la disyunción)

$\Leftrightarrow [(\sim p \wedge (p \vee q)] \;\vee\; [q \wedge (p \vee q)]$

(por ley distributiva de la conjunción respecto a la disyunción)

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \;\vee\; q$

(por ley de consistencia de la conjunción parcial y por ley de consistencia de la conjunción)

$\Leftrightarrow q$ (por ley de consistencia de la disyunción)

c)

$[\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \Rightarrow (\sim p \vee q) \;\Leftrightarrow\; [(\sim p \wedge \sim \mathbf{q}) \;\vee\; (\sim p \wedge q)] \Rightarrow (\sim p \vee q)$

(por ley De Morgan de la disyunción)

$\Leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q \vee q)] \Rightarrow (\sim p \vee q)$ (por ley recíproca de la distributiva)

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge t) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ (por ley elemento inverso para la disyunción)

$\Leftrightarrow \sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ (por ley elemento neutro para la conjunción)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} \vee (\sim \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ (por equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee\sim \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$ (por ley asociativa de la disyunción)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t} \vee \boldsymbol{q}$ (por ley elemento inverso para la disyunción)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t}$ (por ley elemento absorvente para la disyunción)

………

4) Dadas las siguientes proposiciones:

p: 20 es impar y q: 20 no es divisible por 2.

Exprese en lenguaje coloquial las siguientes proposiciones compuestas dadas en forma simbólica

a) $\sim(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p})$

b) $\sim(\sim\boldsymbol{p})$

c) $(\boldsymbol{p} \wedge \sim\mathbf{q})$

Solución

a) $\sim(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{q} \wedge \sim\mathbf{p}$

20 es divisible por 2 y es par

b) $\sim(\sim\boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$

20 es par

c) $(\boldsymbol{p} \wedge \sim\mathbf{q})$

20 es impar y 20 es divisible por 2.

………

5) Dadas las proposiciones:

p: Las importaciones de electrodomésticos están aumentando.

q: Los precios de los electrodomésticos están disminuyendo.

Exprese en leguaje simbólico las siguientes proposiciones y verifique que son equivalentes.

a) No es verdad que las importaciones de electrodomésticos están aumentando o los precios de los electrodomésticos están disminuyendo.

b) Las importaciones de electrodomésticos no están aumentando y los precios de los electrodomésticos no están disminuyendo.

Solución

a) No es verdad que las importaciones de electrodomésticos están aumentando o los precios de los electrodomésticos están disminuyendo.

No es verdad, se refiere a la negación ($\sim$) de todo lo que sigue, es decir, niega que *"p: las importaciones de electrodomésticos están aumentando o* ($\vee$) *q: los precios de los electrodomésticos están disminuyendo".* Por lo tanto, resulta:

$$\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$$

b) Las importaciones de electrodomésticos no están aumentando y los precios de los electrodomésticos no están disminuyendo.

Las importaciones de electrodomésticos no están aumentando, es la negación de la proposición p ($\sim p$) y ($\wedge$) *los precios de los electrodomésticos no están disminuyendo*, es la negación de la proposición q ($\sim q$). En consecuencia, se obtiene,

$$\sim \boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q}$$

Para verificar que las proposiciones son equivalentes se arman las tablas de verdad correspondientes:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$
V	V	V	**F**
V	F	V	**F**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{q}$	$\sim\boldsymbol{p}$	$\sim\boldsymbol{q}$	$\sim\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}$
V	V	F	F	**F**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	V	V	**V**

Se concluye que las proposiciones son lógicamente equivalentes pues sus tablas de verdad son iguales.

6) Exprese las siguientes implicaciones dadas en forma coloquial, en lenguaje simbólico y determine su valor de verdad. Para aquellas que sean verdaderas indique condición necesaria y suficiente.

a) Si aumenta el costo fijo o el costo variable de un producto entonces aumenta el costo total del mismo.

b) Si una función es biyectiva entonces es inyectiva.

c) Si un número es divisible por 2 entonces es divisible por 4 y 8.

Solución

a) ***Si aumentan el costo fijo o el costo variable entonces aumenta el costo total.***

Primero se reconocen las proposiciones:

p: aumenta el costo fijo del producto

q: aumenta el costo variable del producto.

r: aumenta el costo total del producto.

Por lo tanto, la implicación que resulta en lenguaje simbólico es:

$\boldsymbol{p} \vee \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r}$ (verdadera)

En consecuencia, decimos que $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ es condición suficiente para ***r***. Es decir, que aumente el costo fijo o el costo variable es condición suficiente para que aumente el costo total.

Además, ***r*** es condición necesaria para $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$**,** es decir, que si no aumenta el costo fijo o el costo variable entonces el costo total no puede aumentar.

b) ***Si una función es biyectiva entonces es inyectiva***

p: la función es biyectiva

q: la función es inyectiva

Por lo tanto, la implicación que resulta en lenguaje simbólico es:

$\boldsymbol{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ *(verdadera)* p es condición suficiente para q es decir, que una función sea biyectiva es suficiente para asegurar que la función es inyectiva.

q es condición necesaria para p es decir, si una función no es inyectiva, no puede ser biyectiva, por lo tanto es necesario que sea inyectiva para que pueda ser biyectiva.

c) Si un número es divisible por 2 entonces es divisible por 4 y 8.

p: un número es divisible por 2

q: un número es divisible por 4

r: un número es divisible por 8

Por lo tanto, la implicación que resulta en lenguaje simbólico es:

$\boldsymbol{p} \Rightarrow \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$ (falso, pues el 2 es divisible por 2 y no por 4 ni por 8).

……

7) Exprese en símbolos y lenguaje coloquial las implicaciones recíprocas, contrarias y contrarecíprocas de las implicaciones b) y c) del ejercicio anterior, y determine su valor de verdad.

Solución

b) ***Si una función es biyectiva entonces es inyectiva (verdadero)***

Recíproca

Forma simbólica: $q \Rightarrow p$

Forma coloquial: Si una función es inyectiva entonces es biyectiva.

Valor de verdad de la implicación recíproca*:* Falso, se requiere que una función sea inyectiva y suryectiva para que sea biyectiva.

Contraria

Forma simbólica: $\sim p \Rightarrow \sim \mathrm{q}$

Forma coloquial: Si una función no es biyectiva entonces no es inyectiva.

Valor de verdad de la implicación contraria*:*

Falso, puede ser una función solamente inyectiva.

Contrarrecíproca

Forma simbólica: $\sim q \Rightarrow \sim p$

Forma coloquial: Si una función no es inyectiva entonces no es biyectiva.

Valor de verdad de la implicación contrarrecíproca: Verdadero

c) Si un número es divisible por 2 entonces es divisible por 4 y 8.(falso)

Recíproca

Forma simbólica: $q \wedge r \Rightarrow p$

Forma coloquial: Si un número es divisible por 4 y es divisible por 8 entonces es divisible por 2.

Valor de verdad de la implicación recíproca: Verdadero

Contraria

Forma simbólica: $\sim p \Rightarrow \sim (q \wedge r)$

Forma coloquial: Si un número no es divisible por 2 entonces no es divisible por 4 o por 8.

Valor de verdad de la implicación contraria: Verdadero

Contrarrecíproca

Forma simbólica: $\sim (q \wedge r) \Rightarrow \sim p$

Forma coloquial: Si un número no es divisible por 4 o por 8 entonces no es divisible por 2.

Valor de verdad de la implicación contrarrecíproca: Falso, el número 2 por ejemplo, no es divisible por 4 o por 8 sin embargo sí es divisible por 2.

……

8) Escriba los siguientes enunciados formales en diferentes formas equivalentes en lenguaje coloquial.

a) $\exists\, x \in \boldsymbol{R}/x^2 = 2.$

b) $\forall\, n \in \boldsymbol{Z},\ si\, n^2 = 2k\ \Rightarrow n = 2k',\ k' \in \mathbb{Z}$

Solución

a) $\exists\, x \in \boldsymbol{R}/x^2 = 2.$

Este enunciado puede leerse:

- ✓ Algunos números reales tienen cuadrado 2.
- ✓ El número *x* tiene cuadrado 2, para algún número real *x*.
- ✓ Algún número real tiene cuadrado 2.
- ✓ Hay por lo menos un número real cuyo cuadrado es 2.

b) $\forall\, n \in \boldsymbol{Z},\ si\, n^2 = 2k\ \Rightarrow n = 2k',\ k' \in \mathbb{Z}.$

Este enunciado puede leerse:

- ✓ Dado cualquier número entero cuyo cuadrado es par, ese entero en sí mismo es par.
- ✓ Cualquier número entero con cuadrado par es par.
- ✓ Si el cuadrado de un número entero es par, entonces ese número entero es par.
- ✓ Todos los números enteros con cuadrado par, son pares.

……

9) Niegue las siguientes funciones proposicionales cuantificadas utilizando los cuantificadores lógicos.

a) $\forall \boldsymbol{x}: [\sim \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]$

b) $\exists \boldsymbol{x}/[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})]$

Solución

a) $\forall x: [\sim P(x) \Rightarrow Q(x) \vee P(x)] \Leftrightarrow \exists x/\sim[\sim P(x) \Rightarrow Q(x) \vee P(x)]$
(por negación del cuantificador universal)

$\Leftrightarrow \exists x/\sim\{\sim(\sim P(x)) \vee [Q(x) \vee P(x)]\}$ (por equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow \exists x/\sim\{P(x) \vee [Q(x) \vee P(x)]\}$ (por ley de doble negación)

$\Leftrightarrow \exists x/\sim\{[P(x) \vee P(x)] \vee Q(x)\}$ (por ley conmutativa y asociativa de la disyunción)

$\Leftrightarrow \exists x/\sim[P(x) \vee Q(x)]$ (por ley idempotencia de la disyunción)

$\Leftrightarrow \exists x/[\sim P(x) \wedge \sim Q(x)]$ (por ley De Morgan de la disyunción)

b) $\exists x/[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \forall x: \sim[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$ (por negación del cuantificador universal)

$\Leftrightarrow \forall x: \sim\{[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow P(x)]$ (por equivalencia del bicondicional)

$\Leftrightarrow \forall x: \sim\{[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge [\sim Q(x) \vee P(x)]\}$ (por equivalencia del condicional)

$\Leftrightarrow \forall x: \sim\{\left[\sim P(x) \wedge \left(\sim Q(x) \vee P(x)\right)\right] \vee \left[Q(x) \wedge \left(\sim Q(x) \vee P(x)\right)\right]\}$

(prop. distributiva de la conjunción respecto de la disyunción)

$\Leftrightarrow \forall x: \sim\{[\sim P(x) \wedge \sim Q(x)] \vee [Q(x) \wedge P(x)]\}$

(por ley de consistencia parcial de la conjunción)

$\Leftrightarrow \forall x: \{\sim [\sim P(x) \wedge \sim Q(x)] \wedge \sim[Q(x) \wedge P(x)]\}$ (por ley De Morgan de la disyunción)

$\Leftrightarrow \forall x: \{[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\sim Q(x)$ (por ley De Morgan de la conjunción)

………

10) Sea A = {1, 2, 3, 4, 5}. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\forall\ x \in A: x + 2 > 6$

b) $\exists\ x \in A/x - 3 = 1$

Solución

a) Como la proposición $\forall\, x \in A: x + 2 > 6$ (contiene un cuantificador universal), resulta verdadera si lo es para todos los valores de x definidos en su dominio o universo A.

Si bien, x + 2 > 6 es verdadera para x = 5 ya que 5 + 2 > 6; para x=1 x+2= 1+2=3 < 6 , no se cumple la desigualdad.

Por lo tanto, $\forall\, \boldsymbol{x \in A: x + 2 > 6}$ es **falsa** pues *x + 2 > 6* no se cumple para todos los valores de A.

b) Como la proposición $\exists\, x \in A / x - 3 = 1$ contiene un cuantificador existencial, es verdadera si lo es para al menos un valor de x definido en su dominio o universo.

Por lo tanto, $\exists\, \boldsymbol{x \in A / x - 3 = 1}$ es **verdadera** ya que existe x = 4 ϵ A tal que 4 – 3 = 1. Si bien, para el resto de los valores del dominio la igualdad no se cumple, basta que sea verdadera para uno de ellos.

……

11) Niegue cada proposición del ejercicio anterior.

Solución

a) Dada la proposición $\forall\, \boldsymbol{x \in A: x + 2 > 6}$, su negación es $\exists\, \boldsymbol{x \in A / x + 2 \leq 6.}$

b) Dada la proposición $\exists\, \boldsymbol{x \in A / x - 3 = 1,}$ su negación es $\forall\, \boldsymbol{x \in A: x - 3 \neq 1.}$

……

12) Determine el valor de verdad de las siguientes funciones proposicionales cuantificadas.

a) Para todo número real *x*, si x > - 1. entonces x + 1 > 0.

b) Para todo número real *x*, si x > 1 entonces $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}$.

c) $\exists\, x \in R / \frac{1}{x^2} > 1$

d) $\exists\, x \in R / \frac{2x}{x-3} = \frac{3}{2}$

Solución

a) La afirmación cuantificada universalmente para todo número real *x*, si x > - 1, entonces x + 1 > 0

es **verdadera** para todo número real x.

Sea x cualquier número real. Entonces puede ocurrir que x ≤ - 1 o bien que x > - 1.

- ✓ *Si* ***x ≤ - 1***, entonces la proposición condicional: si x > - 1, entonces x + 1 > 0 **es trivialmente *verdadera*** puesto que al tratarse de un condicional, como el antecedente es falso, cualquiera sea el valor de verdad del consecuente resulta una proposición verdadera. (En general, el caso trivial se omite)
- ✓ *Si* ***x > - 1***, cualquiera sea el valor de *x*, se cumple que *x* ***+ 1*** *> - 1* ***+ 1***

x + 1 > 0 de manera que la conclusión es verdadera. Por lo tanto, como el antecedente es verdadero y el consecuente resulta verdadero, podemos afirmar que la proposición condicional si x > - 1, entonces x + 1 > 0 es verdadera.

Por consiguiente, la afirmación cuantificada universalmente, para todo número real x, si x > - 1, entonces x + 1 > 0, es verdadera.

b) La afirmación cuantificada universalmente, para todo número real *x*, si x > 1 entonces $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}$, es **falsa**.

Para demostrar que una afirmación cuantificada universalmente es falsa, es suficiente encontrar un valor de *x* en el dominio para el que la proposición sea falsa. Tal valor, se llama contraejemplo de la afirmación cuantificada universalmente.

Para nuestro caso en particular, existe el valor de x = 2 para el cual la proposición condicional es falsa puesto que si bien el antecedente, x = 4 > 1 es verdadero, el antecedente resulta:

$$\frac{4}{16+1} \,??\, \frac{1}{3}$$

$\frac{4}{17} > \frac{1}{3}$ es falso.

Por consiguiente, se ha demostrado que la afirmación cuantificada universalmente, para todo número real x, si x > 1 entonces $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}$, es falsa.

c) La afirmación cuantificada existencialmente,

$\exists\ x \in R/\frac{1}{x^4+1} > 1$, es falsa.

Para verificar que la afirmación es falsa, debe demostrarse que $\frac{1}{x^4+1} > 1$ es falsa para todo número real *x*.

Ahora bien, la expresión $\frac{1}{x^4+1} > 1$es falsa justamente cuando $\frac{1}{x^4+1} \leq 1$ es verdadera. Basta entonces, demostrar que $\frac{1}{x^4+1} \leq 1$ es verdadera para todo número real *x*. Para ello: cualquiera sea el número real *x*, se cumple que $x^4 \geq 0$. Sumando 1 a ambos miembros:

$x^4 + 1 \geq 0 + 1$, dividiendo por $x^4 + 1$, resulta:

$$\frac{x^4+1}{x^4+1} \geq \frac{1}{x^4+1}$$

$$1 \geq \frac{1}{x^4+1}$$

Entonces $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^4+1} \leq 1$ es verdadera. En consecuencia,

hemos obtenido que $\frac{1}{x^4+1} > 1$ es falsa.

Concluimos así, que la afirmación cuantificada existencialmente,

$\exists\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}/\frac{1}{\mathrm{x}^4+1} > 1$, es <u>falsa</u>.

d) La proposición cuantificada existencialmente, $\exists\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}/\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}-3} = \frac{3}{2}$ es **verdadera**.

Para demostrar que una proposición cuantificada existencialmente es verdadera, basta con encontrar un valor de *x* perteneciente al dominio que la verifique.

En nuestro caso particular, existe el valor real x = - 9 para el cual:

$$\frac{2.(-9)}{(-9)-3} = \frac{3}{2}$$

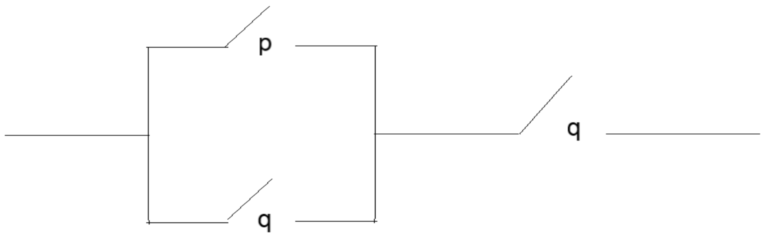
$$\frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

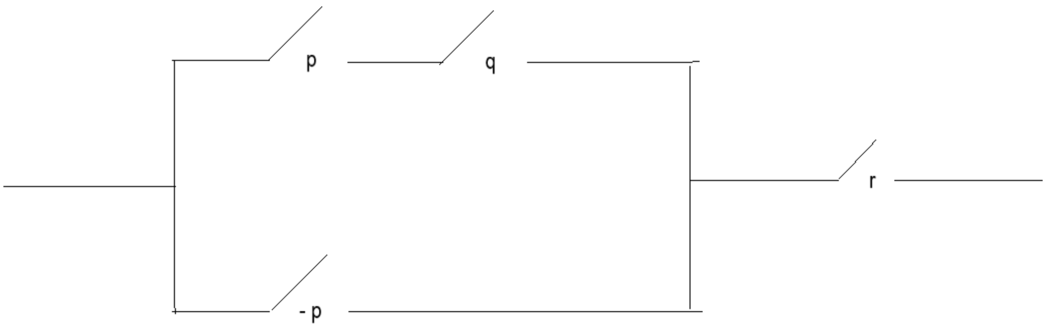
Por consiguiente, la proposición cuantificada existencialmente, $\exists\ x \in R/\frac{2x}{x-3} = \frac{3}{2}$ es verdadera.

13) Exprese los siguientes circuitos lógicos en lenguaje simbólico y simplifique:

a)



b)



Solución

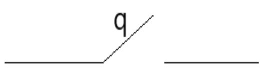
a)

Se expresa el circuito en lenguaje simbólico

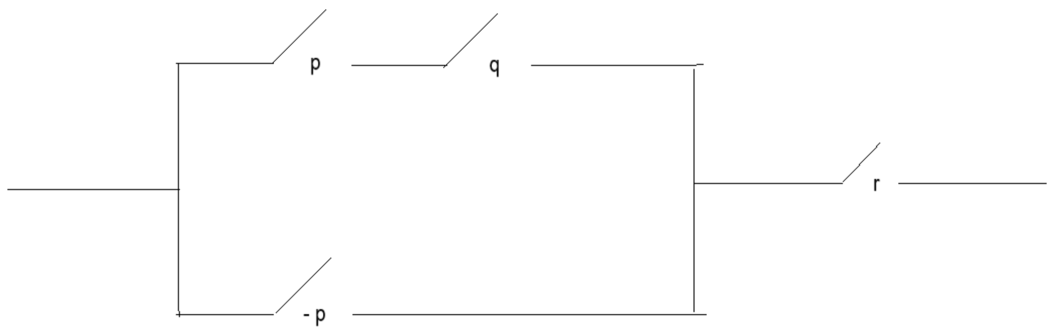
$(p \vee q) \wedge q$

Se simplifica la proposición utilizando la ley de consistencia y queda $(p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow q$

El circuito lógico se puede representar entonces,



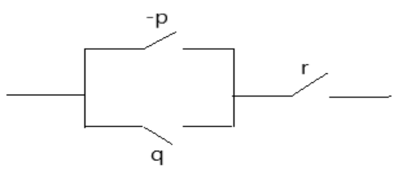
b)



Se expresa en lenguaje simbólico y se simplifica por ley de consistencia

$[(p \wedge q) \vee \sim p] \wedge r \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge r$

El circuito lógico simplificado se representa como,



………

14) Utilizando los axiomas de tricotomía, clausura del producto, e inverso multiplicativo que se enuncian a continuación,

- Axioma de tricotomía (Axioma de orden)

  ∀ a, b ∈ R; se cumple,

  $a < b \ \underline{\vee} \ a = b \ \underline{\vee} \ b < a$

- Axioma de clausura en el producto

  (∀ a, b): (a, b ∈ R → a. b ∈ R)

- Axioma del inverso multiplicativo

  ∀ a ∈ R- $\{0\}$; existe un valor único denotado por a^{-1} tal que $a. a^{-1} = 1 = a^{-1}. a$

Demuestre las siguientes propiedades:

a) $a \in R - \{0\} \Longrightarrow a^2 \in R^+$

b) $a \in R^+ \Longrightarrow a^{-1} \in R^+$

Solución[1]

a) $a \in R - \{0\} \Longrightarrow a^2 \in R^+$

Para poder realizar la demostración se utilizará el método directo que consiste en considerar la hipótesis verdadera (antecedente) y a partir de axiomas, leyes lógicas, propiedades, se deduce el consecuente verdadero.

Si $a \in R - \{0\}$ por axioma de tricotomía

$a \in R^+ \underline{\vee} -a \in R^+$

Si $a \in R^+$ entonces por axioma de clausura del producto $a.a \in R^+$, es decir,

$a \in R^+ \Rightarrow a^2 \in R^+$

Si $-a \in R^+$ entonces podemos decir $-a.-a = (-a)^2 = a^2$, luego $a^2 \in R^+$, por consiguiente queda demostrado $a \in R - \{0\} \Longrightarrow a^2 \in R^+$.

b) $a \in R^+ \Longrightarrow a^{-1} \in R^+$

Se demuestra la propiedad por el método del absurdo.

El método del absurdo consiste en suponer la negación de la implicación original.

Es decir, si decimos, $p \Longrightarrow q$ se parte de la suposición para demostrar $\sim (p \Longrightarrow q)$ o su equivalente $p \wedge \sim q$, a partir de realizar el análisis de la implicación negada, se obtiene una contradicción, la que nos permite afirmar que la implicación negada es falsa y por lo tanto la proposición original es verdadera.

---

[1] Arancibia, S. (2000). *Introducción al cálculo* (2nd ed., p. 31). Valparaíso: Instituto de matemática.

Sea $a \in R^+$. Supongamos que $a^{-1} \notin R^+$, entonces por axioma de tricotomía

$$\boldsymbol{a^{-1}} = 0 \veebar -(\boldsymbol{a^{-1}}) \in R^+$$

Supongamos que $\boldsymbol{a^{-1}} = 0$ entonces $a.a^{-1} = 0$ pero por propiedad del inverso multiplicativo $a.a^{-1} = 1$, esto es una contradicción y por lo tanto $\boldsymbol{a^{-1}} \neq 0$.

Supongamos que $-(a^{-1}) \in R^+$. Como $a \in R^+$ tenemos por clausura del producto que $-(a^{-1}).a = -1 \in R^+$ que es también una contradicción pues $1 \in R^+$. Como en ambos casos obtenemos una contradicción, no se puede dar ninguna de las dos posibilidades, por lo tanto, $a^{-1} \in R^+$, así se tiene que el inverso multiplicativo de un número positivo es también un número positivo.

……