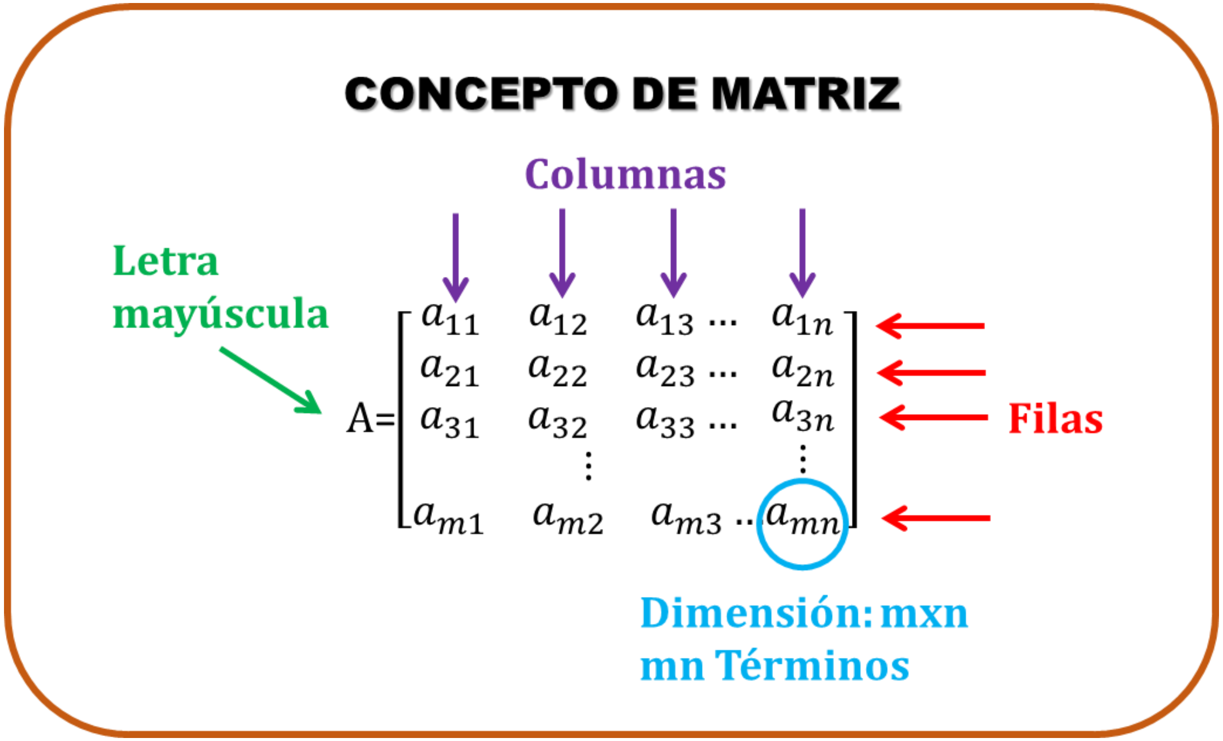
MATRICES

DEFINICIÓN:

UNA MATRIZ ES UN ARREGLO RECTANGULAR DE NÚMEROS. LOS NÚMEROS EN EL ARREGLO SE DENOMINAN ELEMENTOS DE LA MATRIZ.



$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El tamaño u orden de una matriz se indica especificando el número de filas y el número de columnas (en ese orden). El tamaño de la matriz A es mxn.

Las matrices se suelen indicar en la forma:

$$A = [a_{ij}].$$

Cada a_{ij} representa un elemento de la matriz, donde el subíndice i indica la fila y el subíndice j la columna en la cual se encuentra dicho elemento.

Las matrices se indican con letras mayúsculas A, B, C, …., etc

En algunos libros los corchetes son reemplazados por paréntesis.

Ejemplos de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E = [3], \qquad F = [-1 \quad 0 \quad 2].$$

MATRIZ CUADRADA Y RECTANGULAR

Si m = n (cantidad de filas igual a cantidad de columnas) la matriz se llama matriz cuadrada de orden n.
En toda matriz cuadrada, los elementos a_{11}; a_{22}; … ;a_{nn} forman la diagonal principal.
Las matrices no cuadradas se llaman matrices rectangulares.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si

1) son del mismo tamaño y
2) las componentes correspondientes son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2+3 & \sqrt{16} \\ -2\,.\,4 & 2^0 \end{bmatrix}$$

A y B son matrices iguales.

ALGUNAS MATRICES ESPECIALES

MATRIZ NULA

Es aquella en la cual todos sus elementos son ceros. Puede ser rectangular o cuadrada.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ FILA O VECTOR FILA

Es aquella matriz de orden 1xn para cualquier n que pertenece a IN.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA O VECTOR COLUMNA

Es aquella matriz de orden nx1 para cualquier n que pertenece a IN.

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ OPUESTA

Dada una matriz A de orden m x n se llama matriz opuesta de A y se indica – A , a la matriz que tiene el mismo tamaño que A y cuyos elementos son los opuestos de los respectivos elementos de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

ALGUNAS MATRICES CUADRADAS

MATRIZ DIAGONAL

Una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero se denomina matriz diagonal.

$$A_{nxn} \; es \; matriz \; diagonal \;\Leftrightarrow\; a_{ij} = 0 \;\; para \; i \neq i$$
$$con \; i = 1,2,\dots,n \qquad y \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales se denomina matriz escalar.

$$A_{nxn}\ es\ matriz\ escalar \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 & para\ i \neq j \\ a_{ij} = k & para\ i = j \end{cases}$$

$con\ i = 1,2, \ldots, n \quad y \quad j = 1,2, \ldots, n$ y k real

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

MATRIZ IDENTIDAD

Es una matriz cuadrada en la cual los elementos de la diagonal principal son 1 y los elementos restantes son 0.

$$I_{nxn}\ es\ matriz\ identidad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 & para\ i \neq j \\ a_{ij} = 1 & para\ i = j \end{cases}$$

$$con\ i = 1,2,\dots,n \quad y \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i > j$$

con i = 1, 2, ..., n y j = 1, 2, ..., n

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i < j$$

con i = 1, 2, ..., n y j = 1, 2, ..., n

TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada, se llama traza de la matriz A y se simboliza tr(A) a la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA DE UNA MATRIZ

Sean A y B matrices cuadradas de orden n y sea λ un escalar real.

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A.$
3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

<u>Importante:</u> La suma de matrices solo es posible si las matrices tienen el mismo orden.

Calcular A + B siendo: A= $\begin{bmatrix} -2 & 3/2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 5 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A , B y C matrices del mismo orden mxn:

1) Conmutativa: A + B = B + A
2) Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C)
3) Elemento neutro: existe la matriz nula O de orden mxn, tal que A + O = A

4) Elemento opuesto: Para cada matriz A, existe una única matriz – A, llamada matriz opuesta de A, de orden mxn, tal que A + (-A) = O

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$$-\tfrac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A y B matrices del mismo orden mxn y sean α y β escalares reales.

1) $\alpha\ (A + B) = \alpha A + \alpha B$
2) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
3) $(\alpha . \beta) A = \alpha (\beta A)$
4) $1 A = A$

$(M_{mxn};+; .)$ es un espacio Vectorial Real con las Operaciones suma y multiplicación por un escalar.

Las matrices son vectores.

Resta de matrices

Sean A y B matrices de orden mxn, llamamos diferencia entre A y B a: A – B = A + (- B)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Producto escalar representado como vector renglón por vector columna

vector renglón $1 \times n$

$$(a_1, a_2 \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Éste es un número real (un escalar)

vector columna $n \times 1$

EJEMPLO 2.2.2 Producto escalar de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-4)(3) + (-2)(-2) + (3)(-5) = -12 + 4 - 15 = -23.$

Producto de dos matrices

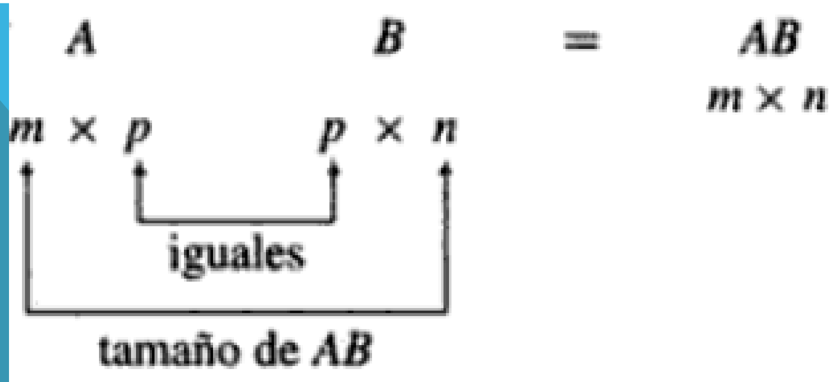
Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)} \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}} \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

La multiplicación de matrices, solo es posible si el n° de columnas de la 1° matriz es igual al n° de filas de la 2° matriz.



Ejemplos

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

La multiplicación de matrices NO ES CONMUTATIVA.

Propiedad asociativa

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

Propiedades distributiva de la multiplicación respecto de la suma de matrices

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC}$$

y

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC}$$

PROPIEDAD : Siendo A_{mxn} y B_{nxp} y α un escalar real.

$$\alpha (A . B) = (\alpha A).B = A . (\alpha B)$$

IMPORTANTE

- **Que A . D = O (matriz nula) <u>no implica</u> que A = O ni que D = O.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A.D =$$

- **Que C . A = C . B <u>no implica</u> que A = B.**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C \,.\, A =$$

$$C.\,B =$$

Potencia de una matriz

Sea A una matriz cuadrada y sea n un número entero positivo, se llama potencia n-esima de A, al siguiente producto:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots\ldots A}_{\text{n veces}}$$

$A^0 = I$ (matriz Identidad)

PROPIEDADES

Sean A y B matrices cuadradas de orden n y sean n y m enteros positivos.

1) $A^m . A^n = A^{m+n}$
2) $(A^m)^n = A^{m.n}$
3) Sea $\alpha \in IR$: $(\alpha A)^n = \alpha^n A^n$

IMPORTANTE

La potenciación de matrices no es distributiva respecto de la multiplicación ni respecto de la suma. $(A.B)^n = \underbrace{(A.B).\ (A.B).\ \ldots\ldots\ (A.B)}_{\text{n veces}}$

Transpuesta o traspuesta de una matriz

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$, la matriz $A^T = [a_{ij}^T]$ de $n \times m$, donde

$$a_{ij}^T = a_{ji} \qquad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

es la **transpuesta** de A.

La matriz traspuesta de A se obtiene permutando las filas de A por las columnas de A.

Si A es de orden m x n, su matriz traspuesta será de orden n x m.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transpuesta

Si todas las sumas y productos están definidos y

$(A^\top)^\top = A \qquad (AB)^\top = B^\top A^\top \qquad (A + B)^\top = A^\top + B^\top. \qquad (\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$

MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada A de orden n es SIMÉTRICA si cumple: $A^T = A$

Es decir:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplos: para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Una matriz cuadrada A de orden n es ANTISIMÉTRICA si cumple: $A^T = - A$

Es decir:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

1) Si A_n y B_n son matrices simétricas , entonces A+B también es simétrica.

2) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

3) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A - A^T$ es una matriz antisimétrica.

MATRIZ ESCALONADA

Una matriz de orden m x n está escalonada si cumple:

1) Si tiene una fila nula, esta debe ubicarse en la parte inferior de la matriz

2) El primer elemento no nulo da cada fila debe ser 1.

3) El primer elemento no nulo de la fila i +1 debe ubicarse a la derecha del primer elemento no nulo de la fila i.

Ejemplos

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) escalonada reducida
b) Matriz escalonada

no reducida

c) no es matriz escalonada

porque no cumple (3)

d) no es matriz escalonada

porque no cumple (2)

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

Una matriz de orden m x n estará expresada en su forma escalonada reducida si además de ser escalonada, cumple:

- En las columnas donde están ubicados los primeros elementos no nulos, los elementos restantes son nulos.

Ejemplos:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) Es matriz escalonada reducida

b) Es matriz escalonada reducida

c) No es escalonada , no cumple (1)

d) No es escalonada, no cumple (2)

OPERACIONES ELEMENTALES

1) Intercambiar dos filas entre si
2) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
3) Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila.

IMPORTANTE:

- Toda matriz se puede llevar a la forma escalonada o escalonada reducida mediante la aplicación de operaciones elementales.
- La forma escalonada reducida de una matriz es única no ocurre lo mismo con la forma escalonada.

Matriz elemental

Una matriz cuadrada A_n será una matriz elemental si puede obtenerse a partir de la matriz identidad I_n , aplicando sólo una operación elemental.

RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama rango de una matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz expresada en su forma escalonada.

MATRICES EQUIVALENTES

Una matriz B es equivalente a otra matriz A, si B puede obtenerse a partir de la matriz A aplicándole a ésta una cantidad finita de operaciones elementales por filas.

Propiedad

Las matrices elementales son equivalentes por filas a la matriz identidad

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A\ es\ elemental\ (intercambio\ de\ la\ fila\ 2\ con\ la\ fila\ 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A\ es\ elemental\ (multiplicación\ de\ la\ fila\ 3\ por\ 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A\ es\ elemental\ (fila\ 2 = fila\ 2 + 2 \cdot fila\ 3)$$

Matrices equivalentes

Una matriz B es equivalente a otra matriz A, si B puede obtenerse a partir de la matriz A aplicándole a ésta una cantidad finita de operaciones elementales por filas.

Propiedad

Las matrices elementales son equivalentes por filas a la matriz identidad.

RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama rango de una matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz expresada en su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango de A $\rho(A) = 2$ Rango de B $\rho(B) = 1$

CÁLCULO DEL RANGO

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DEL RANGO

1) El rango de la matriz nula es cero.
2) El rango de la matriz identidad de orden n, es n.
3) Si A es de orden m x n , tal que $m \leq n$, entonces el $\rho(A) \leq m$.
4) Si A es de orden m x n , tal que $n \leq m$, entonces el $\rho(A) \leq n$.

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz A de orden n, decimos que A es inversible, si existe una matriz B de orden n, tal que :

$$A.B = B.A = I_n$$

La matriz B recibe el nombre de matriz inversa de A y se indica A^{-1}

TEOREMA

Si A_{nxn} es inversible, entonces su inversa es única.

PROPIEDADES

1) Si A_{nxn} es inversible, entonces A^{-1} también es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Si A_{nxn} es inversible, entonces A^{T} también es inversible y $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

3) Si A_{nxn} y B_{nxn} son inversibles, entonces $A.B$ es inversible y $(A.B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

4) Si $k \in IR - \{0\}$ y A_{nxn} es inversible, entonces kA también es inversible y

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Aclaración: Decir que A es inversible es lo mismo que decir que A es regular o que A es no singular. De igual manera, una matriz singular es una matriz no inversible,

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz A_{nxn} es ortogonal si y sólo si $A^{-1} = A^{T}$.

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea A_n una matriz , si una sucesión de operaciones elementales por filas reduce a A a la matriz identidad I_n ,entonces la misma sucesión de operaciones elementales aplicadas a I_n , transforman a esta en A^{-1}

Halle la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$