FUNCIÓN DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada, es un número que brinda interesante información sobre la matriz; muestra inmediatamente si la matriz es inversible o no singular. ***El determinante es cero cuando la matriz no tiene inversa.***

Los determinantes han sido vistos en la escuela secundaria y en el ingreso a la Universidad en relación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas) en 2 y 3 variables. Por ejemplo, el determinante de 2x2 o de orden $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 – (-2)\ (-3) = 4 – 6 = -\ 2$$

Y, en general

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

donde *a, b, c, d* son, por ahora, números reales, pero podrían ser también números complejos o funciones, como se verá en cálculo de una y varias variables. Es decir, el determinante de orden $n = 2$ o de segundo orden es un número que se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal principal o, simplemente diagonal, menos el producto de los elementos de la “otra diagonal” o diagonal no principal o diagonal secundaria o contra diagonal.

También se vio que el determinante de 3x3 o de orden $n = 3$ o de tercer orden, se calculaba mediante la llamada Regla de Sarrus, que es un procedimiento que consiste en agregar las dos primeras filas debajo de las tres dadas, caso 1, o, las dos primeras columnas a la derecha de las tres dadas, caso 2. Por ejemplo, para el caso 1, es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}^{*} = (-1)(-2)\ 5 + 3(-1)\ 0 + 4.2.1 – 0\ (-2)\ 4 – 1(-1)(-1) - 5.2.3 = -13$$

O bien, en el caso 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}^{*}=(-1)(-2).5+2.1.4+0.3(-1)–0(-2)4–(-1)1(-1)–2.3.5= -13$$

Aclaración en *: por abuso de notación se han colocado barras, pero NO ES UN DETERMINANTE porque no tiene la misma cantidad de filas que de columnas, es una disposición práctica para el cálculo.

NOTAS

. En ambos casos, se observan que hay productos diagonales, tres diagonales (de izquierda a derecha paralelas a la diagonal principal) de tres factores cada uno precedidos por el signo de adición "+" y tres (de derecha a izquierda, en el sentido de la contra diagonal) precedidos por el signo de sustracción "-".

. Los productos obtenidos en los dos casos, son iguales, salvo el orden (propiedad conmutativa de la multiplicación en el conjunto de los números reales, IR). Por esto, es indistinto usar la Regla de Sarrus por filas o por columnas.

. Si cambia el orden de las filas que se agregan debajo de las tres dadas, o de las columnas a la derecha, varía el resultado del determinante y, es incorrecto. Se trata de una estructura donde el orden de filas o columnas, interesa; esto conduce a pensar en la estrecha relación de los determinantes con las matrices; más aún, la palabra matriz fue usada primero por James Joseph Sylvester (1814 - 1897) con el significado de "madre de los determinantes".

. La Regla de Sarrus no permite calcular determinantes de orden mayor que $n = 3$.

Notación simbólica

Si A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ representa una matriz de 2x2 cualquiera, su determinante se indica de las siguientes formas explícitas: Det $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, det $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; o bien, en forma breve: det (A) o Det(A) o $|A|$. (Observar la diferencia en la notación con corchetes para leer "matriz" y barras para "determinante.")

La notación para determinantes de matrices de *nxn* o determinantes de orden *n*, es análoga, pero en esta situación, es necesario utilizar la notación compacta para indicar los elementos genéricos a_{ij} de A con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Conceptos previos

Para dar la definición clásica de determinante (hay varias), se necesitan algunos conceptos previos que son: producto elemental, permutación, número de inversiones de una permutación, clasificación de la permutación y producto elemental con signo. Se presentan a continuación.

Producto elemental *Sea A una matriz de nxn, se llama producto elemental de A al producto de n elementos de A pertenecientes a filas y columnas diferentes.*

Por ejemplo, si A es de orden 2 como arriba, existen sólo dos productos elementales: *a.d* y *b.c;* son los únicos posibles teniendo dos filas y dos columnas con la condición de no repetir ni fila ni columna.

Si A = (a_{ij}) es una matriz de orden 3, ¿cuántos productos elementales (distintos) existen? Y si A = (a_{ij}) es una matriz de orden *n*, ¿cuántos productos elementales existen?

Permutación de orden n *Una permutación del conjunto de naturales {1, 2, …, n} es un arreglo de estos n elementos sin repetir ninguno.*

Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales {1, 2} con $n = 2$, sólo hay dos permutaciones posibles: (1, 2) y (2, 1).
En el conjunto {1, 2, 3, 4, 5} con $n = 5$, una permutación posible es (1, 3, 2, 4, 5), otra permutación es (5, 3, 2, 1, 4), otra es (1, 2, 3, 4, 5) (denominada "orden natural"), etc.

Si el conjunto tiene n números naturales, $\{1, 2, \ldots, n\}$, ¿cuántas permutaciones (distintas) existen?

Observación Si A = (a_{ij}) es una matriz de orden n, se puede hablar de las permutaciones de n elementos asociados al índice de fila, $i = 1, 2, \ldots, n$ o, de columna, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Número de inversiones de una permutación *Es el número total de cambios que presenta una permutación respecto del orden natural.*

Por ejemplo, si A = (a_{ij}) es de orden 5, un *producto elemental* (con 5 elementos pertenecientes a filas y columnas diferentes) es $a_{11}\, a_{32}\, a_{55}\, a_{23}\, a_{44}$; si se lo ordena de forma natural por el índice de filas, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, queda el mismo producto de la forma $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{55}$ (conmutado). La permutación de los 5 números naturales asociados al índice de columna j es (1, 3, 2, 4, 5) con una sola inversión respecto del orden natural (está cambiada la ubicación del 2 por el 3). Es decir, el *número de inversiones* de la permutación (1, 3, 2, 4, 5), es 1.

Se observa que si la permutación fuera "más desordenada", no sería sencillo ver el número de inversiones de la permutación. Existen varios procedimientos para este cálculo; uno de ellos consiste en sumar la cantidad de elementos menores que cada uno de los mismos a su derecha. Por ejemplo, en la permutación (4, 1, 3, 5, 2) se observan 3 números menores que el 4 a su derecha (son 1, 3 y 2), ningún número menor que 1 a su derecha, un número menor que 3 a su derecha (el 2) y un número menor que 5 a su derecha (el 2), o sea, existen $3 + 0 + 1 + 1 = 5$ inversiones en la permutación dada.

Observación También se puede ordenar el producto elemental en forma natural por el índice de columnas ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) y trabajar con la permutación asociada al índice de filas. Se acostumbra ordenar el producto elemental por filas y analizar las inversiones de la permutación asociada al índice de columnas.

Clasificación de la permutación *Una permutación es* ***par*** *si el número total de inversiones es par; caso contrario, es* ***impar****.*

Por ejemplo, la permutación (4, 1, 3, 5, 2) que presenta 5 inversiones, se clasifica como una *permutación impar*.

Producto elemental con signo *Es el producto elemental multiplicado por (+1), si la permutación asociada al índice de columna es par y, por (-1) si la permutación es impar.*

Por ejemplo, el *producto elemental con signo* correspondiente al producto elemental dado anteriormente ("desordenado") $a_{11}\, a_{32}\, a_{55}\, a_{23}\, a_{44}$ es **(-1)** $\boldsymbol{a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{55}}$.

Definición de determinante *Sea A = (a_{ij}) una matriz cuadrada.*
La función determinante de A o determinante de A es la función que asigna a cada matriz cuadrada A un número igual a la suma de los productos elementales con signo de A.

Disposición práctica para la construcción de la definición de la función determinante en matrices de 3x3

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Producto elemental (ordenado por filas)	Permutación Asociada al índice de columna	Número de inversiones de una permutación	Clasificación de la permutación	Producto elemental con signo
$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$	(1, 2, 3)	0	PAR	$(+1)\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$
$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$	(2, 3, 1)	1 + 1 = 2	PAR	$(+1)\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$
$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$	(3, 1, 2)	2 + 0 = 2	PAR	$(+1)\, a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$
$a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$	(3, 2, 1)	2 + 1 =3	IMPAR	$(-1)\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$
$a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$	(2, 1, 3)	1 + 0 = 1	IMPAR	$(-1)\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$
$a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$	(1, 3, 2)	0 + 1 = 1	IMPAR	$(-1)\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

Observaciones

i) Si A es *nxn,* existen *n!* productos elementales de los cuales la mitad van con signo positivo y la otra mitad con signo negativo.

ii) La función determinante asigna a cada matriz cuadrada un número llamado su determinante. De manera concreta, el determinante de una matriz es un número.

iii) Por abuso de lenguaje, se usa la palabra “determinante” tanto para referirse al resultado como para referirse a la matriz cuyo determinante se está calculando.

iv) La evaluación de determinantes mayores de 3x3 por definición es, en general, complicada pues, por ejemplo, si se busca un determinante de 4x4, hay que sumar 4! = 4.3.2.1 = 24 productos elementales con signo de 4 factores cada uno (pertenecientes a filas y columnas diferentes). En la práctica no es raro que aparezcan matrices de 50x50 o de orden mayor, por ejemplo si se piensa en 50 comercios que venden 50 productos distintos. Entonces es necesario encontrar métodos de cálculo que faciliten la tarea.

Ejemplo ¿Cuál es el valor de k para que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ k & 0 & -1 \\ 1 & k & 2 \end{bmatrix}$ tenga determinante cero?

Solución
Si llamamos A a la matriz dada en el ejemplo, por definición:

$$\det(A) = 1.\ 0.\ 2 + (-2)\ (-1)\ 1 + 3.\ k.\ k - 3.\ 0.\ 1 - (-2)\ k.\ 2 - 1.(-1).\ k = 0$$

Luego

$2 + 3\,k^2 + 4\,k + k = 0$ y, trabajando algebraicamente se obtiene $3\,k^2 + 5\,k + 2 = 0$. Las soluciones de la ecuación de segundo grado son $k_1 = -\,2/3$ o $k_2 = -1$.

Respuesta: los valores que puede tomar k para que det(A) = 0 son -2/3 o -1.

Propiedades de los determinantes

El fin de las propiedades de un objeto matemático, es poder realizar cálculos de manera sencilla (sin necesidad de aplicar siempre la definición). Las propiedades se demuestran utilizando las definiciones y luego, por ser verdaderas, se pueden utilizar siempre (para todos los casos). Se enuncian a continuación algunas propiedades.

1) Si una matriz tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.

2) Si una matriz tiene dos o más líneas (filas o columnas) paralelas proporcionales, su determinante es cero.

3) El determinante de una matriz triangular (superior o inferior o diagonal) es igual al producto de los elementos de la diagonal.

   En símbolos $A = (a_{ij})$ *triangular*, $\det(A) = a_{11} \,.\, a_{22} .\, \ldots \,.\, a_{nn} = \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

   (El símbolo $\prod$ se lee "productoria" e indica de forma abreviada el producto de los elementos de la diagonal de A, desde $i = 1$ hasta $i = n$.)

4) El determinante de una matriz y de su transpuesta son iguales.

5) Si en una matriz se permutan dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.

6) Si en una matriz A, se multiplica una línea por un escalar k no nulo, entonces el determinante de la nueva matriz obtenida, B, es igual a k veces el determinante de la matriz dada. En símbolos: det(B) = k. det(A).

7) Si en una matriz A, se le suma a una línea otra paralela a ella multiplicada por un escalar k no nulo, entonces el determinante no varía. Es decir, si la nueva matriz obtenida es B, det(B) = det(A).

(Las propiedades 5, 6 y 7 establecen la relación entre las operaciones elementales en las filas o columnas de una matriz y el valor de su determinante)

8) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes. (Esta propiedad es considerada por varios autores como una de las más importantes.)

9) Si A, B y C son matrices de *nxn* que sólo difieren en la *r*-ésima línea (fila o columna), siendo la *r*-ésima línea de C la suma de las *r*-ésimas líneas de A y B, entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Relación entre matrices inversibles o no singulares y sus determinantes

Teorema: Una matriz es inversible o no singular si, y sólo si, su determinante es distinto de cero.

I) Demostración a derecha: "Si A es inversible entonces su determinante es distinto de cero."

Por definición, si A es una matriz inversible, $A\,A^{-1} = I$ y $A^{-1}\,A = I$

Si dos matrices son iguales, sus determinantes también lo son: $\det(A\,A^{-1}) = \det(I)$

Por propiedad 8: $\det(A).\ \det(A^{-1}) = \det(I)$. Como $\det(I) = 1$, se tiene que

$$\det(A)\ .\ \det(A^{-1}) = 1 \quad (1)$$

y, por lo tanto, $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$ son números distintos de cero (en este caso, recíprocos); en particular,

$$\mathbf{det(A) \neq 0.}\ \Delta$$

Más aún, de la expresión (1), despejando $\det(A^{-1})$ se obtiene el determinante de la matriz inversa, que es

$$\mathbf{det(A^{-1}) = 1/\ det(A).}$$

Es decir, el determinante de una matriz y el de su inversa son números recíprocos entre sí.

II) Demostración a izquierda: "Si det(A) ≠ 0 entonces A es una matriz inversible o no singular."

Si la matriz A no está en forma escalonada reducida, existen matrices elementales (inversibles o no singulares) $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que corresponden a las operaciones elementales de filas, tales que al premultiplicar a A, sucesivamente, dan la matriz R.

$$E_k\,(\ldots(E_2\,(E_1\,A))) = R \quad \mathbf{(2)}$$

donde R es una matriz escalonada reducida obtenida a partir de A por operaciones elementales sobre sus filas. Si despejamos la matriz A, premultiplicando en ambos miembros, sucesivamente, por las inversas de $E_k, \ldots, E_2$ y E_1, se obtiene

$$A = E_1^{-1}\ .\ E_2^{-1}\ \ldots.E_k^{-1}.\ R$$

Como el determinante de matrices iguales, es el mismo,

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}\ .\ E_2^{-1}\ \ldots.E_k^{-1}\ .\ R).$$

Siendo el determinante del producto de matrices igual al producto de los determinantes de dichas matrices, se tiene

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) .\det(E_2^{-1}) \ldots \det(E_k^{-1}) . \det(R)$$

Por hipótesis, $\det(A) \neq 0$**,** entonces todos los determinantes del segundo miembro son números distintos de cero; en particular, $\det(R) \neq 0$. Entonces la matriz R no tiene filas de ceros y, en consecuencia, R es la matriz identidad, R = I. Luego, se observa en **(2)** que A es equivalente por filas a I y, por una propiedad anterior: **A es inversible**. Δ

Ejemplo Calcular $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ utilizando propiedades.

Solución

El objetivo es aplicar propiedades para llevar la matriz a ser triangular superior y en consecuencia, calcular el determinante como el producto de los elementos de la diagonal. Se comienza con la permutación entre la fila 1 y 3 para tener un pivote en la posición correspondiente al elemento de la fila 1 y columna 1, lo que implica el cambio de signo del determinante. Luego se remplaza la fila 2 por ella más -2 veces la fila 1 ($F_2' = F_2 + (-2)\ F_1$). Después se remplaza la fila 3 por ella más -3 veces la fila 1 ($F_3' = F_3 + (-3)\ F_1$). Observar las siguientes propiedades aplicadas prestando atención a los cambios de signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = -(1 . 1 . (-19)) = 19$$

Actividad 1 Demostrar las propiedades 1, 2 y 3.

Actividad 2 Explicar, justificando, el resultado de det(kA), siendo k un escalar no nulo y A una matriz de orden *n*.

Actividad 3 Explicar, justificando, si el determinante de una suma de matrices es igual a la suma de los determinantes de dichas matrices.

Actividad 4 Si $\det(M) = p \neq 0$, calcular $\det((0,5\ M)^T)^{-1}$ y $\det(-3\ M^{-1})^3$.

Menor complementario o Menor

Definición *Sea A = (a_{ij}) una matriz de nxn.*

Se llama menor complementario del elemento a_{ij} de A o menor de a_{ij} y, se anota M_{ij}, al determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo Si A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, el menor correspondiente al elemento a_{23} = 3 (se suprime la fila 2 y la columna 3) es M_{23} = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ = - 12 – 4 = -16. (Observar que el menor es un determinante de **un** orden menor que el dado.)

Actividad ¿Cuántos menores distintos tiene una matriz de orden 2, 3 o *n*?

Cofactor

Definición *Sea A = (a_{ij}) una matriz de nxn.*
Se llama cofactor del elemento a_{ij} de A y, se anota C_{ij}, al número que se obtiene mediante la expresión $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Ejemplo Si A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, el cofactor correspondiente al elemento a_{31}= *2* es el número

$C_{31} = (-1)^{3+1}$. M_{31} = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ = 6 – (- 6) = 12. (Observar que si la suma *i+j* = 3+1 de la potencia de (- 1) es par, el resultado es positivo y coincide con el menor M_{31}.)

Matriz Cofactor

Definición *Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden n.*
Se llama matriz cofactor de A y, se anota, Cofact(A), a la matriz de elemento genérico C_{ij}.

En símbolos

$$Cofact(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & . & . & C_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Sea A= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, *Cofact(A)=(*$C_{ij}$*)* = $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$ es la matriz cofactor de A.

(Observar que es una matriz de 3x3, donde cada elemento es un número, el cofactor C_{ij}, con $i, j = 1, 2, 3$, correspondiente al elemento a_{ij} de la matriz dada A de 3x3.)

Matriz Adjunta

Definición *Sea A = (*a_{ij}*) una matriz de orden n.*
Se llama matriz adjunta de A y, se anota, Adj(A), a la matriz transpuesta de la matriz cofactor de A.
En símbolos: $Adj(A) = (Cofact(A))^T$

Ejemplo Si A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, la matriz adjunta de A es la matriz

$$\mathrm{Adj}(A)=(\mathrm{Cofact}(A))^T=\mathrm{Cofact}(A^T) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$.(Observar que se obtiene la misma matriz

al transponer la matriz cofactor de A, que si se calcula la matriz cofactor de la transpuesta de A.)

Cálculo de determinantes: Desarrollo por Cofactores o Regla de Laplace

Este método (en algunos textos es la definición de determinantes), permite obtener determinantes, realizando la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos cofactores.

Por ejemplo, si A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ y se elige la fila 3 que tiene un cero para el desarrollo o

expansión por cofactores (¿porqué?), se obtiene

$$\det(A) = 2.\ C_{31} + (-4)\ .C_{32} + 0.\ C_{33} = 2\ (-1)^{3+1}\ M_{31} + (-4)\ (-1)^{3+2} M_{32} = 64.$$

(Observar que se obtiene el mismo determinante, usando la definición, aplicando la Regla de Sarrus, utilizando propiedades o, mediante el desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier fila o columna).

Teorema Regla de Laplace Sea A es una matriz de *nxn* de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de A se puede calcular haciendo la suma de los productos de los elementos de una línea (fila *i* o columna *j; i, j* = 1, 2,…, *n*) por sus respectivos cofactores.

En símbolos:

a) det(A) = $a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + ... + a_{in}\ C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ C_{ij}$ (*desarrollo a lo largo de la i-ésima fila de* A)

b) det(A) = $a_{1j}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + ... + a_{nj}\ C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ C_{ij}$ (*desarrollo a lo largo de la j-ésima columna de* A*)*

Ejemplo Calcular, usando la Regla de Laplace, $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

Fórmula para la inversa de una matriz

Propiedad: *Si A = (a_{ij}) es una matriz de orden n, entonces* ***A . Adj(A) = det(A) . I***

Teorema *Si A es una matriz inversible, entonces* $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}}$ ***. Adj(A).***

Demostración

Por la propiedad anterior: *A . Adj(A) = det(A) . I*

Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}: $A^{-1}(A . Adj(A)) = A^{-1} (det(A) . I)$

Asociando, y dividiendo por $\det(A) \neq 0$, se tiene: $(1/ det(A)). Adj(A) = A^{-1}$ Δ

Ejemplo Si A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, calcular A^{-1} utilizando determinantes.

Solución

Se utiliza la fórmula de cálculo $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A).}$

Primero conviene calcular determinante de A y verificar que es distinto de cero; caso contrario no existe matriz inversa. En este ejemplo det(A) = 64 (distinto de cero). Luego,

$$A^{-1} = 1/\det(A)).\mathrm{Adj}(A) = (1/64).\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = (1/32).\begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

(Verificar el resultado calculando $A.A^{-1}$ o el producto conmutado. Es suficiente realizar un solo producto.)

Actividad Calcular la inversa de matrices de orden 2 utilizando la fórmula de cálculo con determinantes.

Actividad Calcular la inversa de matrices diagonales de orden *n* utilizando la fórmula de cálculo con determinantes.

Actividad Demostrar que la matriz A = $\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es inversible para todos los valores de θ (es decir, no depende de θ) y, luego dar A^{-1}. (A es la matriz de rotación en sentido antihorario en el espacio tridimensional IR^3, respecto del eje z.)

Actividad Demostrar que si A es una matriz inversible de *nxn*, $(\mathrm{Adj}(A))^{-1} = \mathrm{Adj}(A^{-1})$

Regla de Chio

Es un algoritmo que permite calcular determinantes de orden *n* reduciéndolo a otro de orden *n-1*. El procedimiento puede reiterarse hasta lograr un determinante de orden 3, 2 o 1, mediante la combinación de propiedades que hacen ceros todos los elementos de una columna, excepto uno de ellos, el pivote y luego se hace el desarrollo por cofactores o Regla de Laplace en dicha columna. Es similar al mecanismo del método de Gauss – Jordan para la determinación del rango o la inversa de una matriz. (Rojo, 1985)

Ejemplo Calcular, usando la Regla de Chío, det(A) = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Solución

Elegimos como pivote un elemento no nulo, por ejemplo el a_{33} = -2 (conviene elegir el 1 si fuese posible) y dividimos la tercera fila por -2, por lo que el determinante queda multiplicado por este valor (propiedad 6 de determinante). Los restantes elementos de la columna del pivote se anulan, y los elementos del determinante que no figuran ni en la fila ni en la columna del pivote se los transforma de acuerdo a la regla del "rectángulo".

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la tercera columna (Regla de Laplace), se tiene

$$\det(A) = -2.\ C_{33} = = -2\ (-1)^{3+3}\ M_{33} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Reiterando el procedimiento, si se toma como pivote $a_{12} = -1$ y dividiendo la fila 1 por -1,

$$\det(A) = -2\ (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\ C_{12} = 2.\ (-1)^{1+2}\ M_{12} = -\ 2. \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -128$$

Interpretación geométrica de determinantes de 2x2 y de 3x3

Si se grafican en el plano *xy* los vectores no nulos y no paralelos $\boldsymbol{u} = (a, b)$ y $\boldsymbol{v} = (c, d)$ (con origen en (0, 0)), se observa geométrica y analíticamente que el área del paralelogramo de lados vectoriales ***u*** y ***v*** es igual al valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,.d - c.\ b.$

Si se grafican en el espacio real tridimensional los vectores no nulos y no paralelos mutuamente, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ (con origen en (0, 0, 0)), se observa geométrica y analíticamente que el volumen del paralelepípedo (caja) de lados vectoriales ***u, v*** y ***w*** es igual al

valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

Actividad Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos (1, 2), (2, -2) y (- 4, -3) usando determinantes. (Ayuda: una alternativa es sumar las áreas de tres triángulos cuyos lados son los vectores posición de los puntos dados). *Respuesta: 12,5 unidades de área.*