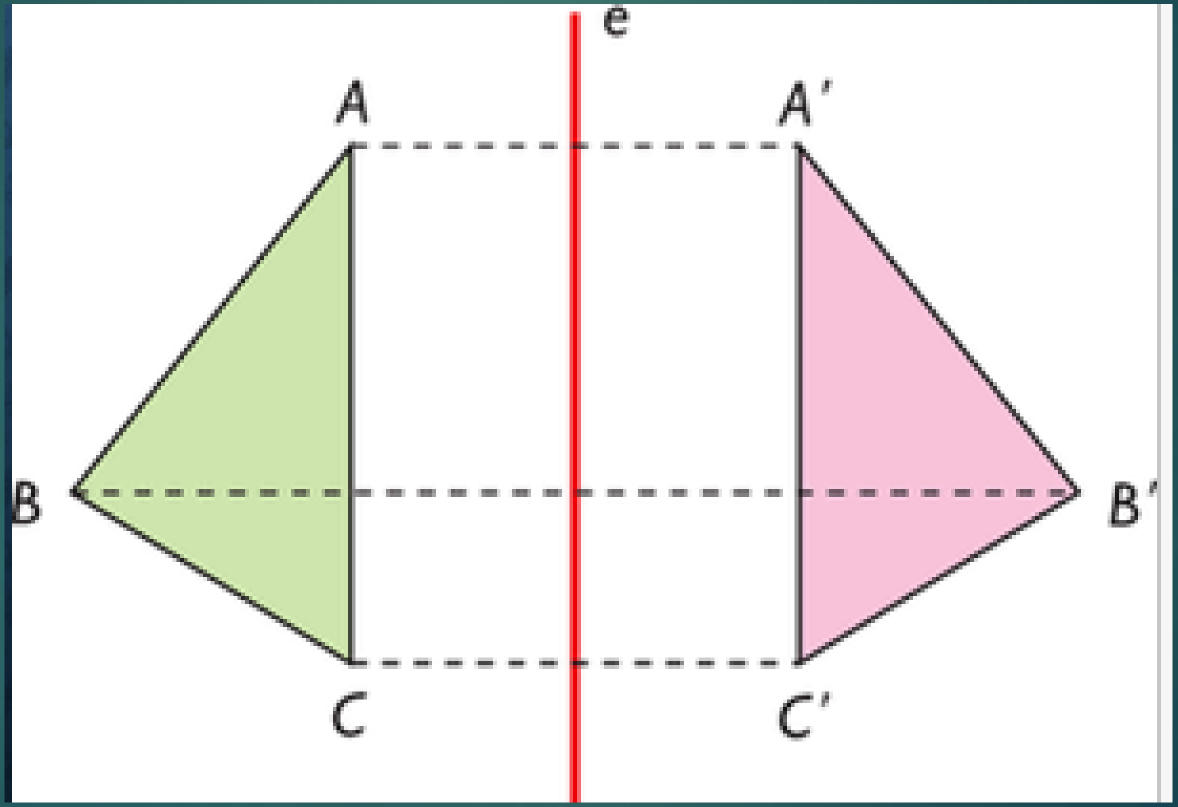
UNIDAD 5 y 6:

TRANSFORMACIONES LINEALES

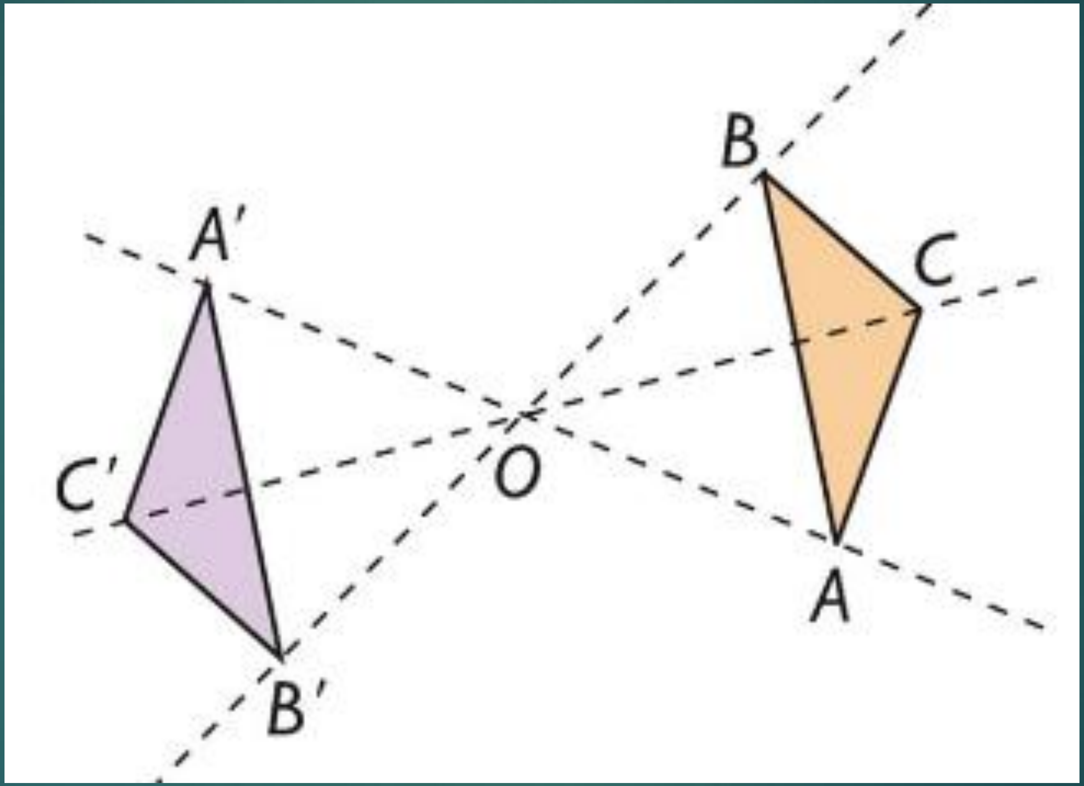
Y

MATRIZ ASOCIADA

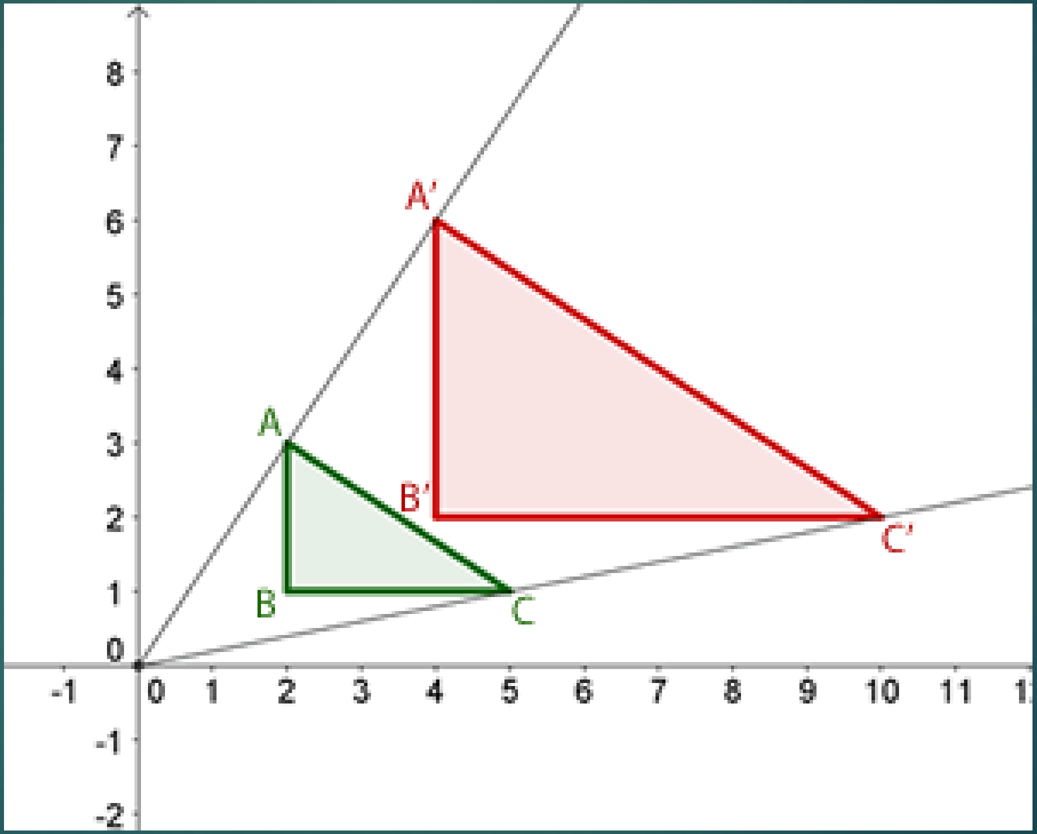
Simetría axial



Simetría radial

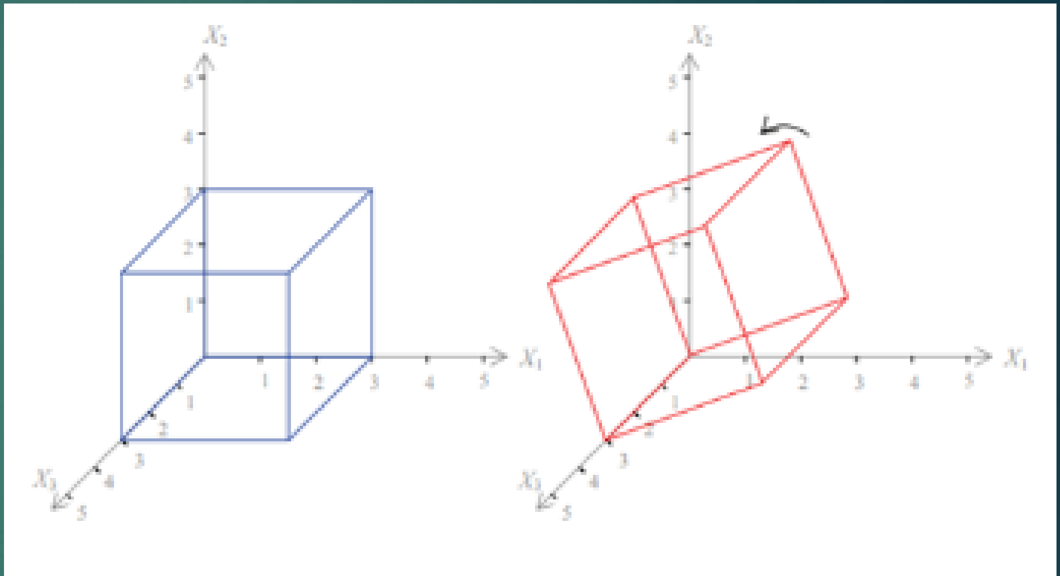


Homotecias

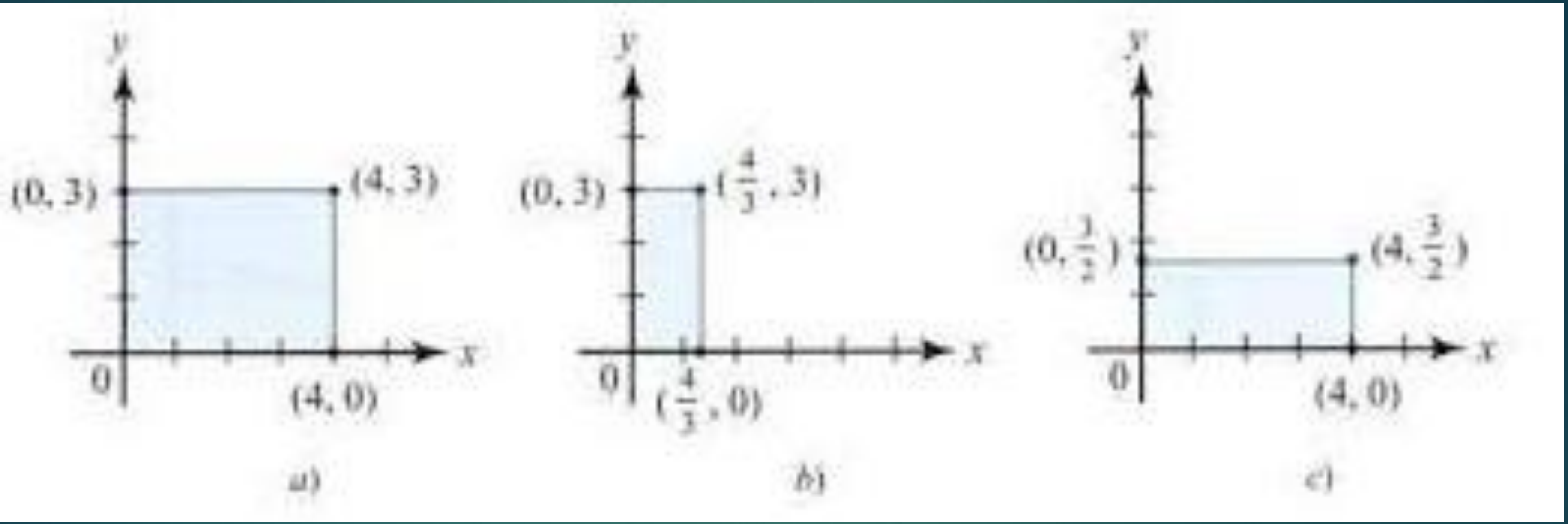


Rotaciones

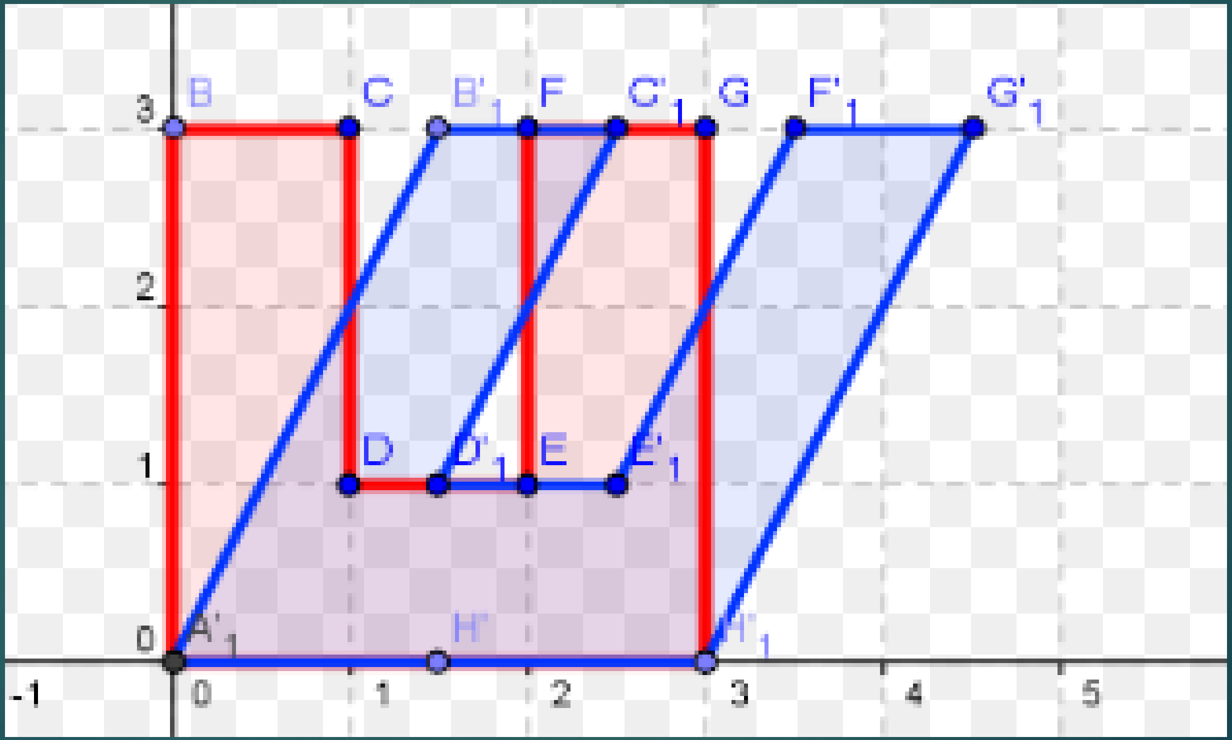

Sentido Antihorario
Arco de giro
Ángulo de giro
90°
Centro de giro
A
B
C
A'
B'
C'
O


X_1
X_2
X_3

Contracciones



Cizalladura

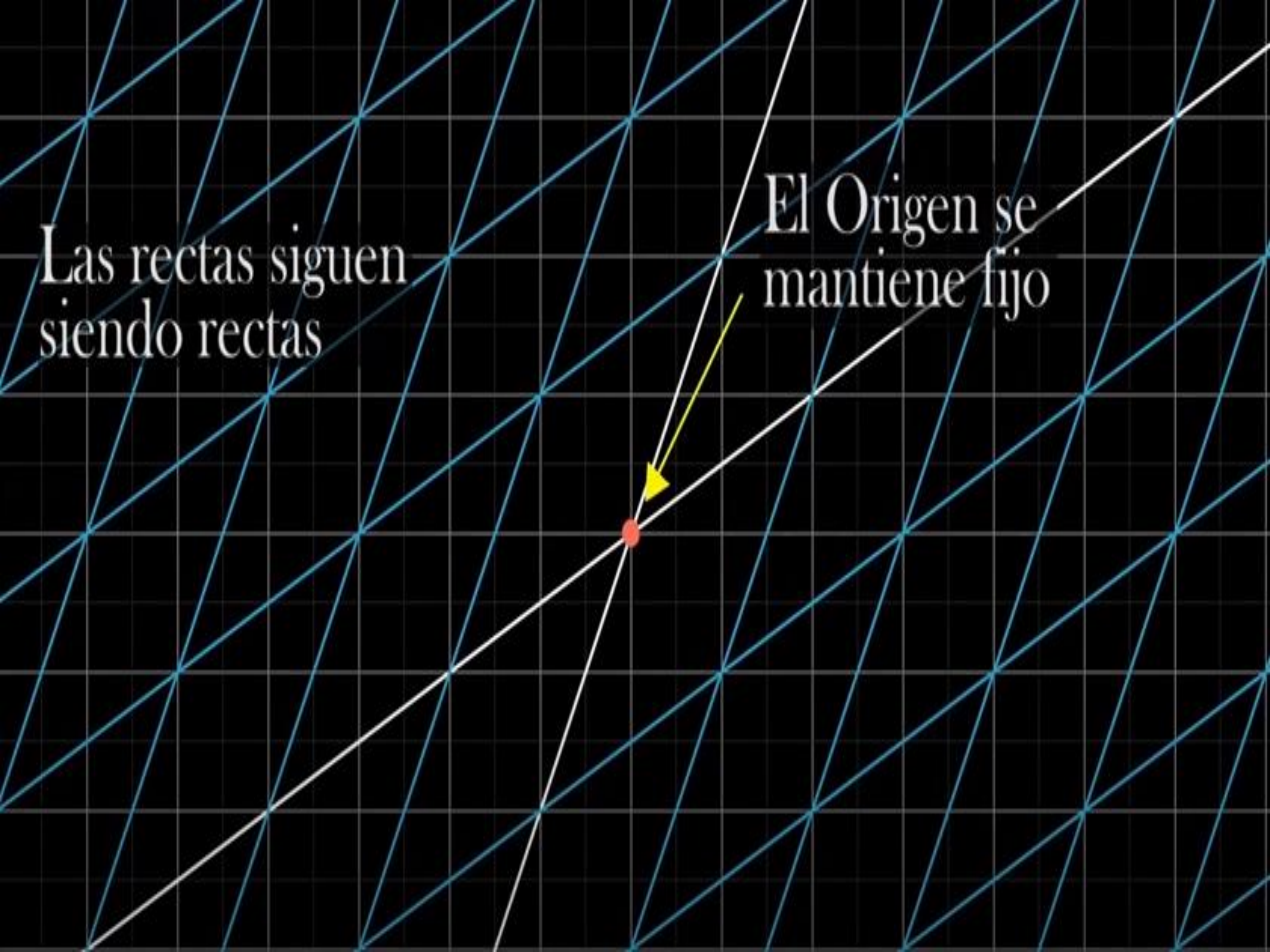


Las Transformaciones lineales presentes en la vida real


Homotecia o Escalamiento

Proyección sobre un plano

https://youtu.be/YJfS4_m_0Z8?t=117


Las rectas siguen siendo rectas
El Origen se mantiene fijo

Definición:

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo. La función T, definida de V en W, es una transformación lineal TL si satisface las siguientes condiciones:

$$T(u+v)=T(u)+T(v), \quad \text{para todo } u \text{ y } v \text{ de V;}$$

$$T(k\cdot u)=k\cdot T(u), \quad \text{para todo } u \text{ de V y } k \text{ real.}$$

$$T(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, T(u) + \beta\, T(v)$$

para todo u y v de V y
para todo α y β reales

TRANSFORMACIÓN NULA

$$T: V \to W$$

$$T(v) = 0$$

Un ejemplo de operador lineal nulo definido en IR^2 es

$$T: IR^2 \to IR^2 \text{ tal que } T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. ***Operador lineal identidad***

Es de la forma

$$Id : V \rightarrow V \text{ tal que}$$
$$T(v) = v$$

Ejemplo 1:

$$T : IR^2 \rightarrow IR^2 \text{ tal que}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$Id : IR^{2x2} \rightarrow IR^{2x2} \text{ tal que}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Transformación lineal

$T : IR^n \to IR^m$ tal que

$$T(v) = A \cdot v$$

$$T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = A_{mxn} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A \text{ una matriz fija}$$

Importante: Toda matriz mxn determina una aplicación lineal de IR^n en IR^m y recíprocamente.

Ejemplo de transformación lineal matricial

Sea $T: IR^2 \rightarrow IR^3$ la función definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Pruebe que T es transformación lineal.

Propiedades de las transformaciones lineales

1) Sea $T : V \rightarrow W$. Si T es una TL entonces $T(0) = 0$.

2) Sea T una transformación lineal de V en W y v un vector de V entonces $T(-v) = -T(v)$.

3) Sea T una transformación lineal de V en W, u y v vectores de V entonces $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

1) Sea $T: V \to W$. Si T es una TL entonces $T(0) = 0$.

Enuncie la afirmación recíproca de la propiedad 1. Determine su valor de verdad.

Sea $T: V \to W$. Si $T(0) = 0$ entonces T es una TL .

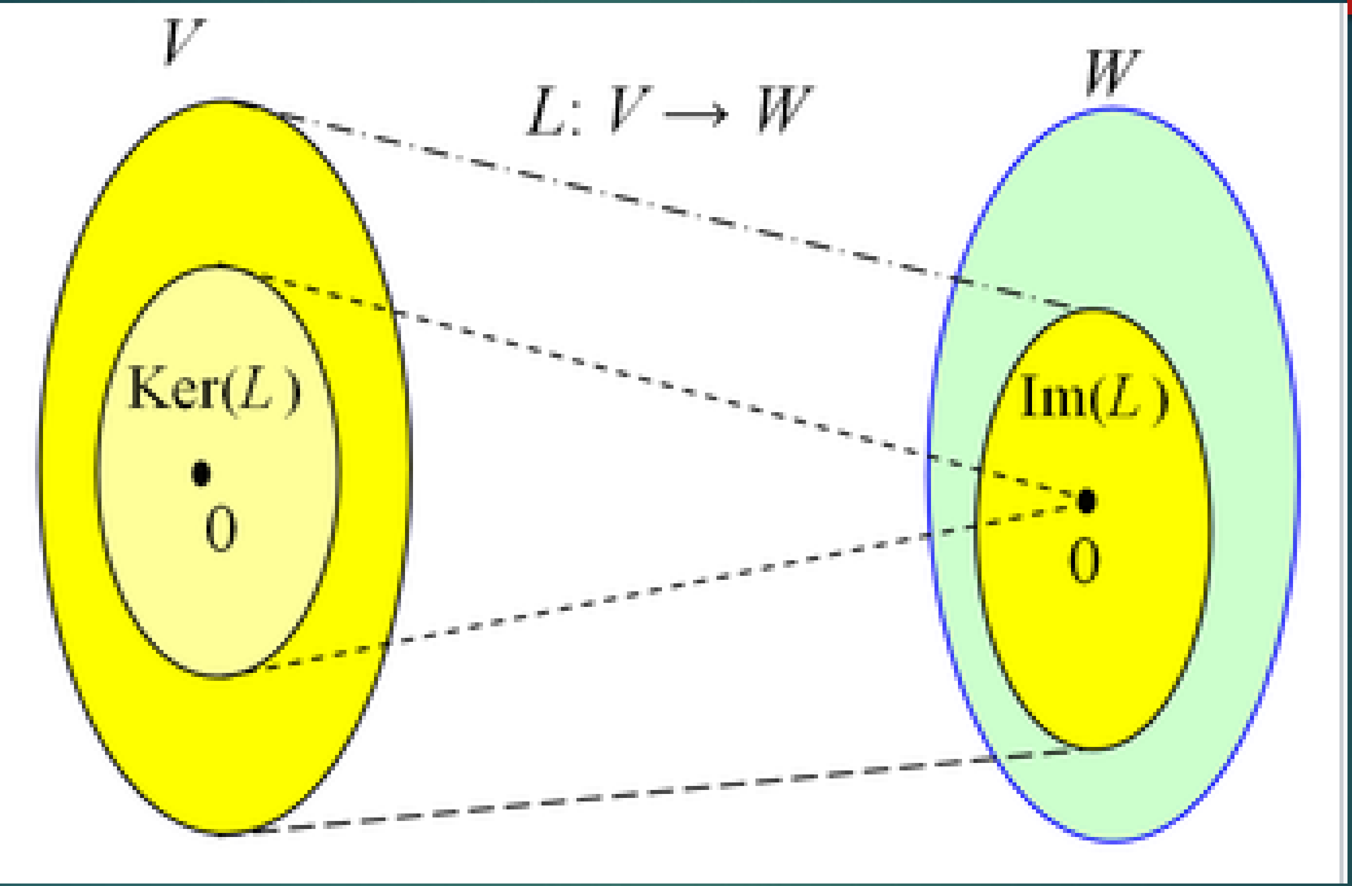
Enuncie la afirmación contrarrecíproca de la propiedad 1. Determine su valor de verdad.

Sea $T: V \to W$. Si $T(0) \neq 0$ entonces T NO es una TL .

Teorema

Sea T una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en otro W. Sea $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ un subconjunto de vectores arbitrarios de W, donde los w_i no son necesariamente distintos. Entonces existe y es única la transformación T, tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, $T(v_3) = w_3$, ..., $T(v_n) = w_k$.

NÚCLEO o KER DE UNA TL



$$N(T) = \{v \in V \ / \ T(v) = 0\}$$

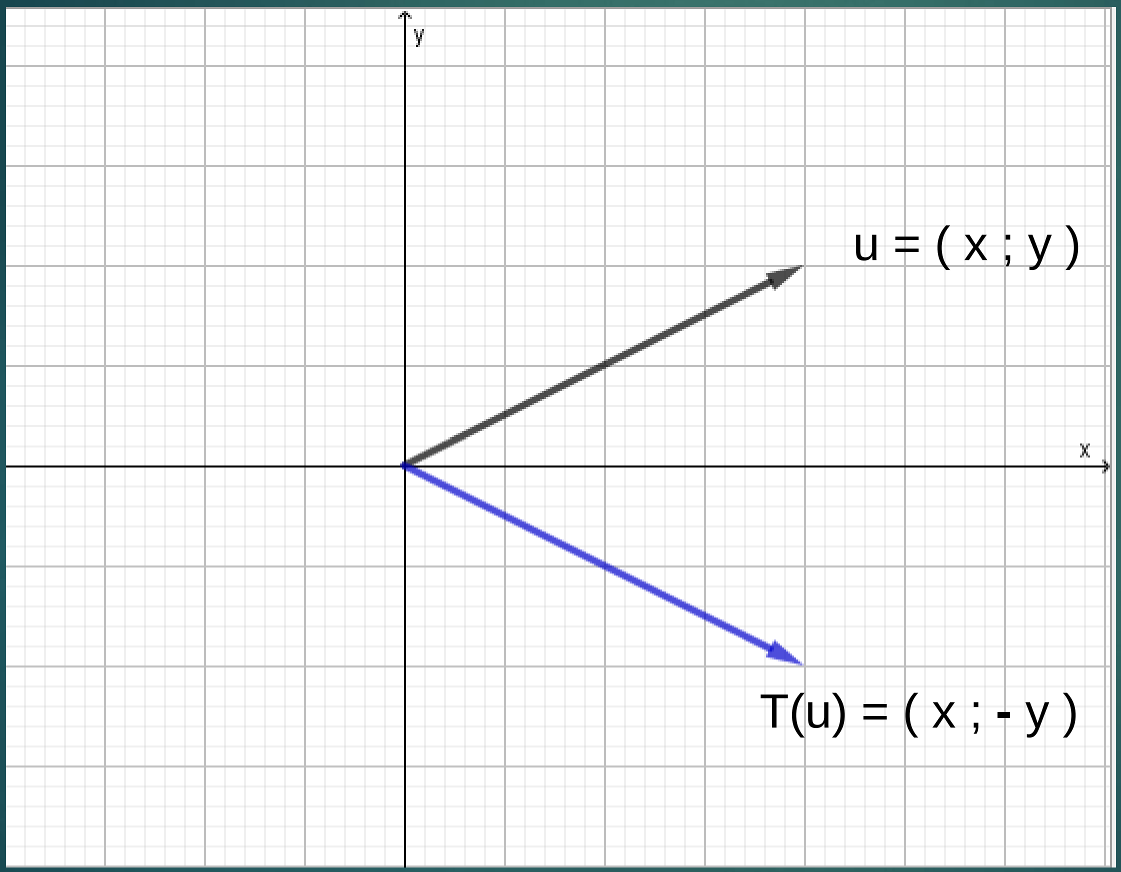
IMAGEN DE UNA TL

$$T : V \rightarrow W$$

$$Im(T) = \{\, w \in W \ / \ \exists \ v \in V \ : \ T(v) = w \,\}$$

Matrices asociadas estándares especiales en IR^2

a) *Reflexión o simetría respecto del eje de abscisas*

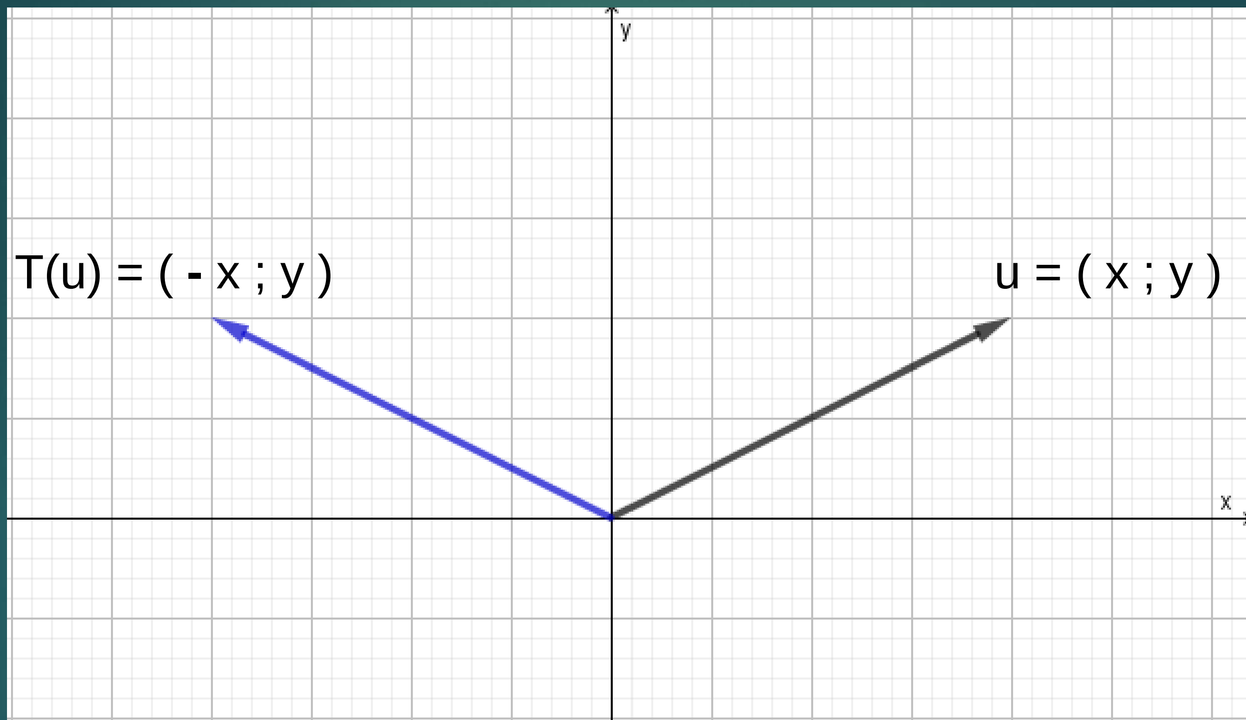


$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) *Reflexión o simetría respecto del eje de ordenadas*

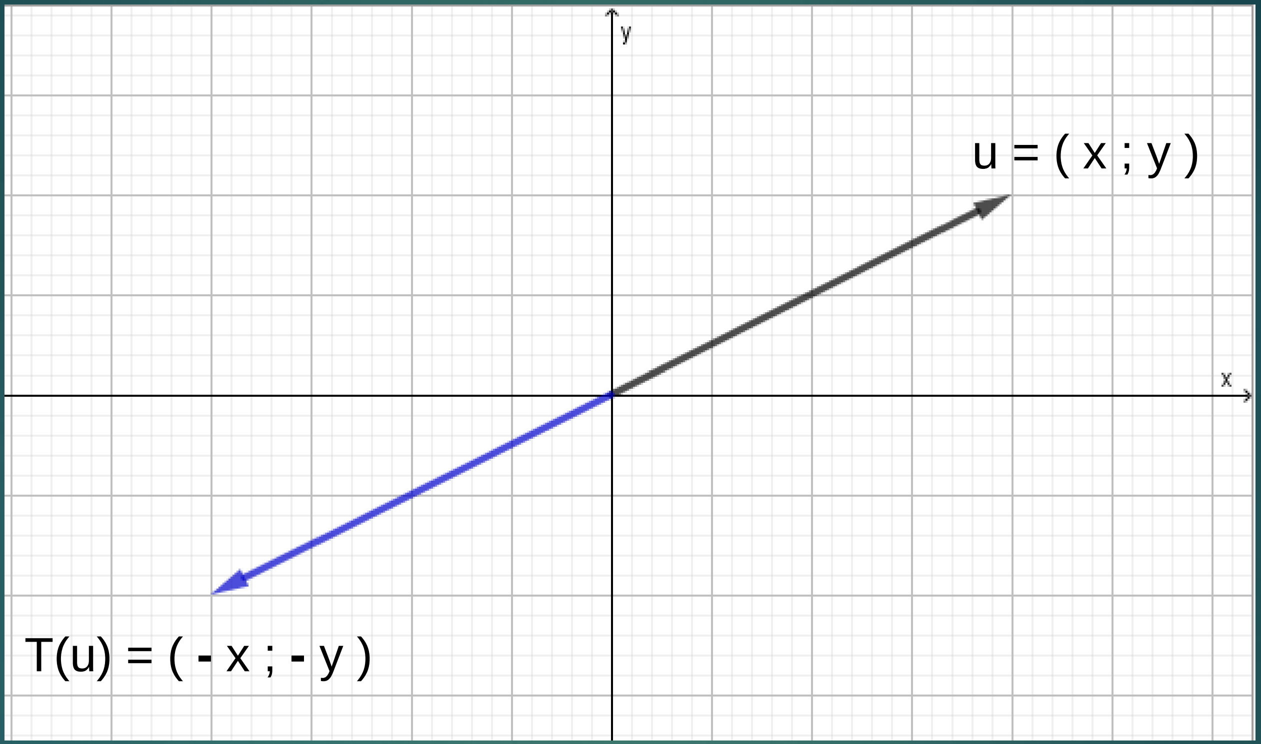


$$T : IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

c) *Reflexión o simetría respecto del origen de coordenadas*

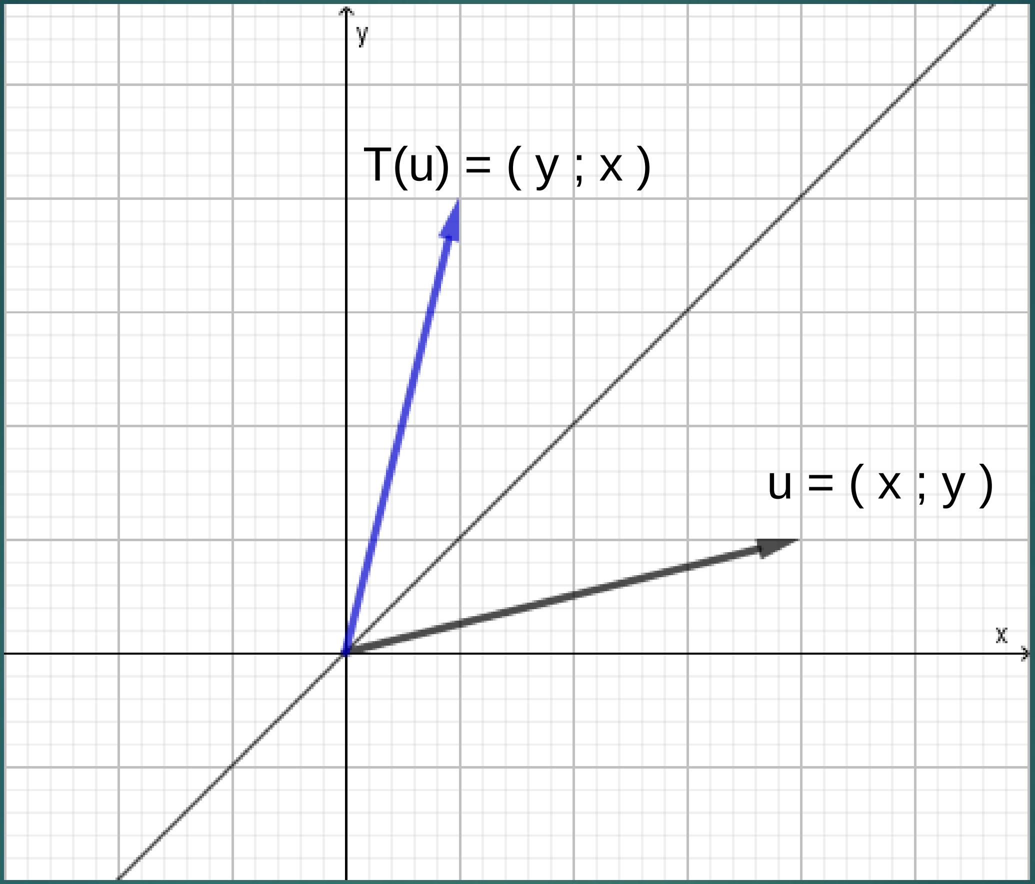


$$T : IR^2 \to IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d) *Reflexión o simetría respecto de la recta identidad*

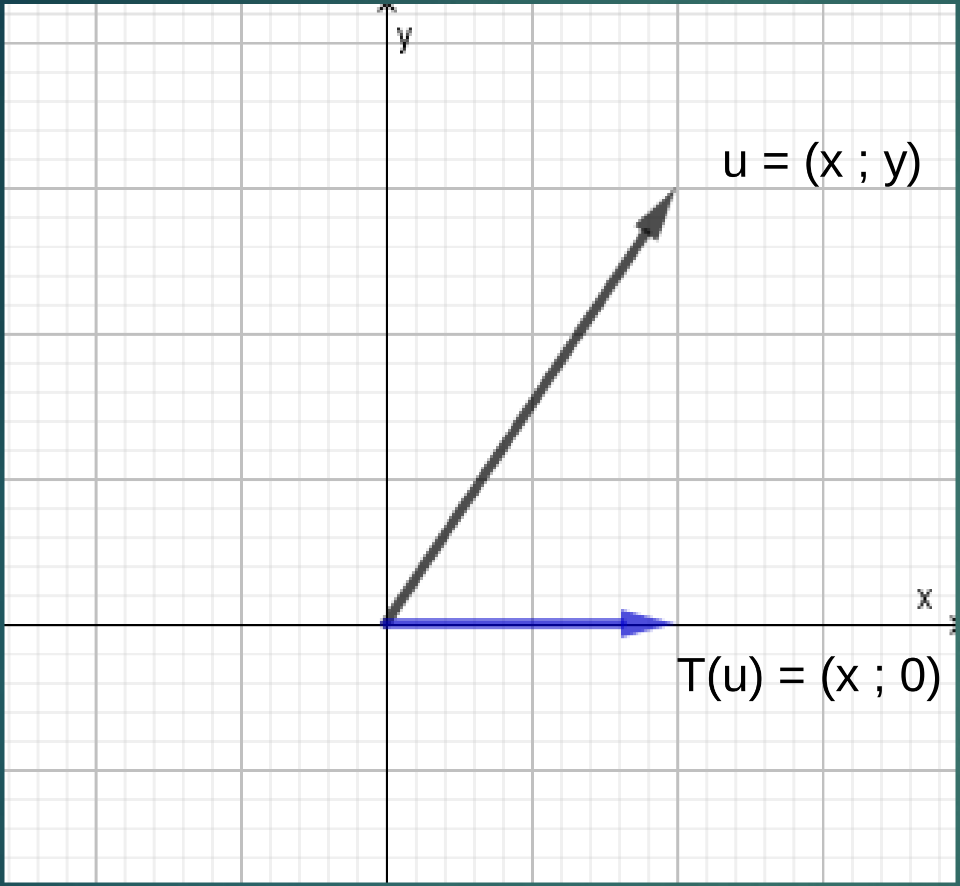


$$T: IR^2 \to IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e) *Proyección sobre el eje x*

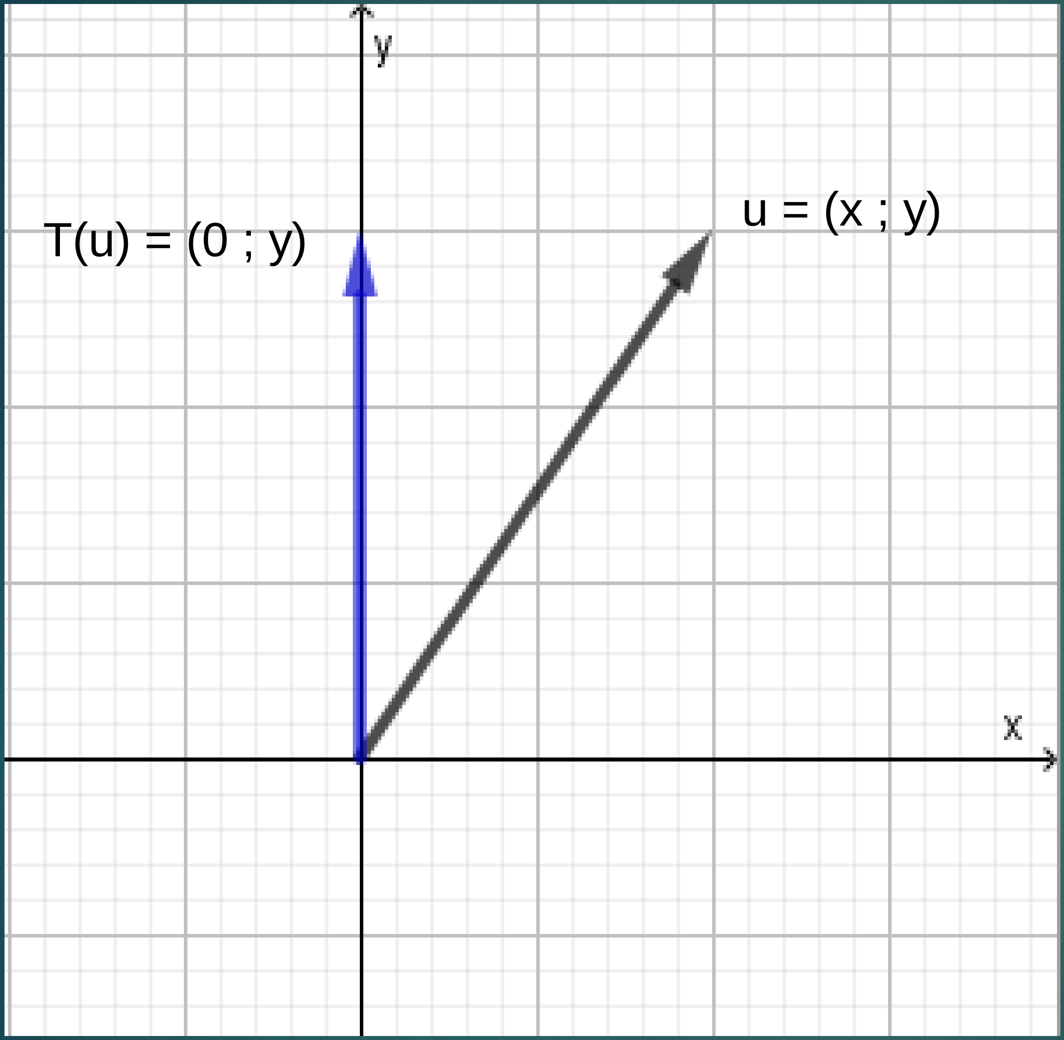


$$T : IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

f) *Proyección sobre el eje y*

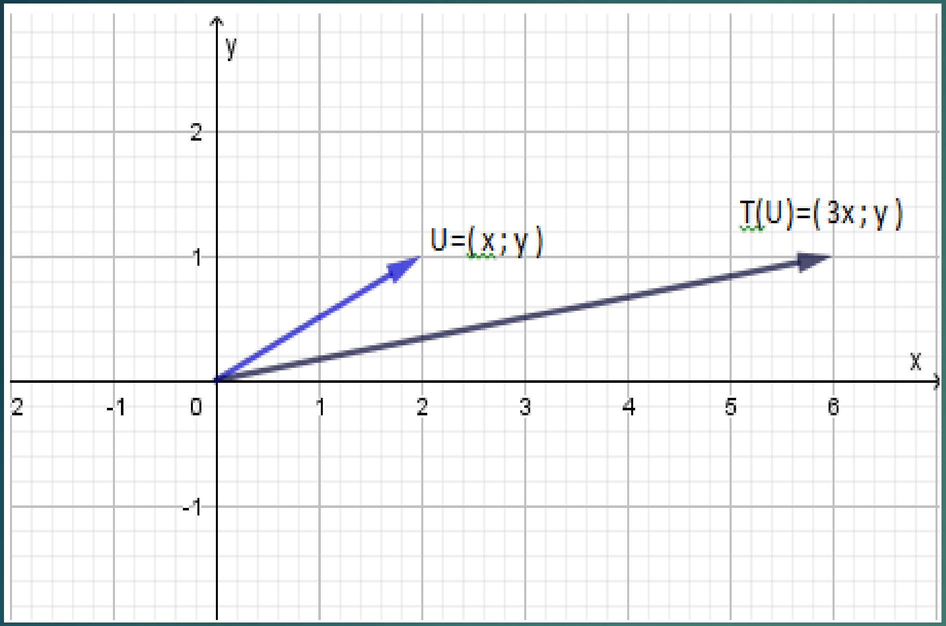


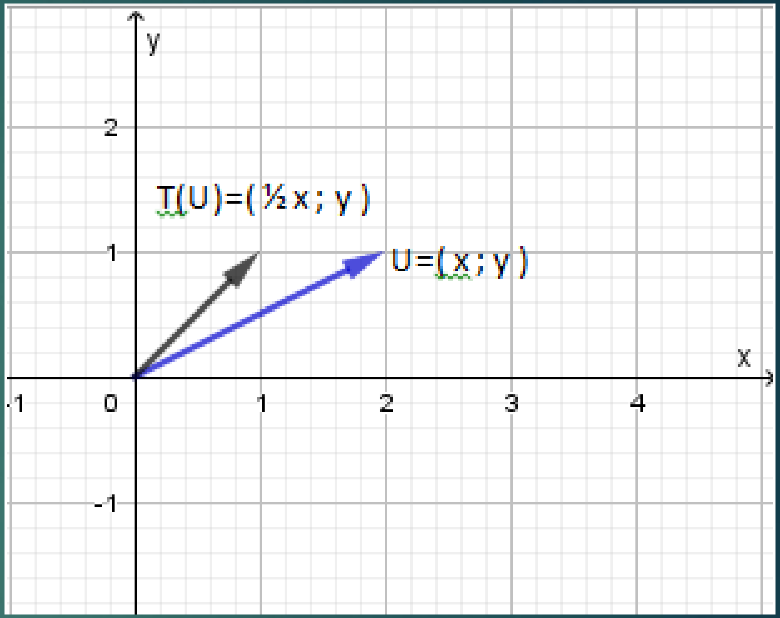
$$T : IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

g) *Dilatación o contracción en la dirección del eje x*



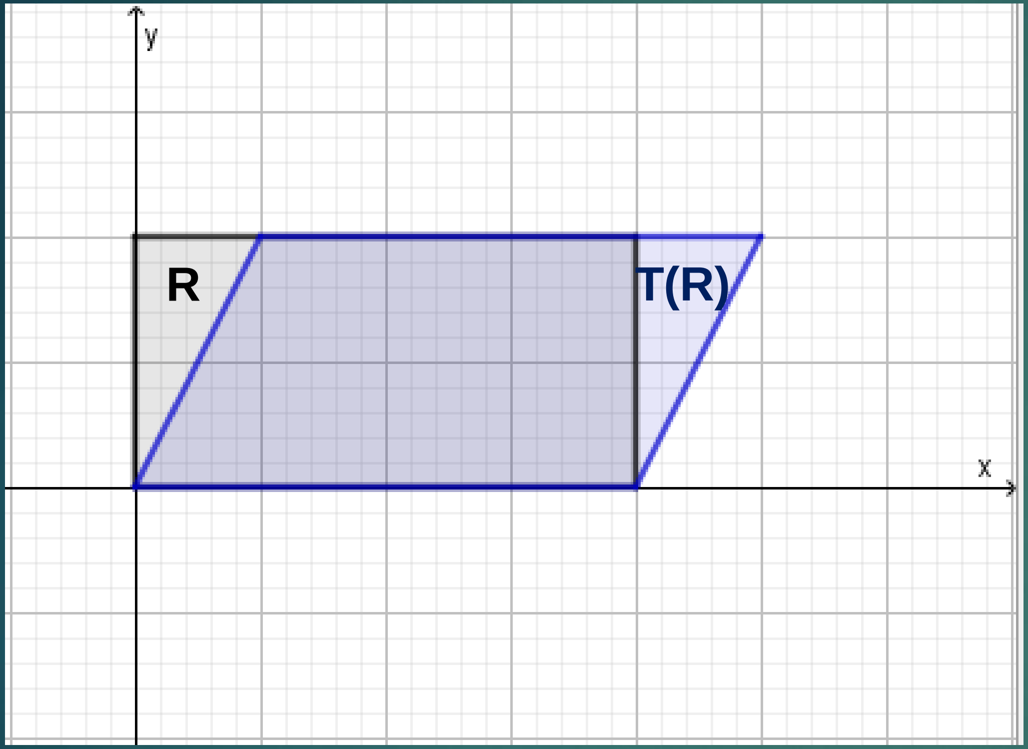


$T: IR^2 \to IR^2$, $k \in IR^+$ y $k \neq 1$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) *Corte o cizalladura horizontal*

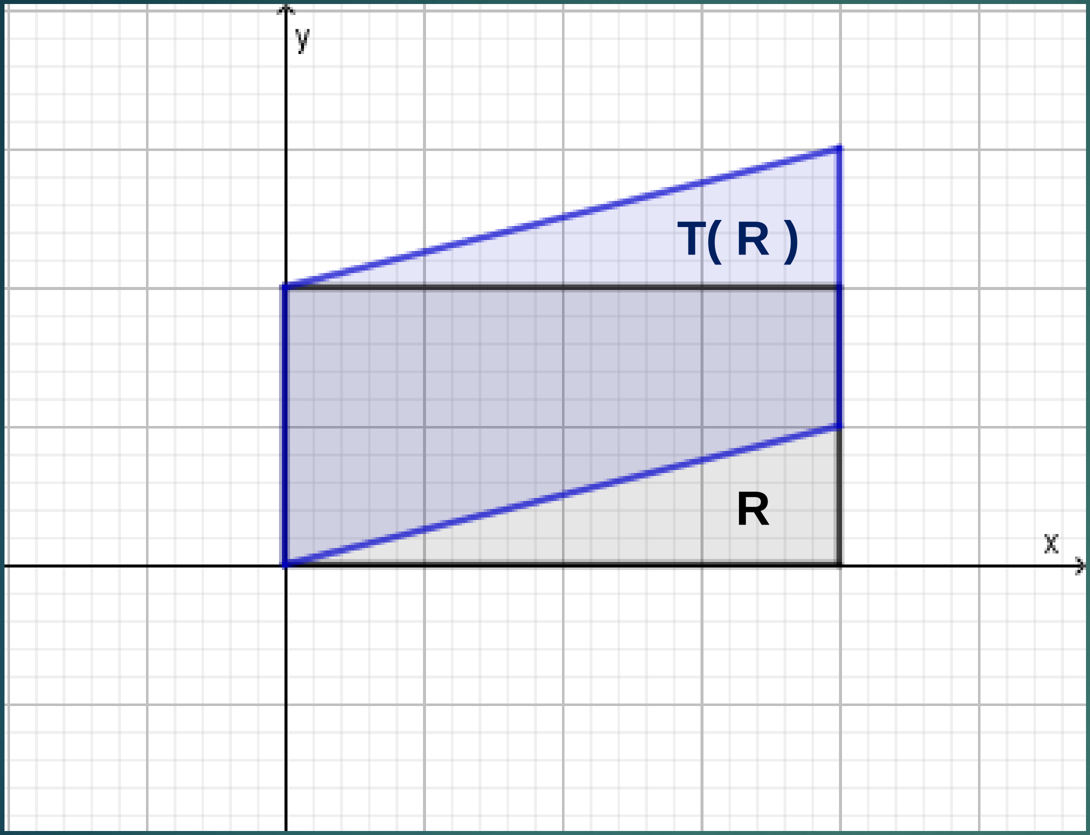


$T: IR^2 \rightarrow IR^2$ k $\in$IR y k $\neq 0$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

j) *Corte o cizalladura vertical*

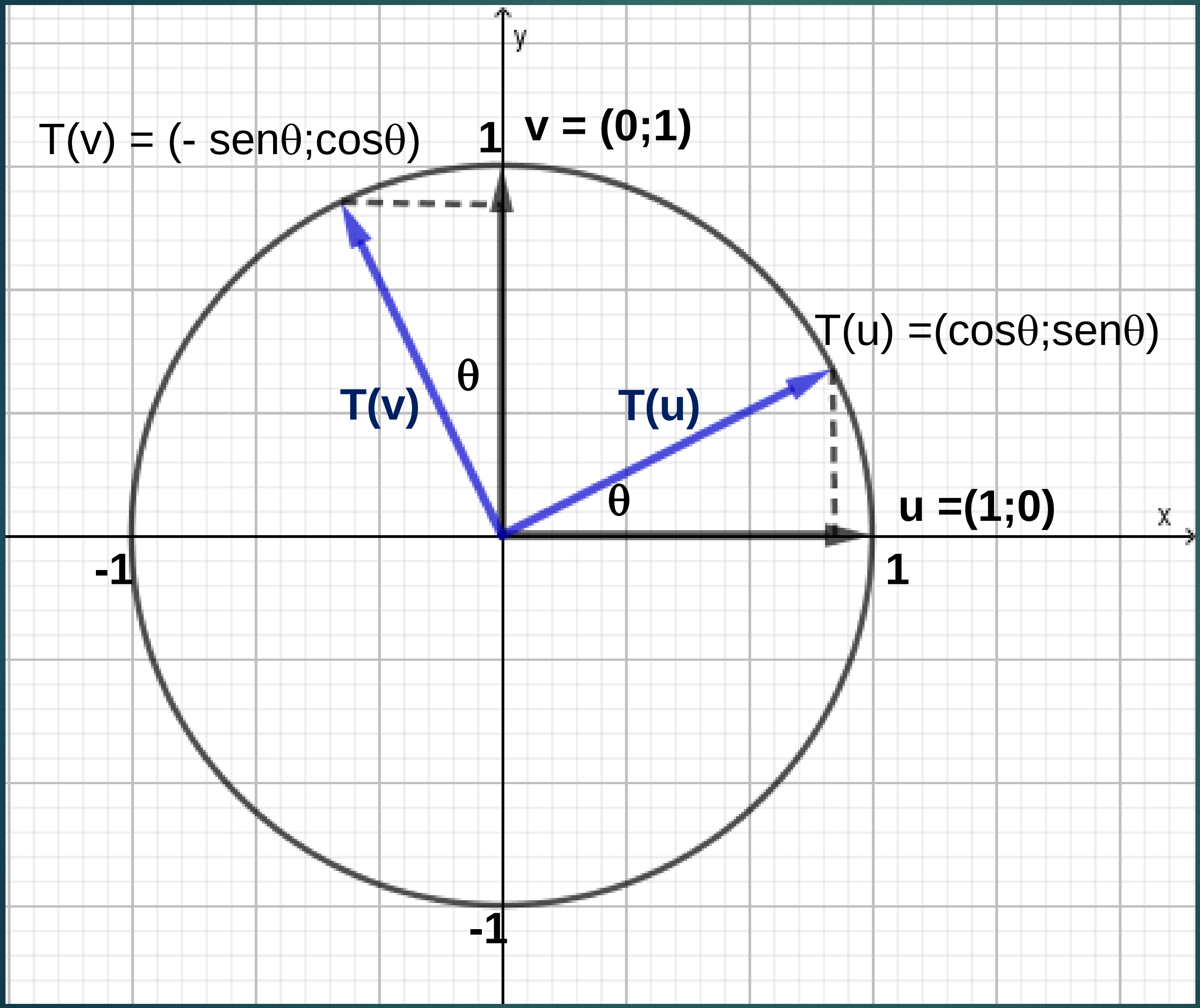


$T: IR^2 \rightarrow IR^2$, k $\in$IR y k $\neq$ 0

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y+kx \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

k) *Rotación de ángulo θ en sentido positivo*



$$T : IR^2 \to IR^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,sen\,\theta \\ x\,sen\,\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

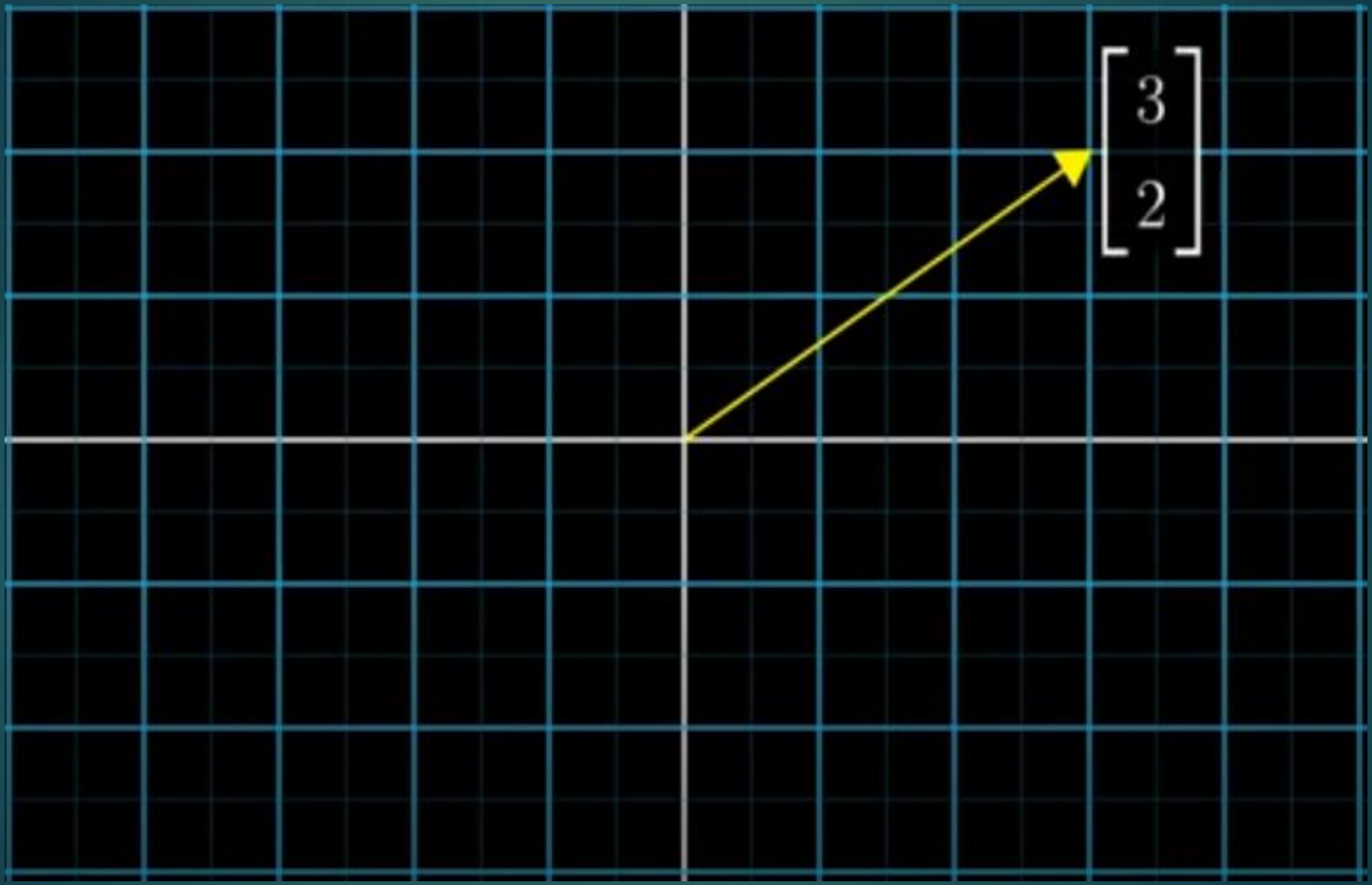
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

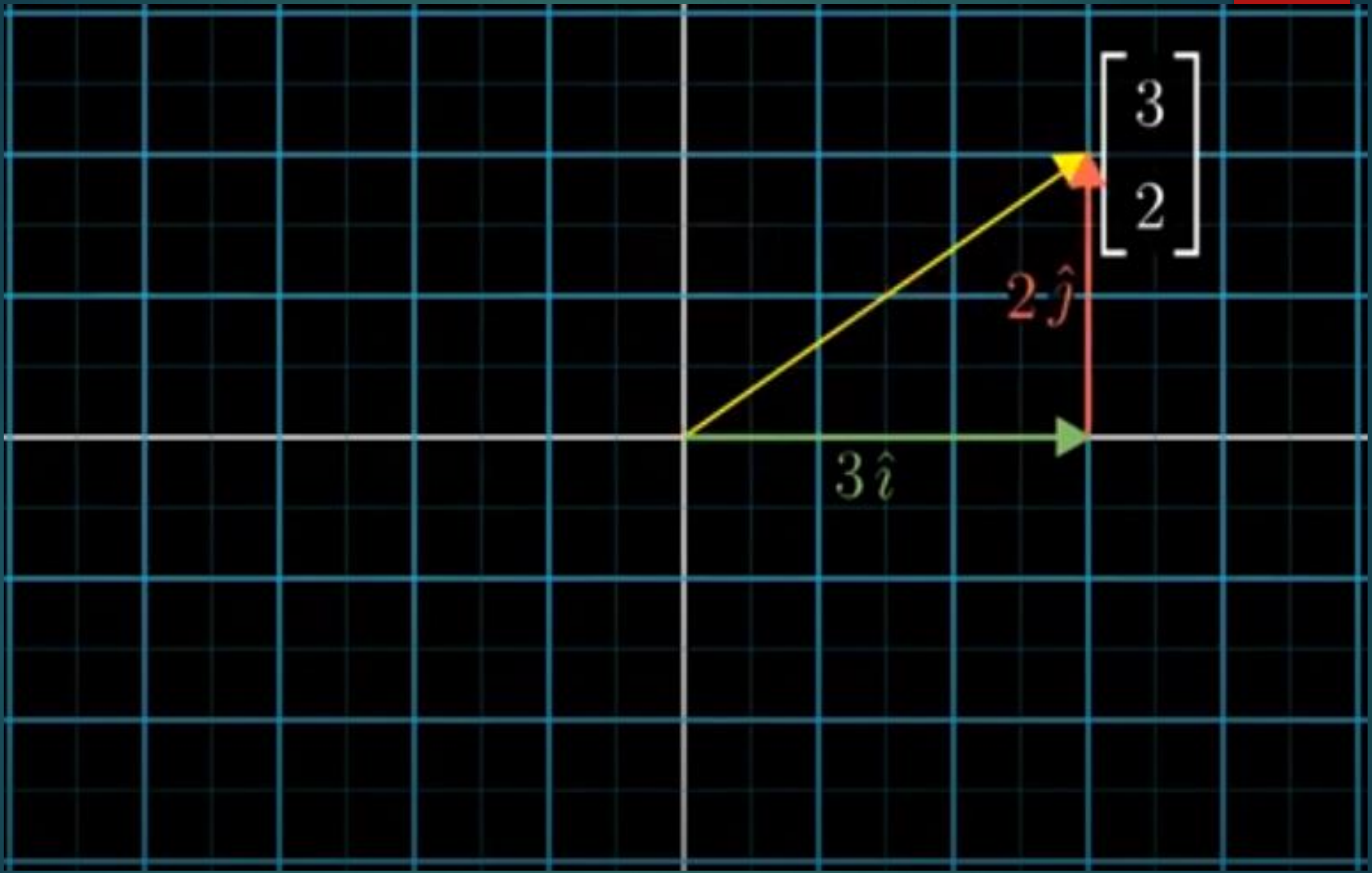
Ejemplo: Dada $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12x+10y \\ -15x-13y \end{pmatrix}$, halle:

a) la matriz A asociada a la transformación dada, respecto de las bases canónicas en el dominio y en el codominio.

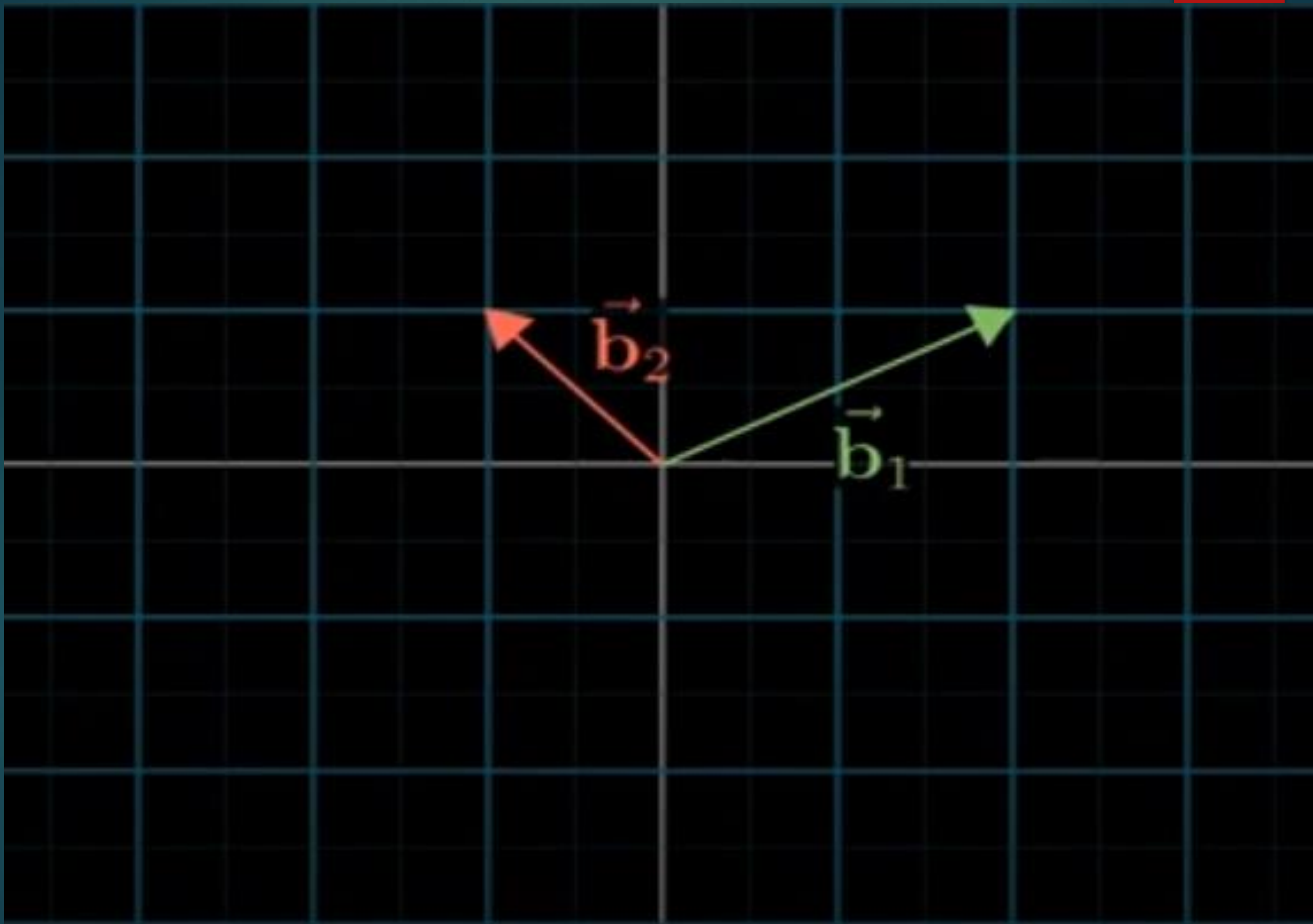
b) la matriz M asociada a la misma transformación, en este caso, respecto de la base $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y en el codominio.

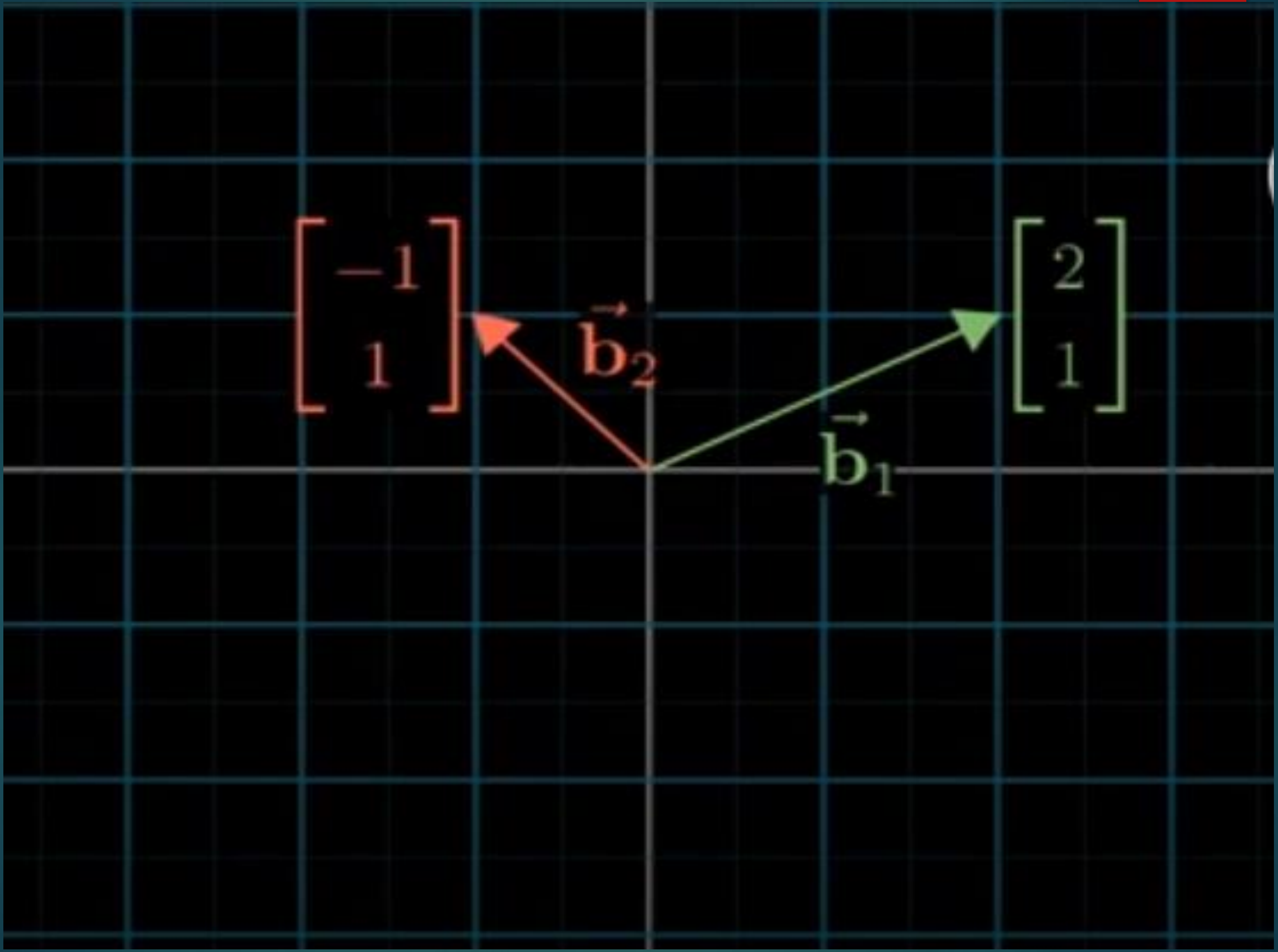
Coordenadas de un vector



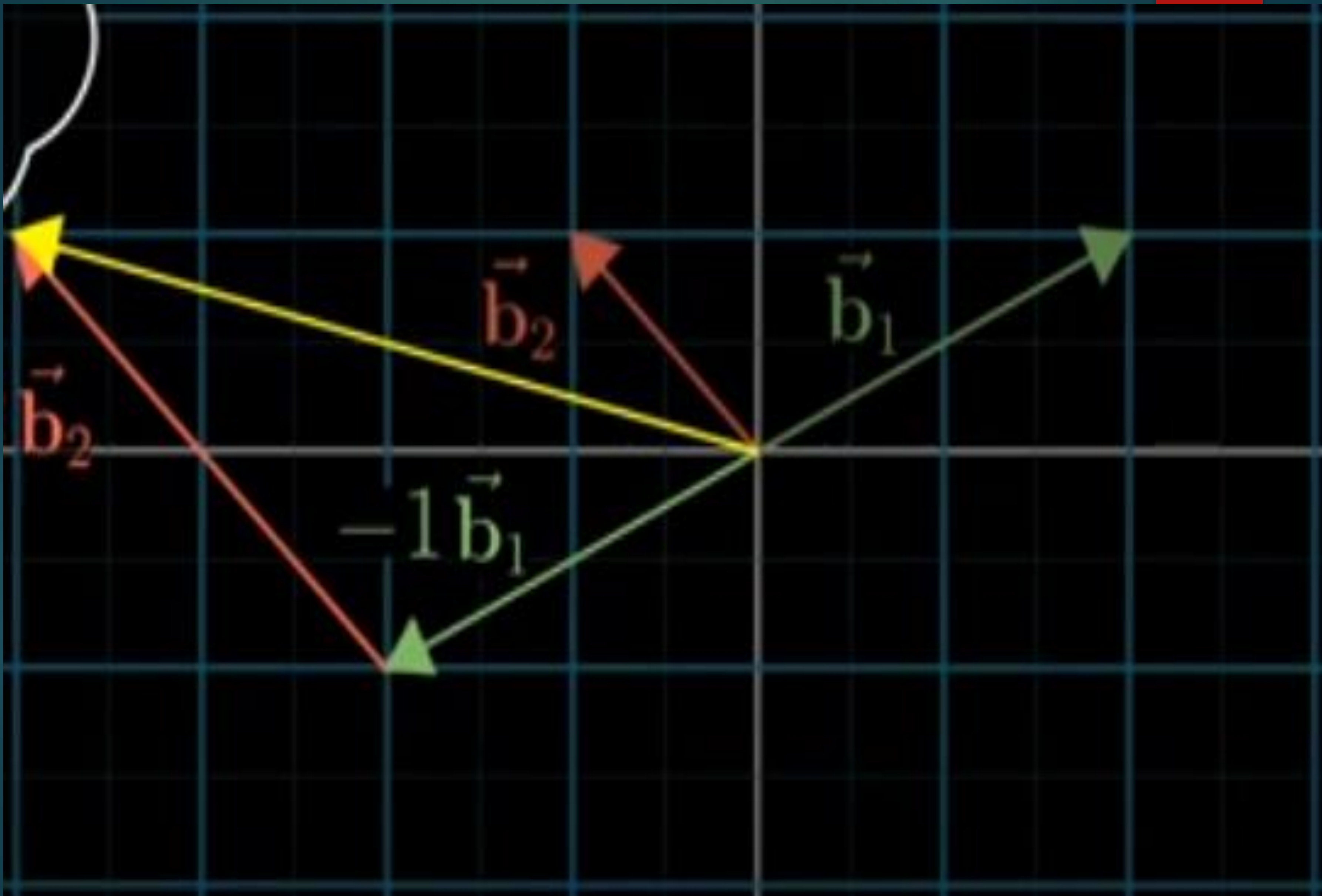


$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$2\hat{\jmath}$
$3\hat{\imath}$


$\vec{b}_2$
$\vec{b}_1$



$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\vec{\mathbf{b}}_2$
$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\vec{\mathbf{b}}_1$


$\vec{b}_2$
$\vec{b}_1$
$\vec{b}_2$
$-1\vec{b}_1$