MATRIZ ASOCIADA

Cuando se estudió transformaciones lineales, algunas de estas funciones se expresaron en la forma:

$$T: IR^n \to IR^m \; / \; T(X) = A\,X \qquad \text{donde A es una matriz.}$$

Pero …. ¿Qué orden deberá tener la matriz A?

Si se tiene en cuenta que $X \in IR^n$ y que $T(X) \in IR^m$, se puede expresar a X como una matriz de orden nx1 y a $T(X)$ como una matriz de orden mx1. Recordando la condición para que el producto de matrices sea posible:

$$\underset{m\,x\,n}{A} \quad . \quad \underset{n\,x\,1}{X} \quad = \quad \underset{m\,x\,1}{T(X)}$$

Se concluye que la matriz A deberá tener orden m x n. Esta matriz, recibe el nombre de matriz asociada a dicha transformación lineal.

NOTA: *Observe que* $T: IR^n \to IR^m$ *y* $A_{m\,x\,n}$. *Es decir la dimensión del espacio dominio y codominio de la TL, determinan respectivamente, la cantidad de columnas y la cantidad de filas de la matriz A.*

Al estudiar matriz asociada, surgen otros interrogantes como por ejemplo:

- ¿A toda transformación lineal se le puede asociar una matriz?
- ¿Cuántas matrices se pueden asociar a una misma transformación lineal?
- ¿Cómo se puede encontrar la matriz asociada a una TL?
- ¿Qué utilidad tiene la matriz asociada a una TL?

Antes de definir matriz asociada y poder dar respuesta a estos interrogantes necesitamos definir algunos conceptos previos.

CONCEPTOS PREVIOS

COORDENADAS DE UN VECTOR

Sea X un vector de IR^n y sea B = { e_1; e_2; e_3; … ; e_n } una base de IR^n.

Por ser B un conjunto generador, sabemos que todo vector de IR^n, puede expresarse como combinación lineal de los vectores de B, además por ser B un conjunto linealmente independiente ésta combinación lineal es única. Es decir, existen n escalares reales c_i tales que:

$$X = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3 + \dots + c_n\, e_n$$

a dichos escalares c_1 ; c_2 ; …. ; c_n se los denomina coordenadas del vector X en la base B.

La matriz de coordenadas o vector de coordenadas de X en la base B es la matriz columna de orden nx1, cuyas componentes son las coordenadas de X. Se anota $[X]_B$ y es:

$$[X]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

NOTA: - Cuando hablamos de coordenadas, el ORDEN de los vectores de la base es importante, por lo que en este estudio, trabajaremos con bases ORDENADAS.

- Cada vez que no se especifique la base en la que está expresado un vector, se entenderá que dicha base es la canónica.

Ejemplo 1: Halle las coordenadas de $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

SOLUCIÓN

En el enunciado del ejercicio no se indica en que base se encuentra expresado el vector u, como ya se indicó anteriormente, se considerará por defecto, que u está expresado en la base canónica.

Para buscar las coordenadas de u en la base B. Se debe encontrar los escalares c_1; c_2; c_3 que verifiquen la siguiente igualdad.

$$u = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3 \qquad (1)$$ reemplazando los vectores u, e_1, e_2 y e_3

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ resolviendo el 2° miembro de la igualdad

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_2 + c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$ igualando componente a componente

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -2 \\ c_2 + c_3 = 3 \\ c_3 = 1 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{matrix} c_1 = -5 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 1 \end{matrix}$$

Estas son las coordenadas de u en la base B. Se escribe: $[u]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

A modo de comprobación, se verá el camino inverso, es decir, conocidas las coordenadas del vector u en la base B: $[u]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, se buscarán las coordenadas de u en la base canónica. Para ello se debe plantear la misma igualdad (1):

$u = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3$ (1) reemplazando en ella los datos

$$[u]_C = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y resolviendo encontramos las coordenadas de u en la base canónica.

$$[u]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Veamos ahora un ejemplo sencillo en el que buscamos la matriz asociada a una TL:

Ejemplo 2: Dada la transformación lineal $T: IR^2 \to IR^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$, halle la matriz A, que permite expresar a T como $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^3$

SOLUCIÓN

Por lo dicho anteriormente, sabemos que A debe tener orden 3x2.

De esta manera: $A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ será $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a\,x+b\,y \\ c\,x+d\,y \\ e\,x+f\,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$$

para que la igualdad se cumpla: a = 1, b = 2, c = 1, d = -1, e = 0 y f = 1

Por lo tanto, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal T.

De esta manera, la transformación lineal puede expresarse como:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$$

NOTA: Observemos las siguientes representaciones de la misma transformación lineal T:

$T: IR^2 \to IR^3$ tal que y $T: IR^2 \to IR^3$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Si bien las dos representaciones corresponden a una misma transformación lineal, el uso de la segunda resulta de mayor conveniencia sobre todo porque emplea parte del lenguaje matricial que usan los programas en una computadora y además simplifica el estudio de este tipo de funciones.

DEFINICIÓN:

Sea la función T definida del espacio vectorial V en W una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sean $B = \{v_1, v_2, v_3 ..., v_n\}$ una base ordenada de V y $B' = \{w_1, w_2, w_3 ..., w_m\}$ una base ordenada de W. Entonces se define la **MATRIZ ASOCIADA** a la transformación lineal T como la matriz A_{mxn}, tal que:

$$A_T = \left[[T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad ... \quad [T(v_n)]_{B'} \right]$$

Observe que:

- la matriz A_T asociada a la TL T, es aquella que tiene por columnas, los transformados de los vectores de la base B del dominio expresados en la base $B\,'$ del codominio.

- esta matriz A_T depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T, como todo espacio vectorial tiene más de una base, podemos asociar a una misma TL más de una matriz.

- el hecho de que todo espacio vectorial admite infinitas bases, nos permite afirmar que a una misma TL, podemos asociarle infinitas matrices.

NOTA: - Muchas veces en los textos se habla de la matriz asociada a una TL y no se especifican las bases consideradas en el dominio y en el codominio, en dichos casos se entiende, por defecto, que las bases consideradas son las canónicas.

- A la matriz asociada a una transformación lineal respecto de las bases canónicas del dominio y del codominio se la llama "matriz canónica" o también "matriz estándar".

REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA TL

TEOREMA:

Sea T una transformación lineal definida del espacio V en el espacio W y sea A la matriz asociada a T respecto de las bases B y B´ del dominio y codominio respectivamente, entonces:

$$(\forall X \in V): A\cdot[X]_B = [T(X)]_{B'}$$

Esta última expresión, también puede escribirse:

T: V $\rightarrow$ W tal que $[T(X)]_{B'} = A\cdot[X]_B$

NOTA:

- Según esta representación $[T(X)]_{B'} = A\cdot[X]_B$, para hallar la imagen de un vector X del dominio de T, debemos conocer primero las coordenadas de dicho vector en la base B, $[X]_B$ para luego, obtener las coordenadas de la imagen de dicho vector en la base B', $[T(X)]_{B'}$, premultiplicando a $[X]_B$ por la matriz A. Esta matriz A hace posible el cálculo de las imágenes de vectores usando multiplicación matricial, cálculos que pueden efectuarse rápidamente en computadora.

Procedimiento para la obtención de una matriz de una transformación lineal.

Si bien en el ejemplo 2 de la página 4 de este apunte, se buscó la matriz asociada a una TL, el método de búsqueda empleado en ese ejemplo se torna más complejo a medida que aumentan las dimensiones de los espacios dominio y codominio de la TL o que cambien las bases consideradas en dichos espacios. Trataremos ahora de brindar un procedimiento diferente, mediante el cual se pueda hallar cualquiera de las matrices asociadas a una trasformación lineal. Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

1°) Buscar las imágenes que la TL le asigna a cada uno de los vectores de la base del dominio. A estos vectores imágenes, se los suele llamar transformados.

2°) Buscar las coordenadas de los vectores transformados en la base del codominio.

3°) Construir la matriz asociada colocando como columnas las coordenadas encontradas en el paso 2. Recordemos que al construir la matriz debemos respetar el orden de los vectores básicos.

4°) Escribir la representación matricial.

Ejemplo 3 - Dada la transformación lineal $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Halle la matriz asociada a T, respecto de las bases indicadas y escriba su representación matricial:

a) Canónicas en el dominio y codominio

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y la canónica en el codominio

c) Canónica en el dominio y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el codominio.

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el codominio.

SOLUCIÓN

a) Por tratarse de un operador lineal, es decir, de una TL en la cual el espacio dominio y codominio coinciden, trabajaremos con la base canónica de IR^2, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y en el codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2°) Determinamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = -1 \wedge c_2 = 0$, luego $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 0 \wedge c_2 = 1$, luego $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observe que las componentes de los vectores transformados coinciden con sus coordenadas en la base canónica, esto nos indica que dichos vectores ya estaban expresados en la base canónica, por lo que este paso podría haberse omitido.

3°) Escribimos la matriz asociada colocando como columnas de la misma, los vectores obtenidos en el segundo paso. Recordemos que como trabajamos con bases ordenadas, al construir la matriz A debemos respetar el orden de los vectores básicos, es decir, la primera columna estará formada por las coordenadas del transformado del primer vector de la base del dominio y la segunda columna por las coordenadas del transformado del segundo vector de la base del dominio.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matriz estándar asociada a T

4°) De esta manera podemos escribir la representación matricialmente de la TL.

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C\right)\right]_C = A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}_C$$

b) $B = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ del dominio y la canónica en el codominio

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 1 \wedge c_2 = 0$, luego $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 0 \wedge c_2 = 3$, luego $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3°) Escribimos la matriz asociada

matriz asociada a T respecto de la base B en el dominio y la canónica en el codominio

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4°) Escribimos la representación matricialmente de la TL.

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B\right)\right]_C = A'.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x \\ 3y \end{bmatrix}_C$$

c) Canónica en el dominio y $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ del codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = -1$, luego $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 1 \quad \wedge \quad c_2 = -1$, luego $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3°) Escribimos la matriz M .

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ matriz asociada a T respecto de la base canónica en el dominio y la base B' en el codominio.

4°) De esta manera podemos escribir la representación matricialmente de la TL.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C\right)_{B'} = M.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} y \\ -x-y \end{bmatrix}_{B'}$$

d) $B = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ del dominio y $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ del codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{ de donde } c_1=0 \quad\wedge\quad c_2=1,\text{, luego } \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{ de donde } c_1=3 \quad\wedge\quad c_2=-3,\quad\text{ luego } \left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$$

3°) Escribimos la matriz N .

$$N=\begin{bmatrix}0&3\\1&-3\end{bmatrix}$$

matriz asociada a T respecto de la base B en el dominio y la base B’ en el codominio

4°) De esta manera podemos escribir la representación matricialmente de la TL.

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B\right)_{B'}=N.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}0&3\\1&-3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}3y\\x-3y\end{bmatrix}_{B'}$$

OBSERVACIÓN:

- Si la base del espacio codominio es la canónica, entonces el 2° paso es innecesario, es decir, para hallar la matriz asociada, sólo debemos buscar los transformados de los vectores de la base del dominio (paso 1°) y luego armar la matriz asociada colocando dichos vectores transformados como columnas (paso 3°).

- Cuando se pide buscar la matriz asociada a una TL respecto de la base B, se entiende que la base a considerar en el dominio y codominio es la misma base B.

MATRICES ASOCIADAS ESTÁNDARES ESPECIALES EN IR²

En cada una de las transformaciones que aparecen a continuación la matriz estándar asociada se buscó las imágenes de los vectores de la base canónica de IR^2 , $C=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ y con dichas imágenes como columnas se formó la matriz asociada.

a) ***Reflexión o simetría respecto del eje de abscisas***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

b) ***Reflexión o simetría respecto del eje de ordenadas***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

c) ***Reflexión o simetría respecto del origen de coordenadas***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

d) ***Reflexión o simetría respecto de la recta identidad***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e) ***Proyección sobre el eje x***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

f) ***Proyección sobre el eje y***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

g) ***Dilatación o contracción en la dirección del eje x***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$, $k \in IR^+$ y $k \neq 1$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contracción horizontal ($0<k<1$) y dilatación horizontal ($k>1$)

La representación matricial de T es: $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

h) ***Dilatación o contracción en la dirección del eje y***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$, k $\in$IR$^+$ y k ≠ 1

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Contracción vertical ($0<k<1$) y dilatación vertical ($k>1$)

La representación matricial de T es: $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) ***Corte o cizalladura horizontal***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}$, k $\in$IR y k ≠ 0

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

j) ***Corte o cizalladura vertical***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ y+kx \end{pmatrix}$, k $\in$IR y k ≠ 0

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

k) ***Rotación de ángulo α en sentido positivo.***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\theta - y\ sen\,\theta \\ x\ sen\,\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sen\,\theta \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -sen\,\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Nota: las rotaciones en IR^2, preservan la longitud de cada vector y el ángulo que forma cualquier par de vectores.

<u>Ejemplo 4</u>: (ejercicio pág. 486-487, Grossman, 6º edición)

Dada $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12x + 10y \\ -15x - 13y \end{pmatrix}$, halle:

a) la <u>matriz A</u> asociada a la transformación dada, respecto de las bases canónicas en el dominio y en el codominio.

b) la <u>matriz M</u> asociada a la misma transformación, en este caso, respecto de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y en el codominio.

SOLUCIÓN

a) Buscamos la matriz estándar A asociada a T:

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 \\ -13 \end{bmatrix}$. Luego, $A = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix}$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C \right) \right]_C = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C$$

b) Buscamos la matriz M asociada a la misma transformación, respecto de la base $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y en el codominio.

1º. Determinar los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}; \qquad T\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}$$

2º. Determinar las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

Los vectores $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}$ están dados en la base canónica del codominio, por lo que resulta necesario expresarlos en la base *B* dada en el codominio. Se efectúa entonces, el cambio de base:

$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ de donde $c_1=2 \ \wedge \ c_2=0$, luego: $\left(\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ de donde $c_1=0 \ \wedge \ c_2=-3$, luego: $\left(\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$

3º. Luego, la matriz *M* es: $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$

4°. La representación matricial de T será:

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B\right)\right]_B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B$$

¿Existirá alguna relación entre las matrices *A* y *M* encontradas?. Para poder responder esta pregunta debemos ver antes otros conceptos. Veremos ahora la definición de matriz de cambio de base.

MATRICES DE CAMBIO DE BASE O MATRIZ DE TRANSICIÓN

Queremos encontrar una matriz que nos permita cambiar las coordenadas de un vector en una base por las coordenadas del mismo vector en otra base.

DEFINICIÓN: Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita y sea Id la transformación identidad definida de V en V. Llamaremos matriz de cambio de base de la base B a la base B' a la matriz asociada a la transformación identidad respecto de la base B en el dominio y respecto de la base B' en el codominio.

Sea $Id : V \to V$ tal que $Id(X) = X$ la transformación identidad.

Sea P la matriz asociada a dicha TL, entonces, la representación matricial queda:

$$\left[Id\left(\left[X\right]_B\right)\right]_{B'} = P.\left[X\right]_B \qquad \text{teniendo en cuenta que } Id(X) = X$$

$$\left[X\right]_{B'} = P.\left[X\right]_B$$

De esta manera conocidas las coordenadas de un vector en base B, $\left[X\right]_B$, al premultiplicarla por la matriz P, se obtienen las coordenadas del mismo vector en la base B', $\left[X\right]_{B'}$. La matriz P se llama matriz de cambio de base de la base B a la base B'.

RELACIÓN ENTRE MATRICES DE CAMBIO DE BASE

Sea $Id : V \to V$ la transformación identidad, tal que $Id\ (X) = X$.

Sean P: la matriz de cambio de la base B a la base B' y

Q: la matriz de cambio de la base B' a la base B.

Por lo tanto, es posible escribir las siguientes representaciones de Id:

$Id : V \to V$ tal que $\left[Id(X)\right]_{B'} = P \cdot \left[X\right]_B$, o lo que es lo mismo

$$\left[X\right]_{B'} = P \cdot \left[X\right]_B \qquad [1]$$

$Id : V \to V$ tal que $\left[Id(X)\right]_B = Q \cdot \left[X\right]_{B'}$, o lo que es lo mismo

$$\left[X\right]_B = Q \cdot \left[X\right]_{B'} \qquad [2]$$

Reemplazando $[2]$ en $[1]$, nos queda: $\left[X\right]_{B'} = P \cdot (Q \cdot \left[X\right]_{B'})$

por propiedad asociativa del producto de matrices:

$$[X]_{B'} = \underbrace{(P \cdot Q)}_{I} \cdot [X]_{B'}$$

Para que esta igualdad se cumpla, la matriz P . Q debe coincidir con la matriz identidad.

Puesto que: $P \cdot Q = I$, se concluye que $Q = P^{-1}$

NOTA: Esto nos indica que la matriz P de pasaje o de transición de la base B a B' y la matriz Q de transición de la base B' a B, son matrices inversas entre sí.

TEOREMA

Si P de orden n, la matriz de transición de la base B a la base B´, entonces:

a) P es inversible

b) P^{-1} es la matriz de transición de B' a la base B

<u>Ejemplo 5</u>. Halle la matriz de cambio de base:

a) de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) de la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

c) muestre que las matrices obtenidas en los ítems a) y b) son inversas entre sí.

SOLUCIÓN

Sea $Id : IR^2 \to IR^2$ tal que $Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

a) de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

1°) $Id\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\quad Id\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$ matriz de cambio de base de la base B a la base canónica

$$\left[Id\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_B\right)\right]_C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_B$$ teniendo en cuenta que $Id\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_B$$

b) de la base $C=\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ a la base $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}\right\}$

1°) $Id\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$; $Id\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

2°) $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$ de donde $c_1=3 \wedge c_2=-1$, luego: $\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)_B=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$ de donde $c_1=2 \wedge c_2=-1$, luego: $\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)_B=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$

3°)

$$Q=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$ matriz de cambio de base de la base canónica a la base B

$$\left[Id\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_C\right)\right]_B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_C$$ teniendo en cuenta que $Id\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_C$$

NOTA: *Del punto a) de este ejercicio (ejemplo5, pág. 17), podemos observar que la matriz de cambio de base de una base cualquiera B a la base canónica tiene por columnas los vectores de la base B.*

c) $P.Q=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ = I , las matrices P y Q son inversas entre sí.

Es decir Q = P^{-1}

MATRICES SEMEJANTES

Consideremos ahora las matrices asociadas a un operador lineal T definido en el espacio vectorial V de dimensión finita, respecto de una misma base en el dominio y codominio. Como ya dijimos anteriormente, las matrices asociadas a una transformación lineal, dependen de la base elegida en V.

Sea T : V $\rightarrow$ V un operador lineal y sean: A y M dos matrices asociadas a dicho operador.

A: matriz asociada a T respecto de la base *B* y

M: matriz asociada a T respecto de la base B'.

Si además indicamos con P a la matriz de transición de la base B' a la base B. Por lo visto anteriormente, P^{-1} será la matriz de transición de la base B a la base B'.

De esta manera:

La siguiente figura describe gráficamente cómo están relacionadas las matrices *A* y *M* asociadas a un mismo operador lineal T.

$$\begin{tikzcd} \text{En V:} & {[X]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(X)]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \text{En V:} & {[X]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "M"] & {[T(X)]_{B'}} \end{tikzcd}$$

Figura 1

Dado que *A* es la matriz asociada a T respecto de la base *B* y *M* la matriz asociada a T respecto a *B'*, las siguientes relaciones son válidas para todo X en V.

La ecuación $A \cdot [X]_B = [T(X)]_B$, que en el gráfico está representado por: $[X]_B \xrightarrow{A} [T(X)]_B$

Y la ecuación $M \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'}$, que en el gráfico está representado por: $[X]_{B'} \xrightarrow{M} [T(X)]_{B'}$

Volviendo a la figura 1, podemos ver que hay dos caminos para ir de la matriz de coordenadas X a la matriz de coordenadas $T(X)$. Un *camino directo* es el que estaría representado en la parte inferior de la figura y que nos permite llegar a $[T(X)]_{B'}$ partiendo de las coordenadas $[x]_{B'}$, mediante la premultiplicación de dichas coordenadas por la matriz M*,* es decir:

$$M \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'} \qquad [1]$$

El otro camino llamado, *camino indirecto***,** consiste en tres pasos:

1°) partir de las coordenadas de X en la base B', $[x]_{B'}$ y aplicarle la transformación identidad que tiene como matriz asociada la matriz P para encontrar así las coordenadas de X en la base B, $[x]_B$.

$$P \cdot [X]_{B'} = [X]_B \qquad [2]$$

2°) conocidas las coordenadas de X en la base B, $[X]_B$, aplicarle a estas coordenadas la transfomación T que tiene como matriz asociada a A.

$$A \cdot [X]_B = [T(X)]_B \qquad [3]$$

reemplazando [2] en [3], tenemos:

$$A.(P \cdot [X]_{B'}) = [T(X)]_B \quad \text{por prop. asociativa de la multip. de matrices}$$

$$(A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_B \qquad [4]$$

3°) conocidas las coordenadas $[T(X)]_B$ aplicarle a estas coordenadas la transformación identidad que tiene como matriz asociada P^{-1} para encontrar las coordenadas de $T(X)$ en la base B', $[T(X)]_{B'}$.

$$P^{-1} \cdot [T(X)]_B = [T(X)]_{B'} \qquad [5]$$

reemplazando [4] en [5], tenemos:

$$P^{-1} \cdot (A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'} \quad \text{por prop. asociativa de la multip. de matrices}$$

$$(P^{-1} \cdot A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'} \qquad [6]$$

Comparando las expresiones [1] y [6], podemos concluir que:

$$M = P^{-1} . A . P$$

TEOREMA

Sea T: V $\rightarrow$ V un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita. Si A es la matriz asociada a T respecto de la base B en el dominio y codominio y M es la matriz asociada a T respecto de la base B' respecto del dominio y codominio, entonces

$$M = P^{-1}. A. P$$

donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

Definición: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, se dice que B es semejante a A, si existe una matriz inversible P de orden n, tal que B = P^{-1} .A.P

<u>Ejemplo 6</u>. Determine si las matrices A y M obtenidas en el ejemplo 4 de la página 14 de este apunte, son matrices semejantes.

SOLUCIÓN

Siendo $A=\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix}$ y $M=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ las dos matrices asociadas a la transformación lineal T, obtenidas en el ejemplo 4 (pág. 14 de ese apunte), la primera de ellas A, referida a la base canónica en dominio y codominio y la segunda M, referida a la base B en dominio y codominio.

Considerando como matriz $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, obtenidas en el ejemplo 5 de la página 17 de este apunte, donde la matriz P es la matriz de transición de la base B a la canónica y la matriz P^{-1} es la matriz de transición de la base canónica a la base B, tenemos:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}=M$$

Esto nos permite confirmar que las matrices A y M son matrices semejantes.

IMPORTANTE:

1. La ecuación B= P^{-1} A P, puede escribirse también como A= $(P^{-1})^{-1}$ B P^{-1}. Por lo tanto, escribiendo P^{-1} = Q, resulta: A= Q^{-1} B Q, lo cual indica que A es semejante a B. En conclusión, se dice que *A y B son semejantes* entre sí.

2. Todas las matrices asociadas a un mismo operador lineal respecto de la misma base en el dominio y codominio son MATRICES SEMEJANTES entre sí.

3. Si T es una función de M_{nxn} en M_{nxn} tal que $T(A) = P^{-1}\ A\ P$, siendo P una matriz fija, entonces T recibe el nombre de *transformación lineal de semejanza.*

PROPIEDADES DE LAS MATRICES SEMEJANTES

a) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces det(A) = det(B).

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) det(A) = det(B)

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ calculando el determinante de A

$\det(A) = \det(P^{-1} . B . P)$ por prop. $\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$

$\det(A) = \det(P^{-1}).\det B . \det P$ por prop. $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

$\det(A) = \dfrac{1}{\det(P)} . \det(B) . \det(P)$ simplificando det(P)

$\det(A) = \det(B)$ con lo cual la propiedad queda demostrada.

b) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces tr(A) = tr(B).

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) tr(A) = tr(B)

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ calculando la traza de A

$tr(A) = tr(P^{-1} . B . P)$ por prop asociativa del producto de matrices

$tr(A) = tr(P^{-1} . (B . P))$ por $tr(A.B) = tr(B.A)$, A y B cuadradas de igual orden

$tr(A) = tr((B \,.\, P).\, P^{-1})$ por prop asociativa del producto de matrices

$tr(A) = tr(B \,.\, (P.\, P^{-1}))$ por def de matriz inversa $P.\, P^{-1} = I$, I_{nxn} matriz identidad

$tr(A) = tr(B \,.\, I)$ por $B \,.\, I = I$ por ser I elemento neutro

$tr(A) = tr(B)$ con lo cual la propiedad queda demostrada.

c) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A^2 es semejante a B^2.

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) A^2 es semejante a B^2

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} \,.\, B \,.\, P$ elevando al cuadrado

$A^2 = (P^{-1} \,.\, B \,.\, P)^2$

$A^2 = (P^{-1} \,.\, B \,.\, P).\, (P^{-1} \,.\, B \,.\, P)$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} \,.\, B \,.(P \,.P^{-1}).\, B \,.\, P$ por def. de matriz inversa $P.P^{-1} = I$

$A^2 = P^{-1} \,.\, B \,.\, I \,.\, B \,.\, P$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} \,.\, B \,.\, (I \,.\, B) \,.\, P$ por prop. elem. neutro de la mult. $I \,.\, B = B$

$A^2 = P^{-1} \,.\, B \,.\, B \,.\, P$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} \,.\, (B \,.\, B) \,.\, P$

$A^2 = P^{-1} \,.\, B^2 \,.\, P$ por def. de matrices semejantes

A^2 es semejante a B^2

d) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A^T es semejante a B^T.

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) A^T es semejante a B^T

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ trasponiendo ambos miembros

$A^T = (P^{-1} . B . P)^T$ por prop. de la trasposición $(A.B.C)^T = C^T.B^T.A^T$

$A^T = P^T . B^T . (P^{-1})^T$ por prop. de la trasposición $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$

$A^T = P^T . B^T . (P^T)^{-1}$ considerando $(P^T)^{-1} = Q$ es decir $P^T = Q^{-1}$

$A^T = Q^{-1} . B^T . Q$ por definición de matrices semejantes

A^T es semejante a B^T

e) Si A y B son matrices inversibles de orden n y semejantes, entonces A^{-1} es semejante a B^{-1}.

H) A y B de orden n, son matrices inversibles y semejantes

T) A^{-1} es semejante a B^{-1}

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1}. B . P$ calculamos la inversa de A

$A^{-1} = (P^{-1}. B . P)^{-1}$ por propiedad $(A.B.C)^{-1}= C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

$A^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.(P^{-1})^{-1}$ por prop. de las matrices inversas $(A^{-1})^{-1}= A$

$A^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.P$ por definición de matrices semejantes

A^{-1} es semejante a B^{-1}

¿Qué ventajas tiene el conocer la matriz asociada a una TL?

Sabemos que a una TL, podemos asociarle infinitas matrices, las cuales dependen de la base elegida en el espacio dominio y codominio de la TL. Pero si la matriz asociada a una TL, es una matriz diagonal. Las matrices diagonales tienen ciertas ventajas: su determinante puede calcularse simplemente multiplicando los elementos de su diagonal principal; su matriz inversa, si es que existe, se puede obtener reemplazando los elementos de la diagonal principal por sus recíprocos; la potencia enésima de una matriz diagonal se puede obtener elevando a la enésima potencia los elementos de la diagonal principal, etc. Es decir, de todas las matrices asociadas a una misma TL, tiene particular importancia poder encontrar una matriz asociada a dicha TL que sea diagonal, la cual nos permite simplificar ciertos cálculos como se indicó anteriormente.

Surgen ahora otros interrogantes: ¿todos los operadores lineales admiten una matriz asociada que tenga forma diagonal?. Si tenemos en cuenta que las matrices asociadas a un operador lineal, dependen de la base con la que se trabaje. ¿Cómo determinar la base con la que se debe trabajar para que la matriz asociada tenga forma diagonal? Veremos ahora un procedimiento que nos permita encontrar, si es que existe, una matriz diagonal asociada a un operador lineal a este procedimiento lo llamamos diagonalización.

BIBLIOGRAFÍA

- Larson, R.; Edwards, B.; Falvo, . (2004). **Álgebra Lineal** (5ta ed.).Ed. Pirámide. Madrid.
- Howard, A. (2004). Introducción al Álgebra Lineal (3ra ed). Ed. Limusa Wiley. México.
- Grossman, S. (1999). Álgebra Lineal. (5° ed). Ed. Mc Graw Hill. México.