# *UNIDAD 7: Números Complejos*

---

## Necesidad de números no reales

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales pues, cualquiera que sea $x \varepsilon$ IR, se verifica que $x^2 \geq 0$, y en consecuencia $x^2 + 1 > 0$.

La extensión del campo de los números reales al campo de los complejos se realiza con la pretensión de que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tenga solución.

En el siglo XVI, se introdujo el símbolo $\sqrt{-1}$ para procurarse las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Este símbolo, más tarde representado con la letra $i$, se consideró como un número ficticio o imaginario que debía tratarse algebraicamente como cualquier número real, salvo que su cuadrado era $-1$.

Expresiones tales como $3 + 4i$ se llamaron números complejos, y se utilizaron de modo exclusivamente formal casi 300 años antes de que fueran descritos de una manera que puede ser considerada como satisfactoria en la actualidad.

A principios del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y William Rowan Hamilton (1805-1865) independientemente y casi al mismo tiempo propusieron la idea de definir los números complejos como pares ordenados (a, b) de números reales (Apóstol, 1976).

Vamos entonces a construir un sistema de números complejos, en el que todo número negativo tenga raíces pares. Dicho sistema se llamará el *sistema de los números complejos* y tendrá propiedades muy parecidas a las de los números reales para las operaciones de adición y multiplicación, pero en este sistema se podrá extraer raíz *n*-ésima de cualquier número del sistema. Se desea también que este sistema pueda considerarse una extensión de los números reales, de manera que, por ejemplo, se pueda seguir contando con las raíces pares de números positivos.

El precio de obtener raíces pares de números negativos es el de no poder seguir trabajando en IC (conjunto de números complejos) con desigualdades como en IR (Mena, 2000).

***Definición*:** Llamamos números complejos a los vectores del plano cartesiano $IR^2$ = IC, y sobre este conjunto se definen dos operaciones binarias, llamadas suma y producto:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \mathbf{(1)}$$

y

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \mathbf{(2)}$$

**NOTAS**

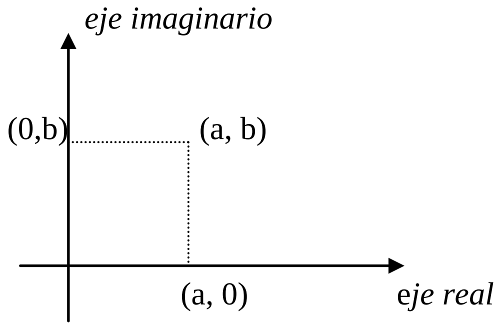
- Algunos autores expresan que *un número complejo es un par ordenado de números reales.*
- El conjunto de los números complejos se designa por IC y como IC = $IR^2$, se tiene

$$IC = \{ (a, b) / a \in IR \ \wedge \ b \in IR \}$$

- Los signos "+" y "·" que aparecen en el primer miembro de (1) y (2) son símbolos nuevos que se están definiendo, mientras que el + y el · que aparecen en la derecha representan la suma y la multiplicación conocidas de los números reales.
- La notación usual para simbolizar los números complejos es z = (a, b), llamada *expresión cartesiana* o *vectorial* de un número complejo. También se utilizan $z_1$, $z_2$, $z_3$, ...,$w_1$, $w_2$, $w_3$, ..., etc.

**Representación geométrica de los números complejos**

El número complejo z = (a, b) puede representarse, con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano, por el punto de coordenadas (a, b) denominado afijo del número complejo. El eje de abscisas (eje x) recibe el nombre de *eje real*, y el eje de ordenadas (eje y) recibe el nombre de *eje* *imaginario*. El plano se denomina *plano complejo.* Se utiliza frecuentemente esta representación, y a menudo se habla del *punto z* como sinónimo del *número z.*




Se acostumbra escribir "(a, 0)" o "a" indistintamente. También se acostumbra representar el par (0, 1) ε IC por $i$ (**unidad imaginaria**).

**Actividad**: Representar los números complejos $z_1 = (0{,}5; -1)$, $z_2 = (2, \sqrt{2})$, $z_3 = (-2/3, 3)$, $z_4 = (-1, -2)$, $z_5 = (0, 3)$ y $z_6 = (-2, 0)$.

Se observa que los complejos de parte imaginaria nula, es decir, los pares ordenados del tipo (a, 0) son puntos del eje de abscisas. Los complejos de parte real nula caracterizan el eje de ordenadas.

***Definiciones***

i) La primera componente "a" del par ordenado (a, b) recibe el nombre de **parte real** del número complejo z y se simboliza Re (z) = a.

ii) La segunda componente "b" del par ordenado (a, b) recibe el nombre de **parte imaginaria** del número complejo z y se simboliza Im (z) = b.

Conviene advertir que las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales.

***Definiciones***

i) Un complejo es real si, y sólo si su parte imaginaria es cero.

ii) Un complejo es imaginario puro si, y sólo si su parte real es cero.

(El cero es el único número que es a la vez real e imaginario.)

**Actividad:** Determinar analítica y gráficamente todos los complejos z = (x, y) que verifican:

a) Re (z) = -1; b) Im (z) $\geq$ 2; c) Re (z) – Im (z) < 1

**Igualdad de números complejos**

Dos números complejos (a, b) y (c, d) son iguales si, y sólo si

a = c y b = d.

**Propiedades de la adición**

Cualesquiera sean z = (a, b), w = (c, d) y v = (e, f) números complejos, se cumple:

Propiedad conmutativa:

z + w = (a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) = w + z

Propiedad asociativa:

(z + w) + v = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = z + (v + w)

Elemento neutro: Existe (0, 0) tal que para todo (a, b) se verifica que

(a, b) + (0, 0) = (a, b)

El elemento neutro es (0, 0).

Elementos opuestos o inversos aditivos: Para todo complejo z = (a, b) existe - z = (- a, - b) tal que

(a, b) + (- a, - b) = (0, 0)

El número - z = (- a, - b) se llama opuesto o inverso aditivo de z = (a, b).

**Propiedades de la multiplicación**

Cualesquiera sean z = (a, b), w = (c, d) y v = (e, f) números complejos, se cumple:

Propiedad conmutativa: z · w = (a, b) · (c, d) = (c, d) · (a, b) = w · z

Propiedad asociativa:

(z · w) · v = [(a, b) · (c, d)] · (e, f) = (a, b) · [(c, d) · (e, f)] = z · (w· v)

Elemento neutro: Existe (1, 0) tal que para todo $(a, b)$ se verifica que

$$(a, b) \cdot (1,0) = (a, b)$$

En efecto, si w = (x, y) es neutro para la multiplicación, debe satisfacer

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$$

Por definición de multiplicación

$$(a x - b y,\ a y + b x) = (a, b)$$

Por igualdad de complejos

$$\begin{cases} a\mathrm{x} - b\mathrm{y} = a \\ a\mathrm{y} + b\mathrm{x} = b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de determinantes, se tiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si $(a, b) \neq (0,0)$ entonces

$$\mathrm{x} = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \qquad \mathrm{y} = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0$$

Resulta (x, y) = (1, 0) □

Elementos inversos o inversos multiplicativos: Para todo $(a, b) \neq (0, 0)$ existe

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \quad \text{tal que} \quad (a, b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

El inverso de z = $(a, b)$ no nulo es $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición:

z. (w + v) = (a, b) ·[(c, d) + (e, f)] = (a, b) · (c, d) + (a, b) · (e, f) = z · w + z · v

**Conclusión**: El sistema (IC, +, ·) es cuerpo. Esto quiere decir que en (IC, +, · ) se trabaja de la misma manera que en el sistema (IR, +, ·). Si bien las operaciones de suma y producto son más “complejas” se tienen las mismas propiedades.

A diferencia del cuerpo de los números reales, el cuerpo de los complejos es un cuerpo *no ordenado.* No se verifica en IC una relación de orden total que respete las operaciones de suma y producto. En efecto, si fuera ordenado (con la relación de orden $\leq$), como $i \neq 0$, caben dos posibilidades:

$$i > 0 \quad ó \quad i < 0$$

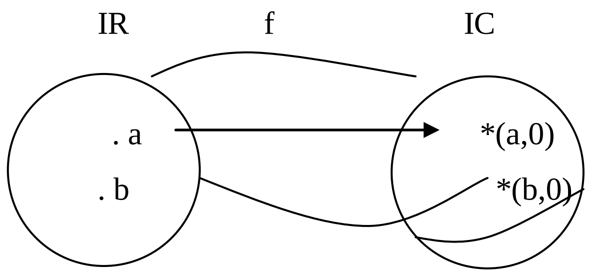
En el primer caso, como $i$ es positivo podemos multiplicar a ambos miembros de $i > 0$ por $i$ sin que cambie la desigualdad, es decir $i \cdot i > i \cdot 0$, $i^2 > 0$, es decir, $-1 > 0$, lo que es absurdo.

En el segundo caso es $i < 0$, y en consecuencia, $-i > 0$, entonces podemos multiplicar a ambos miembros de $i < 0$ por $(-i)$ sin que cambie la desigualdad, luego $i \cdot (-i) < 0 \cdot (-i)$, $-i^2 < 0$, es decir $1 < 0$, que también es absurdo.

Por lo tanto, no tiene sentido comparar dos números complejos en la forma habitual en que lo hacemos con los reales.

## Inmersión de IR en IC

Sea la función f: IR $\rightarrow$ IC, definida por f(a) = (a, 0) que asigna a cada número real un número complejo real.




La aplicación f es inyectiva y es un monomorfismo de IR en IC respecto de la adición y multiplicación, esto quiere decir que cualquiera sean los reales “a” y “b”, se cumple:

i) $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$ y

ii) $f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$

IC es una “ampliación” del cuerpo de los números reales: IR está copiado en él, incluyendo sus operaciones, es decir, una parte de IC y IR son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico (Mena, 2000).

## Forma binómica de un número complejo

Unidad imaginaria

El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y se denota por $i$ = (0,1).

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ que no tiene solución en IR puede resolverse con el uso de números complejos. En efecto

$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0)$, es decir $\boxed{i^2 = -1}$

La multiplicación de un complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes de aquel, es decir, lo transforma en un complejo imaginario puro. En efecto

$(b, 0) \cdot i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$

y por el monomorfismo de los reales en los complejos, se tiene

$$b i = (0, b) \qquad \textbf{(3)}$$

Geométricamente, hay una rotación de 90º en sentido positivo (antihorario).

**Forma binómica de los complejos**

Sea z = (a, b) un número complejo.

Por definición de suma

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Por **(3)**

$$z = (a, 0) + (b, 0). (0, 1)$$

Por el monomorfismo de los reales en los complejos y por ser $i$ = (0, 1), se tiene

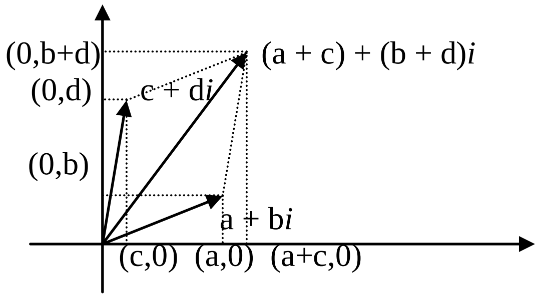
$\boxed{\mathbf{z = a + b}\, i}$ ***Forma binómica de un número complejo***

**Observación**: La ventaja de esta notación consiste en que es útil en el manejo algebraico de las fórmulas en las que interviene la adición y la multiplicación.

**Interpretación de la adición de complejos**

El punto (a, b) del plano cartesiano se llama, como se dijo anteriormente, afijo del número complejo a + b$i$. Los complejos cuyo afijo se encuentran sobre el eje imaginario se llaman **imaginarios puros.**

A continuación se representa la adición de los complejos a + b$i$ y c + d$i$.




Los afijos de los sumandos forman un paralelogramo con el origen y el afijo de la suma.

**Potencias de la unidad imaginaria**

Las potencias sucesivas de la unidad imaginaria son:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = 1$$

Análogamente

$$i^5 = i \qquad\qquad i^6 = -1$$

Si el exponente es de la forma 4k con k $\in$ **Z**, se tiene $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$.

En general, si el exponente de $i$ es m $\in$ IN, al efectuar la división por 4 se tiene m = 4 q + r, donde el resto satisface $0 \leq r < 4$. En consecuencia

$$i^m = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

y este cálculo se reduce a uno de los cuatro considerados en primer término.

**Actividad**: Calcular $i^{715}$

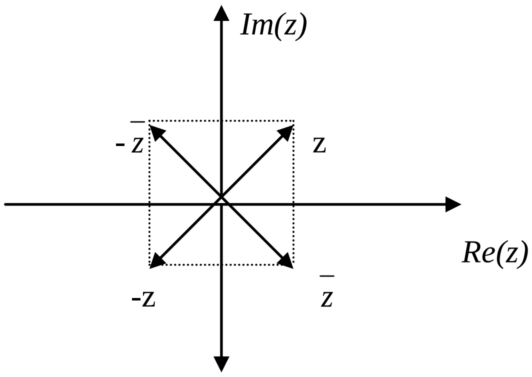
La siguiente proposición formaliza y resume conceptos dados anteriormente.

***Proposición:*** *(IC, +, ·) es un cuerpo en el que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución. Además la aplicación de IR en IC que asocia a cada número real x el complejo (x, 0) es un monomorfismo de cuerpos.*

## Conjugación en IC

***Definición***: Se llama número complejo conjugado de $z = a+bi$ y se anota $\bar{z}$ al número complejo $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$.

En el siguiente gráfico están representados $z$, - $z$, $\bar{z}$ y - $\bar{z}$




Los afijos de un complejo, de su conjugado y de sus respectivos opuestos forman siempre un rectángulo. (Observar la simetría entre $z$ y $\bar{z}$ respecto del eje real)

**Actividad**: Determinar x tal que 2z + $\bar{w}$ = $i$ – x, siendo z = 2 – 3$i$ y $w$ = -1 + 0,5$i$.

## Propiedades de la conjugación

Sean $z$ = a + b$i$ y w = c + d$i$, entonces:

1) $\overline{(\bar{z})} = z$

2) La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte real.

$$z + \bar{z} = 2\text{ a} = 2\text{ Re }(z) \qquad \text{o bien} \qquad \text{Re }(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

3) La diferencia de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte imaginaria multiplicada por la unidad imaginaria $i$.

$$z - \bar{z} = 2\text{ b}i = 2\text{ Im }(z) \cdot i \qquad \text{o bien} \qquad \text{Im }(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

4) El producto de dos complejos conjugados es un número real no negativo.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = (\text{Re }(z))^2 + (\text{Im }(z))^2$$

5) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados.

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

6) El conjugado del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los conjugados.

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \ , \ w \neq 0$$

***Observación:*** Un número es real si, y sólo si es igual a su conjugado.

**Operador lineal de conjugación**

Sea el espacio vectorial IC con la suma y la multiplicación por escalares reales. Entonces f: IC$\rightarrow$ IC / f($z$) = $\bar{z}$ es un operador lineal, pues:

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{kz} = k\bar{z}$, para todo $k$ real

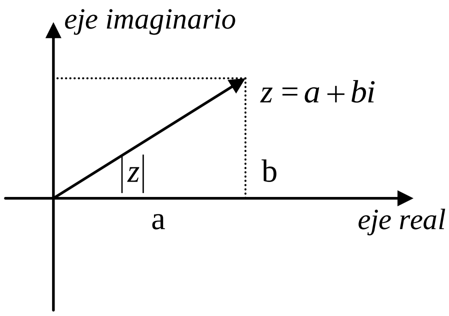
**Actividad**:

a) Demostrar los dos incisos anteriores.
b) Determinar el núcleo y la imagen del operador conjugación.

**Módulo de un número complejo**

***Definición:*** Se llama módulo del número complejo $z = a + bi$ y se anota $|z|$ al número real

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$




El módulo del número complejo $a + bi$ es la distancia entre el origen de coordenadas y el afijo del número, si se prefiere, la longitud o norma del vector $(a,b)$. Por ejemplo, si $z$ = - 3 + 4$i$, entonces $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

**Propiedades del módulo**

Cualquiera que sea $z \in$ IC, se cumple:

1) $0 \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

2) $|z| = 0$ si, y sólo si, $z = 0$

3) $|-z| = |z|$

4) $|\bar{z}| = |z|$

5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (real no negativo)

Además dados dos complejos $z_1$ y $z_2$ se cumplen las siguientes propiedades:

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular)

7) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

8) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$

9) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

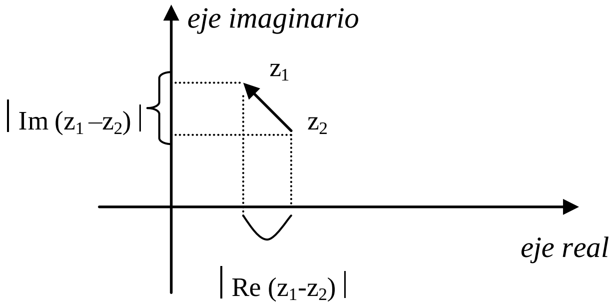
**Actividad:**

a) Demostrar que $\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$, siendo $z$ y $w$ dos números complejos, con $w \neq 0$.

b) Dividir $z = 2 + 3i$ por $w = 1 - i$

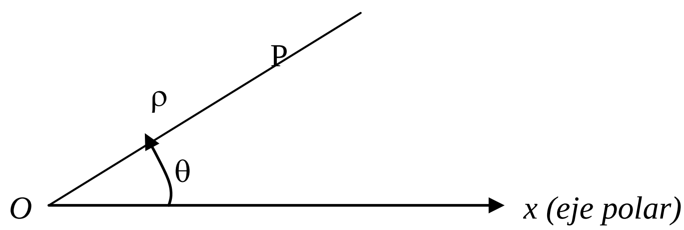
c) Determinar todos los complejos z que satisfacen $i \cdot z = 1 + i$

**NOTA**: El módulo que hemos definido en IC desempeña un papel semejante al del valor absoluto en los cuerpos ordenados, definiéndose la distancia entre (los afijos de) $z_1$ y $z_2$ como $|z_1 - z_2|$.




## Forma polar de un número complejo

Existe un sistema distinto del cartesiano para establecer coordenadas para cada punto del plano, denominado *sistema de coordenadas polares*. En este sistema se toma un punto *O* (llamado polo) y se considera un rayo *x* que nace de él horizontalmente y hacia la derecha de *O.* Entonces cada punto del plano está determinado por dos números: la distancia $\rho$ del punto *P* al origen *O* y el ángulo $\theta$ (en radianes) que forma *OP* con *x* o cualquiera de los congruentes a $\theta$, es decir los de la forma $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.




Si *O* es también el origen del sistema de coordenadas cartesianas, entonces, si $z = a + bi$, las coordenadas cartesianas de *P* son $a$ y $b$, de donde

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

Los números reales $\rho = |z|$ y $\theta$ se llaman *coordenadas polares* de $z$ .

Las fórmulas de <u>pasaje de las coordenadas polares a cartesianas</u> son:

$$a = \boldsymbol{\rho \cos \theta} \qquad \text{y} \qquad b = \boldsymbol{\rho \text{ sen } \theta}$$

Luego

$$z = a + bi = \rho \cos \theta + \rho\, i \text{ sen } \theta$$

Es decir

$\boxed{z = \rho (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)}$ ***Forma polar o trigonométrica de*** $z$

**Observaciones**

- $\rho$ y $\theta$ definen unívocamente a $z$ . Pero $z$ caracteriza unívocamente a $\rho$, y no a $\theta$.
- Se debe diferenciar **coordenadas** polares de un número complejo de la **forma** polar del mismo.

Formalmente se tiene la siguiente definición de argumento principal.

***Definición*:** argumento principal del número complejo $z = a + bi$ no nulo

es el número real $\theta$ que satisface

i) $a = |z| \cos \theta \;\wedge\; b = |z| \text{ sen } \theta$ y ii) $0 \leq \theta < 2\pi$

## NOTAS

- A cada número complejo $z$ corresponde un único par $(\rho, \theta)$, con $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ e inversamente.
- Dados dos complejos en forma trigonométrica

$$z = \rho (\cos \theta + i \text{ sen } \theta) \quad \text{y} \quad z' = \rho' (\cos \theta' + i \text{ sen } \theta')$$

decimos que son iguales si, y sólo si tienen el mismo módulo y sus argumentos son congruentes (módulo $2\pi$). En símbolos

$$z = z' \Leftrightarrow \rho = \rho' \wedge \theta' = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbf{Z}$$

**Actividad:** Expresar en forma trigonométrica $z = 1 + i$

## Operaciones en forma trigonométrica o polar

### Multiplicación

**Proposición:** El módulo del producto de dos números complejos en forma trigonométrica es el producto de sus módulos, y el argumento del producto es la suma de sus argumentos.

*Demostración:* Consideremos los números complejos

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$$

Entonces

$$z_1 . z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) (\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$$

$$= \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2) + (\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2) i ]$$

$$z_1 . z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)] \quad \square$$

### Cociente

**Proposición:** El módulo del cociente de un número complejo por otro no nulo es el cociente de sus módulos, y el argumento del cociente es la diferencia de sus argumentos.

*Demostración:* Consideremos los números complejos

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1), \; z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2) \quad \text{y} \quad z = \rho (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z \Rightarrow z_1 = z_2 z$$

$$\rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2) \rho (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

$$\rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) = \rho \rho_2 [\cos (\theta + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta + \theta_2)]$$

Por igualdad de complejos

$$\rho \rho_2 = \rho_1 \quad \wedge \quad \theta + \theta_2 = \theta_1 + 2k \pi, \; k \in \mathbf{Z}$$

Luego

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \wedge \quad \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad \text{si} \quad k = 0$$

Entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \ \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$ □

**Actividad:** Siendo $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ y $z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$, realizar en forma trigonométrica las siguientes operaciones $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_2}{z_1}$.

**Potenciación de exponente natural**

La potencia *n*-ésima de un complejo en forma trigonométrica tiene por módulo la potencia enésima de su módulo, y por argumento el producto de su argumento por *n*.

$$z = \rho(\cos\theta + i \ \text{sen}\,\theta) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \ \text{sen}\, n\theta)$$

***Observaciones***

- La expresión $\mathbf{z^n = \rho^n (\cos n\theta + i\,\text{sen}\, n\theta)}$ se llama fórmula de **De Moivre**. (En realidad esta formula la expresa Euler, De Moivre la escribe de otra forma pero se supone que la conocía desde antes).
- Algunos autores, entre ellos Ahlfors (1966), consideran que la fórmula de De Moivre se obtiene para el caso particular $\rho = 1$.
- La fórmula también se verifica cuando *n* es un entero negativo.

**Actividad:** Mediante la fórmula de De Moivre obtener sen2θ y cos2θ.

## Radicación en IC

De acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra que se verá más adelante, todo número complejo no nulo tiene exactamente *n* raíces distintas, por lo que se evitará escribir $\sqrt[n]{z}$, salvo que $z$ sea un número real no negativo.

El Teorema de De Moivre nos da la metodología que necesitamos y de manera sencilla obtendremos las raíces de un número complejo no nulo z.

**Por definición, el complejo $w$ es raíz $n$-ésima de z no nulo si, y sólo si $w^n$ = z.** (Rojo,1984, p.362)

***Teorema***: Todo complejo no nulo z admite $n$ raíces $n$-ésimas distintas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\ sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

donde $k$ = 0, 1, 2, ..., $n$ –1, $\rho = |z|$ y $\theta$ = arg z

*Demostración*:

Sean z = ρ (cos $\theta + i$ sen $\theta$) y $w$ = $\rho_2$ (cos $\theta_2$ + $i$ sen $\theta_2$)

Por definición de raíz, debe ser

$$w^n = z$$

Es decir

$$\rho_2^n (\cos n\theta_2 + i \text{ sen } n\theta_2) = \rho (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

Por igualdad de complejos

$$\rho_2^n = \rho \quad \text{y} \quad n\,\theta_2 = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Luego

$$\rho_2 = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \frac{\theta+2k\pi}{n}$$

Se obtiene la fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\ sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Todas las raíces de $z$ tienen el mismo módulo, y difieren en el argumento que es

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

De los infinitos valores de $k$ es suficiente considerar 0, 1, 2, ..., $n$ -1 para obtener las $n$ raíces distintas:

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\ sen\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\ sen\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2.2\pi}{n}+i\ sen\frac{\theta+2.2\pi}{n}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+3.2\pi}{n}+i\ sen\frac{\theta+3.2\pi}{n}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}+i\ sen\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}\right)$$

Si $k = n$ entonces la correspondiente raíz $w_n$ tiene argumento

$$\frac{\theta}{n}+n\frac{2\pi}{n}=\frac{\theta}{n}+2\pi$$

que es congruente a $\frac{\theta}{n}$ y se vuelve a obtener $w_0$. En general $w_{j+n} = w_j$ y sólo existen $n$ raíces distintas.

El conjunto de las raíces $n$-ésimas de $z$ es

$$\Omega_n = \left\{ w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\ sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) : k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$$

***Existen $n$ raíces $n$-ésimas de cualquier número complejo no nulo. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$.***

**NOTAS**

$z = 0$ tiene sólo a $w = 0$ por raíz $n$- ésima porque $w^n = 0$ implica $w = 0$. También se podría decir que $z = 0$ tiene una raíz $n$-ésima de *multiplicidad* $n$. En este caso tendríamos que todo número complejo $z$ tiene $n$ raíces $n$-ésimas.

El lector todavía no familiarizado con el concepto de multiplicidad podría entenderlo mejor considerando las raíces de la ecuación cúbica

$$(z - i)^2 \cdot (z - 1) = 0$$

Las tres raíces son $i$, $i$ y 1, siendo $i$ una raíz de multiplicidad 2 (o raíz doble) (Hausser, 1973, p. 22).

Geométricamente, las raíces son los vértices de un polígono regular de $n$ lados.

Es particularmente importante el caso $z = 1$. Las raíces de la ecuación $w^n = 1$ se llaman raíces $n$-ésimas de la unidad, y si ponemos

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ sen\frac{2\pi}{n}$$

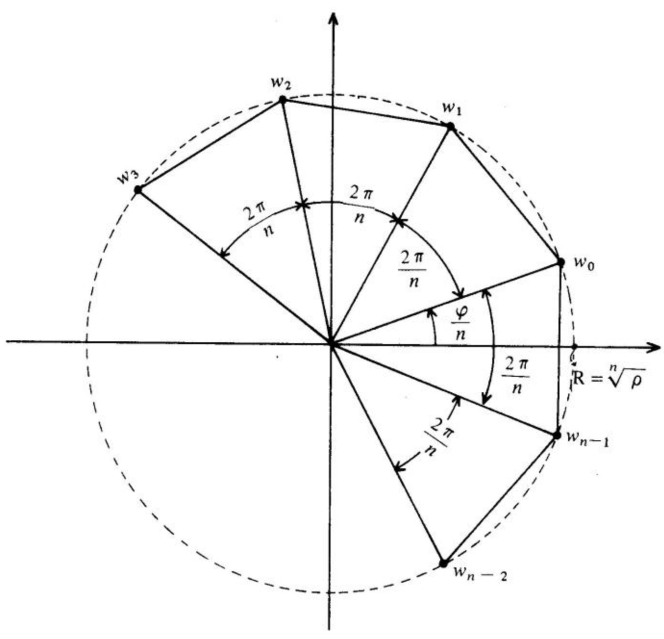
todas las raíces pueden expresarse mediante 1, $w$, $w^2$, ..., $w^{n-1}$.

Es evidente que si $\sqrt[n]{z}$ denota cualquier raíz $n$-ésima de $z$, entonces todas las raíces $n$-ésimas pueden expresarse de la forma

$$w^k \cdot \sqrt[n]{z}\ ,\ k = 0, 1, ..., n -1$$

**Representación gráfica**

Las $n$ raíces $n$-ésimas distintas de un complejo no nulo, se identifican con los vértices de un polígono regular de $n$ lados inscripto en la circunferencia de radio r = $\sqrt[n]{\rho}$



**Actividad:**

a) Determinar y representar la solución de $x^3 + 8i = 0$

b) Determinar las raíces de $z^2 - 4i = 0$

c) Determinar y representar las raíces cúbicas de la unidad.

d) Determinar y representar las raíces cuartas de $i$.

## Forma exponencial en IC

Junto con las formas binómica, vectorial y trigonométrica de un número complejo conviene considerar una cuarta forma de representación que resulta muy útil en la multiplicación y división de números complejos. La motivación hay que buscarla en los desarrollos en serie de ciertas funciones bien conocidas (Goberna, 2000, p. 162).

En el curso de Análisis se demuestra a partir de la fórmula de McLaurin que la función exponencial de una variable real $e^x$ tiene el siguiente desarrollo en serie

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, cualquiera sea $x \in$ IR y satisface la propiedad fundamental

$$e^{x+y} = e^x\, e^y \qquad \textbf{(1)}$$

llamada *teorema de adición.*

Deseamos prolongar la definición de la función exponencial para valores complejos de la variable independiente. Es natural exigir que $e^z$ se reduzca a la función exponencial real cuando z sea real. En segundo lugar, exigiremos que el teorema de adición de exponentes **(1)** se verifique para exponentes complejos cualesquiera.

Para $z = x + i\,y$ deberemos tener, por lo tanto,

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

y queda solo por definir $e^{iy}$.

La función $\cos y + i \operatorname{sen} y$, denotada por $f(y)$ satisface el teorema de adición $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, es decir

$\cos(x+y) + i\,\text{sen}(x+y) = (\cos x + i \text{ sen } x)\cdot(\cos y + i \,\text{sen } y)$,

por las fórmulas de adición para $\cos(x+y)$ y $\text{sen}(x+y)$.

Nuestros requisitos quedarán, pues, satisfechos si escribimos

$$\mathbf{e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen } y}$$

llamada **Fórmula de Euler** y

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i\,\text{sen } y) \qquad \textbf{(2)}$$

Se elige esta fórmula como una definición de la función exponencial compleja. Equivale a las relaciones $|e^z| = e^x$ y $\arg e^z = y$ (Ahlfors, 1966, pp. 60-62).

**NOTAS**

- La función f(k$y$), también satisface el teorema de adición para todo valor real de k, y se podría haber decidido poner $e^z = e^x$ (cos k$y$ + $i$ sen k$y$). ¿Porqué se prefiere el valor k = 1?. La respuesta es que esta es la única elección que hace que $e^z$ sea una función analítica[1]. Con esta elección tenemos que $e^z$ tiene por derivada a $e^z$; así, la función exponencial compleja tiene la misma propiedad de reproducirse por derivación que tiene la función exponencial real.
- De la fórmula de Euler se sigue que

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

  curiosa identidad que relaciona los 5 números más importantes en matemática: 0, 1, $i$, $\pi$ y e.
- También observamos que a partir de la definición **(2)** se obtienen las relaciones

$$e^{\pi i} = -1, \qquad e^{2\pi i} = 1, \qquad \textbf{(3)}$$

  las cuales no deberían considerarse como genuinas relaciones numéricas. **(3)** expresa únicamente la relación entre estas bases a la que una correcta definición de la función exponencial compleja debe conducir.

[1] Se verá en el curso de análisis matemático II que "*una función compleja f(z) se dice analítica en la región $\Omega$ si está definida y tiene derivada en cada punto de $\Omega$".(*Ahlfors, 1966, p. 85)

- De la segunda ecuación **(3)** se sigue que la función exponencial tiene *período* $2\pi i$. En efecto, $e^{z+2\pi i} = e^z$
- La función exponencial no se anula nunca. Este hecho es consecuencia de $|e^z| = e^x$ y de que la función exponencial real es positiva.
- De la Fórmula de Euler se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad sen\ y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

- Desde el punto de vista práctico, la Fórmula de Euler nos da una notación sencilla para un número complejo dado, mediante sus coordenadas polares $(\rho,\theta)$. Si z = ρ (cos $\theta$ + $i$ sen $\theta$) entonces podemos escribir

$$\boxed{\mathbf{z} = \rho\ e^{i\theta}}$$ ***Forma exponencial del número complejo z***

- Esta notación es tan útil que se maneja continuamente, aún cuando en la discusión en cuestión no aparezca la función exponencial.

**Operaciones en forma exponencial**

Sean $z = \rho\ e^{i\theta}$ y $z' = \rho'\ e^{i\theta'}$ dos números complejos, entonces las fórmulas relativas al producto, cociente, potenciación y radicación son las siguientes:

**a)** $z \cdot z' = \rho\ e^{i\theta}\ \rho'\ e^{i\theta'} = \rho\rho'\ e^{i(\theta+\theta')}$

**b)** $\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$**,** $z' \neq 0$

**c)** $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n\ e^{in\theta}$, n ∈ IN

Fórmula también válida para valores negativos de n si definimos $z^{-m} = (z^{-1})^m$ cuando m es entero positivo (Apóstol, 1977, p. 449).

**d)** Si $z \neq 0$, entonces $z$ tiene exactamente *n* raíces *n*-ésimas, que son

$$\sqrt[n]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, k = 0,1,\dots,n-1$$

**Actividad**: Demostrar que $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

## Logaritmación en IC

Junto con la función exponencial compleja debemos también estudiar su función inversa, el *logaritmo*. Se pretende definir el logaritmo natural de un número complejo.

Sean $z \neq 0$ y w dos números complejos. **Por definición, $\ln z = w$ si, y sólo si $e^w = z$**

Consideraremos z en forma exponencial y w en forma binómica

$$z = \rho\, e^{i\theta} \quad \text{y} \quad w = u + i\,v$$

Luego

$$e^{u+iv} = \rho\, e^{i\theta}$$

$$e^u\, e^{iv} = \rho\, e^{i\theta}$$

$$e^u = \rho \quad \text{y} \quad v = \theta + 2k\pi$$

$$u = \ln \rho, \quad v = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Por lo tanto, el valor del logaritmo natural complejo es

$$\boxed{\ln z = w_k = \ln \rho + i\,(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}}$$

**Fórmula que permite obtener los infinitos logaritmos naturales de un número complejo no nulo, que difieren en múltiplos de $2\pi i$** (Rojo, 1984, pp. 367-369).

*Observación*

Si c es un número real, debe tenerse cuidado para distinguir entre el *logaritmo real* con un único valor *ln c* y el logaritmo complejo con infinitos valores *ln c + k ·2$\pi i$* . Se conviene en que *ln c* denote el logaritmo real, a no ser que se diga lo contrario o esté claramente implícito.

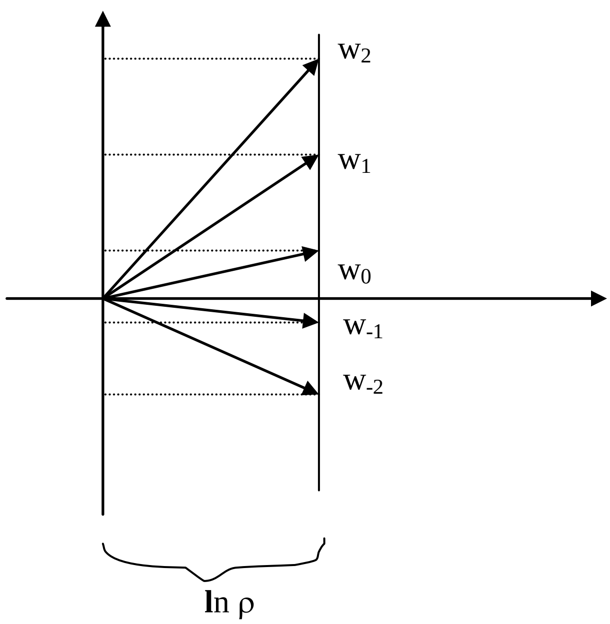
z = 0 no tiene logaritmo, como consecuencia de que $e^z$ nunca es cero (Ahlfors, 1966, pp.62-63).

Como la parte real del logaritmo de z es independiente de *k*, todos los logaritmos corresponden a puntos de la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto (ln $\rho$, 0).

**NOTA IMPORTANTE**

Se llama *valor principal del logaritmo de z* al que se obtiene cuando k = 0, es decir, **ln z = ln $\rho$ + $i\,\theta$.**

**Representación gráfica del logaritmo natural**




**Actividad:**

a) ¿Cómo es la representación gráfica del logaritmo natural de un número complejo si $\rho$ = 1 y si $0 < \rho < 1$?

b) Hallar el módulo y el argumento principal de ln $i$ .

# Exponencial compleja

Sean $z_1$ y $z_2$ números complejos tales que $z_1 \neq 0$. Estamos interesados en la determinación de la exponencial compleja general

$$w = z_1^{z_2}$$

Aplicando logaritmos naturales en ambos miembros

$$\ln w = z_2 \ln z_1$$

Por definición de logaritmo

$$w = e^{z_2 \ln z_1} \qquad \square$$

**NOTA**

El símbolo $a^b$, $a \neq 0$, con $a$ y $b$ números complejos, se utiliza siempre como una notación equivalente y más sencilla de $e^{b \ln a}$. Si $a$ es positivo, $\ln a$ es el logaritmo real, y en este caso $a^b$ toma un solo valor. Si $a$ no está restringido de la forma anterior, $\ln a$ es el logaritmo complejo y $a^b$ tiene en general infinitos valores.

Existe un único valor si, y sólo si $b$ es un entero $n$, y entonces $a^n$ puede calcularse como una potencia de $a$ o de $a^{-1}$.

Si $b$ es un número racional con forma reducida $p/q$, entonces $a^{p/q}$ tiene exactamente $q$ valores, y puede representarse mediante $\sqrt[q]{a^p}$ (Ahlfors, 1966, p. 63).

**Actividad:**

1) Hallar el valor principal de $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^i$

2) ¿En qué sentido es cierto que $(a^b)^c = a^{bc}$?

## Ecuaciones algebraicas

Supongamos que $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos.

Decimos que z $\in$ IC es una **raíz** (o un **cero**) de $p(x)$ cuando z es una solución de la ecuación algebraica $p(x) = 0$, es decir, al evaluar el polinomio $p(x)$ en x = z se obtiene el número complejo $p(z) = 0$. Esto es equivalente a afirmar que $p(x)$ es un múltiplo de x – z (Teorema el resto).

Enunciaremos a continuación el llamado **Teorema Fundamental del Álgebra.** Se conocen muchas demostraciones de este célebre teorema pero en todas ellas intervienen conceptos no algebraicos cuyo conocimiento está más allá del alcance de este texto.

## Teorema de D' Alembert

*Todo polinomio con coeficientes complejos de grado positivo tiene al menos una raíz compleja.*

Como consecuencia del teorema anterior y usando el Teorema del resto, se obtiene la descomposición de cualquier polinomio $p(x)$ de grado positivo en factores lineales.

En efecto si $z_1$ ε IC es una raíz de $p(x)$, se puede escribir

$$p(x) = (x - z_1)\, q_1(x)$$

Si el grado de $p(x)$ es n > 1, $q_1(x)$ tiene grado positivo y por lo tanto una raíz compleja $z_2$. Es decir

$$q_1(x) = (x - z_2)\, q_2(x)$$

Procediendo así se encuentran *n* factores lineales de $p(x)$, ***o la descomposición factorada de p(x)***, que es

$$\boldsymbol{p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n)\, q \quad ; \quad \text{con } q \neq 0}$$

***Observaciones***

- Esta última expresión nos dice, entre otras cosas, que los únicos polinomios irreducibles en IC son los lineales.
- Las raíces $z_k$ para k = 1, 2, ... , *n* de *p(x)* no son necesariamente distintas.
- Si un cuerpo K cumple lo afirmado para IC en el Teorema de D'Alembert, es decir, si cualquier polinomio con coeficientes en K tiene al menos una raíz en K, se dice que K es un **cuerpo algebraicamente cerrado.**
- IC es algebraicamente cerrado, mientras que IR no lo es.

***Definición***: El número z $\in$ IC es una raíz de *p(x)* de orden de **multiplicidad** r $\in$ IN si, y sólo si, existe un polinomio *q(x)* tal que

$$p(x) = (x - z)^r\, q(x), \quad \text{con } q(z) \neq 0.$$

**NOTA**

- z es una **raíz simple** de *p(x)* si su orden de multiplicidad es 1.
- z es una **raíz doble** de *p(x)* si su orden de multiplicidad es 2, etc.

**Corolario**: **Teorema Fundamental del Álgebra**

**TODO POLINOMIO DE GRADO *n* > *0* (*n* $\in$ IN) CON COEFICIENTES EN IC TIENE EXACTAMENTE *n* RAÍCES COMPLEJAS (contando cada una de ellas tantas veces como indique su multiplicidad).**

**Ecuaciones algebraicas con coeficientes reales**

Toda ecuación algebraica con coeficientes en IR puede considerarse también como una ecuación algebraica con coeficientes complejos.

**Proposición**: Si un número complejo es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces su conjugado también lo es.

A continuación veremos algunos tipos especiales de ecuaciones.

**1º) Ecuaciones bicuadradas:** Son las de cuarto grado que no contienen más que potencias de la incógnita con exponentes pares. Son de la forma

$$a\ x^4 + b\ x^2 + c\ = 0; \quad a, b, c \in \text{IR} \quad y \quad a \neq 0$$

Procedimiento de cálculo

Haciendo la sustitución $\underline{x^2 = z}$ **(1)** , se tiene:

$$a\ z^2 + b\ z + c\ = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en *z*. Luego

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Remplazando en **(1)**

$$x = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Existen 4 raíces correspondientes a las 4 combinaciones posibles entre los signos de los radicales.

**Actividad:** Resolver la ecuación $(x^2 - 1)^2 - 5 \cdot (x^2 - 1) + 6 = 0$

**2º) Ecuaciones recíprocas:** Una ecuación se llama *recíproca* si es equivalente a la que resulta de ella remplazando la incógnita *x* por su recíproca $1/x$. Por consiguiente, si una ecuación recíproca tiene la raíz $x = x_1$, debe verificarse también para $1/x = x_1$ y entonces tiene la raíz $x = 1/x_1$.

**2.1) La ecuación recíproca de tercer grado** es de la forma siguiente, con coeficientes equidistantes de los extremos iguales:

$$a\,x^3 + bx^2 + b\,x + a = 0$$

Procedimiento de cálculo

$$a\,(x^3 + 1) + b\,x\,(x + 1) = 0$$

$$a\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) + b\,x\,(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)\,[\,a\,(x^2 - x + 1) + b\,x\,] = 0$$

$$\begin{cases} (x + 1) = 0 \quad \textbf{(1)} \\ a\,(x^2 - x + 1) + b\,x = 0 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

De **(1)** se obtiene la raíz **$x_1 = -1$**

En **(2)**, a partir de la ecuación de segundo grado $a x^2 + (b - a) x + a = 0$, se obtienen dos raíces $\boldsymbol{x_2}$ y $\boldsymbol{x_3}$ recíprocas entre sí, es decir tales que $\boldsymbol{x_2 \cdot x_3 = 1}$

**Actividad:** Resolver la ecuación $3 x^3 + 10 x^2 + 10 x + 3 = 0$

**2.2) La ecuación recíproca de cuarto grado** es de la forma siguiente:

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$$

(Se observa que los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales)

Procedimiento

Dividiendo por $x^2$, y agrupando términos, se tiene:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Haciendo

$$x + \frac{1}{x} = z \quad \textbf{(2)}$$

Como

$$z^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

se tiene

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

Remplazando en **(1)**

$$a (z^2 - 2) + b z + c = 0$$

Cada raíz de la ecuación de segundo grado anterior se remplaza en **(2),** obteniéndose una ecuación de segundo grado en $x$, y así se obtienen las cuatro raíces.

**Actividad:** Resolver la ecuación $2 x^4 - x^3 - 6 x^2 - x + 2 = 0$

**3º) Ecuaciones binomias:** Son aquellas donde el polinomio del primer miembro es un binomio. Las de grado *m* son de la forma:

$$a\ x^m + b\ x^n = 0; \quad m, n \in IN; \quad m > n \geq 0$$

Procedimiento de cálculo

Se saca factor común $x^n$

$$x^n\ (a\,x^{m-n} + b) = 0$$

Las ecuaciones subordinadas son

$$\begin{cases} x^n = 0 & \textbf{(1)} \\ a\ x^{m-n} + b = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

De **(1)**: $x = 0$ es una raíz múltiple de orden n, es decir: $\underline{x_1 = x_2 = ... = x_n = 0}$

De **(2)**: $x^{m-n} = -\dfrac{b}{a}$ y, por lo tanto $x = \sqrt[m-n]{-\dfrac{b}{a}}$ (*m* - *n* raíces complejas)

**Actividad:** Resolver la ecuación $x^6 - 8x^3 = 0$

**4º) Ecuación trinomia:** Es una ecuación de segundo grado en una potencia de *x* de la forma

$$x^{2n} + b\ x^n + c = 0, \quad n \in IN$$

Procedimiento

Se realiza la sustitución $x^n = z$, luego $x^{2n} = z^2$

Por lo tanto, se tiene

$$a\ z^2 + b\ z + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en *z*, sus raíces son $z_1$ y $z_2$.

Siendo $x^n = z_1$, entonces $x = \sqrt[n]{z_1}$ (*n* raíces complejas)

Como $x^n = z_2$, entonces $x = \sqrt[n]{z_2}$ (*n* raíces complejas)

**Actividad:** Resolver la ecuación $x^8 - 26\ x^4 + 25 =$