UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA

GUÍA DE TRABAJOS PRACTICOS

Prof. Titular: NARVÁEZ, Ana María

Prof. Asociado: VEGA, Noemí

Prof. Adjunto: TOMAZELLI, Gabriela

JTP: RUEDA. Analía

JTP: PANELLA, Eugenia

JTP: BERNALDO DE QUIRÓS, Carolina

2023

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

LÓGICA PROPOSICIONAL

Ejercicio 1: Escriba los siguientes enunciados en forma simbólica utilizando los conectivos adecuados:

a) 2 es un número primo sólo si es divisible por sí mismo y por la unidad.

b) Nos veremos en el parque, si no llueve.

c) Si has hecho los ejercicios y has leído los apuntes, estás preparado para el examen. En caso contrario, tienes un problema.

d) O la derivada de x^2 es 2x o la integral de 2x es x^2.

Ejercicio 2: ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la proposición “Llegará en avión de las 8 o en el de las 9, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos” Donde:

p: *“Llegará en el avión de las 8”*

q: *“Llegará en el avión de las 9”*

r: *“Tendrá tiempo para visitarnos”*

a) $\sim p \Rightarrow q \vee r$

b) $p \vee q \Rightarrow r$

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r)$

d) $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$

e) NRAC

Ejercicio 3: La expresión lógica que corresponde a la negación de la proposición “Pedro no irá a ver la Copa América y no estudiará ingeniería” es:

a) $\sim p \wedge q$

b) $\sim p \vee \sim q$

c) $p \vee q$

d) $p \wedge q$

e) NRAC

Ejercicio 4: ¿Cuál/es de las siguientes proposiciones puede/n escribirse como $p \vee (q \wedge r)$, para *p*, *q* y *r* adecuadas?

a) Si la inflación sube y hay elecciones cerca, entonces las pensiones suben.

b) Puedes nadar, o usar el camarín y la ducha.

c) Tienes que comprar pan, queso y cerveza.

d) Las plantas necesitan agua y alimento, pero no que les hablen.

e) Te preparas para el examen e ingresas a la universidad o comienzas a trabajar.

Ejercicio 5: Confeccione la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas e indique si son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee q) \Rightarrow q$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$

c) $(p \veebar \sim q) \Leftrightarrow (\sim r \Leftrightarrow p)$

d) $[\sim(\sim p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Ejercicio 6: ¿Qué condiciones deben satisfacer *p*, *q* y *r*, según corresponda, para que la siguiente proposición sea…

a) $[(q \Leftrightarrow p) \wedge \sim q] \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ falsa

b) $[(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim r] \vee [\sim q \Rightarrow p]$ falsa

c) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge (r \Leftrightarrow q)$ verdadera

Ejercicio 7: Sean *p*, *q* y *s* tres proposiciones tales que *s* es falsa, $p \Leftrightarrow \sim q$ y $q \Rightarrow s$, son verdaderas. Deduzca el valor de verdad de p y q.

Ejercicio 8: ¿Cuál de las siguientes expresiones es lógicamente equivalente a $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$?

a) $p \Rightarrow (\sim q \wedge r)$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

c) $(p \Rightarrow \sim q) \wedge r$

d) $p \Rightarrow (q \vee r)$

e) NRAC

Ejercicio 9: Simplifique las siguientes proposiciones, indicando las leyes lógicas utilizadas. En cada caso, realice el circuito lógico simplificado.

a) $(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)$

b) $\sim[q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow [(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p]$

c) $[p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \sim p \wedge q$

d) $\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \sim r]\} \vee (\sim p \wedge q)$

e) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \vee \sim q]$

f) $\sim(p \Rightarrow q) \wedge \{[q \wedge (\sim r \vee q)] \vee \sim q\}$

Ejercicio 10: Dados los siguientes enunciados de teoremas, redacte los mismos como condición necesaria y suficiente.

a) Si A_{nxn} es inversible, entonces el rango de A es *n*.

b) Si f es una función derivable entonces f es continua.

c) Si A_{nxn} tiene n valores propios distintos entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 11: Complete las siguientes proposiciones:

a) La negación de $\forall$ x: $\{[\sim P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow \sim R(x)\}$ es ………………………………………………………………………..

b) La negación de $\exists$x/ $\{[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge P(x)\}$ es ……………………………………………………………………………

c) La negación de $\forall$x: $\{[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \wedge \sim P(x)\}$ es ……………………………………………………………………

Ejercicio 12: Exprese las siguientes proposiciones usando conectivos y cuantificadores y escriba la negación de los mismos:

a) Algunos números reales con cuadrado mayor que 4 son menores que 2.

b) Cualquier número entero satisface $x^2 - x \geq 0$ o no es mayor que 2.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

MATRICES

Ejercicio 1: Determine la matriz e identifique, si es posible, según sus características.

a) La matriz $A_{4x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = 3\ para\ todo\ i = j\ . \\ a_{ij} = 0\ para\ todo\ i\ \neq j. \end{cases}$

b) La matriz $A_{3x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = \ 2\ si\ i \leq j \\ a_{ij} = 0\ si\ i > j \end{cases}$

c) La matriz $A_{3x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = \ i + j\ \ si\ |i - j|\ \geq 1 \\ a_{ij} = i - j\ si\ \ |i - j|\ < 1 \end{cases}$

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad F = [-1]$

Realice las operaciones propuestas siempre que sea posible, y en caso de no serlo, justifique. Identifique combinaciones lineales en espacios vectoriales correspondientes.

a) B+D	*d) (D-B). C*	*g) F.E*	*j) -3. (A -* I_{2x2}*)*
b) A-C	*e)* E^T*. A*	*h)* A^2	*k) -1(B.C) + A*
c) (-1A). D	*f) E.F*	*i)* C^3	*l)* $[(D+B)^T.A]-C$

Verifique f) realizando el cálculo en https://matrixcalc.org/es/ u otro calculador o bien usando la app Mathway para celulares. Concluya.

Ejercicio 3: Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, de ser posible, para obtener la expresión de la matriz X. Aplique propiedades. Todas las matrices son cuadradas, del mismo orden e invertibles.

a) $X.B = C - A$

b) $B.(X + 2A)^T = B^2$

c) $A^2.X = A^2 + I$

d) $[2.(A.B.X)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}[(A + B)]$

e) $[C.(A + X).B] = 2.C.(A.B)$

f) $(X.B^{-1})^{-1} = (A^{-1}.B^2)^{-1}.A$

g) $(A^{-1}X)^{-1}.B = A^2.(B^{-1}.A)^{-1}$

Ejercicio 4: Determine cuál de las siguientes matrices, son elementales e indique la operación elemental que se realizó sobre la matriz identidad correspondiente.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\; B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1&0&7\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 5: Dada A una matriz de 3x3 genérica, calcule y analice que sucede con esta matriz cuando es pre multiplicada y post multiplicada por la matriz elemental E dada por:

$$E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 6

Para los siguientes ítems:

$a)\ A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&4\\-1&3\end{bmatrix}$ $\qquad$ $c)\ A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&3\\-5&-2\end{bmatrix}$

$b)\ A=\begin{bmatrix}2&7&1\\7&8&1\\0&9&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&9&2\\7&8&1\\2&7&1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $d)\ A=\begin{bmatrix}1&5\\0&6\\3&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&6\\1&5\\3&2\end{bmatrix}$

Encuentre la matriz elemental E tal que EA= B. Verifique si la E propuesta es la correcta, realizando el producto con las herramientas digitales propuestas anteriormente.

Ejercicio 7

a) Determine qué matrices están en forma escalonada por filas, en forma escalonada reducida o ninguna de ellas:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&8&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad H=[2]$$

b) Indique el rango de las matrices anteriores e indique cuáles de ellas son invertibles.

Ejercicio 8: Exprese las siguientes matrices en forma escalonada reducida.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9: Complete de manera que las siguientes proposiciones resulten verdaderas.

a) Los valores de a y b para que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -b & -2 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$ tenga rango igual a dos son……………………..

b) Los valores de a y b para que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a+2 & 0 & b \end{bmatrix}$ tenga rango igual a uno son………………

c) El/los valor/es de k para que la matriz $\begin{bmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sea de rango menor a tres es/son……………………………..…..

Ejercicio 10: Determine el rango de las siguientes matrices y calcule su inversa, si es posible.

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 11: Aplicando propiedades, resuelva:

a) Si se conoce $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a.1) $(2.\,A)^{-1}$ a.2) $(A^2)^{-1}$ a.3) $(A^T)^{-1}$

b) Si la transpuesta de 2B es $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule la inversa de B

c) Utilizando las matrices A y B de los incisos anteriores resuelva:

c.1) $(A.B)^{-1}$ c.2) $(A^T + B^T)^T$

Ejercicio 12: Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Argumente sus respuestas.

a) Si A es una matriz simétrica no nula entonces admite matriz inversa.

b) Las matrices inversibles de orden nxn determinan un subespacio vectorial del espacio de las matrices cuadradas de orden nxn.

c) Si A y B son matrices escalares de orden nxn entonces A.B=B.A.

d) Si A y B son matrices cuadradas de orden 2 y A.B= **0,** entonces A o B es la matriz nula.

e) Las matrices diagonales de orden nxn determinan un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden nxn.

Ejercicio 13: Demuestre:

a) Si A y B son matrices inversibles de orden nxn, entonces A.B es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Si A es una matriz inversible de orden nxn y k un escalar real no nulo, kA es inversible y $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

c) Si A es una matriz de orden nxn inversible y k es un entero positivo, entonces A^k es inversible y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

d) Si A es una matriz inversible de orden nxn, entonces A^T es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) Si A es una matriz de mxn, entonces $A.A^T$ es una matriz simétrica.

Ejercicio 14: Sea S = $\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right\}$ incluido en el espacio vectorial de las matrices R^{2x2} con las operaciones usuales.

a) Determine si S es LI o LD.
b) ¿Qué espacio genera S?
c) ¿Es posible completar S de manera que sea (o siga siendo) LI? En caso afirmativo, ¿qué espacio se genera?

<u>**Ejercicio de aplicación (resuelto)**</u>**:**

Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea M la matriz de ventas de enero:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

a) Interpretar la matriz M, explicando cómo han sido las ventas.

La matriz M representa las ventas de enero, donde cada columna representa a los 3 artículos producidos por la fábrica y cada fila a un cliente distinto. Así tenemos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix}9 & 5 & 2 & C_1\\ 3 & 8 & 0 & C_2\\ 0 & 0 & 0 & C_3\\ 6 & 7 & 1 & C_4\end{bmatrix}\end{array}$$

De acuerdo a esto interpretamos que, durante el mes de enero, el cliente C1 compró 9 artículos del primer tipo, 5 del segundo y 2 del tercero. El segundo cliente compró 3 artículos del primer tipo, 8 del segundo y ninguno del tercero. Observamos que el tercer cliente, durante el mes de enero, no compró ningún artículo y el cuarto cliente compró 6 artículos del primer tipo, 7 del segundo y 1 del tercero.

b) Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero.

Siguiendo el mismo criterio anterior, para armar la matriz B correspondiente a las ventas del mes de febrero. Es decir, la primera columna de B representa a la cantidad de artículos del primer tipo, la segunda columna, cantidad de artículos del segundo tipo y tercera columna, cantidad de artículos del tercer tipo. Mientras que cada fila corresponde a un cliente distinto: C_1, C_2, C_3 y C_4. Así, obtenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero.

Para hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero, debemos sumar las ventas del mes de enero y las ventas del mes de febrero, es decir debemos hallar M + B:

$$M + B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Hallar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

Para determinar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero, debemos hallar B – M:

$$B - M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto indica que el primer cliente, en el mes de febrero, compró 4 artículos del primer tipo menos que en el mes de enero, tres artículos menos del segundo tipo y un artículo más del tercer tipo. El segundo cliente, en el mes de febrero, compró tres artículos más del primer tipo que en el mes de enero, dos artículos menos del segundo tipo y seis más del tercer tipo. El tercer cliente, compró artículos más del primer tipo en febrero respecto a enero y no compró en ninguno de estos meses artículos del segundo y tercer tipo. El cuarto cliente, en febrero respecto a enero, compró 6 artículos menos del primer tipo, 7 menos del segundo tipo y uno menos del tercer tipo.

e) ¿Cuál sería la matriz de ventas del mes que la fábrica se toma vacaciones?

En el mes que la fábrica se toma vacaciones, no se producen ventas y en consecuencia la matriz que representa las ventas durante el mes de vacaciones, es la matriz nula:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f) Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo. ¿Cuál habrá sido el total de ventas en el primer cuatrimestre?

Para responder a esta última pregunta, debemos determinar, en primer lugar, las matrices C y D que representan las ventas de los meses de marzo y abril, respectivamente:

$$C = 2M = 2.\begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} =. \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = 4.C = 4.\begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} =. \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

Luego el total de ventas del cuatrimestre, lo obtenemos resolviendo:

$$\text{M + B + C + D} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Total de ventas</u> = $\begin{bmatrix} 104 & 57 & 25 \\ 39 & 94 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 66 & 77 & 11 \end{bmatrix}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

DETERMINANTES

Ejercicio 1: Dados los siguientes productos elementales, complete los subíndices faltantes, determine su signo, indique el orden de la matriz de la cual se obtuvieron y la cantidad total de productos elementales que tiene dicha matriz.

a) $a_{12} \cdot a_{43} \cdot a_{21} \cdot a_{\dots\dots}$ b) $a_{35} \cdot a_{11} \cdot a_{\dots\dots} \cdot a_{54} \cdot a_{42}$

Ejercicio 2: Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique indicando el nombre de la propiedad aplicada.

a) $\begin{vmatrix} 2/3 & 7 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 & -5/7 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 3 & 2 & 9 & -2/7 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -7/2 & 3 \\ 8 & -12 & 1 \\ 2 & -3 & 1/4 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} -3/5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -3 & -6 & 5 \\ -6 & -5 & -4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

Ejercicio 3: Sea A = $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ y det(A) = - $\frac{1}{2}$. Calcule el valor de los determinantes de las siguientes matrices:

a) B = $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 2b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ c) C = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$

b) D = $\begin{bmatrix} a_1+3d_1 & a_2+3d_2 & a_3+3d_3 & a_4+3d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ d) E = $\begin{bmatrix} 2a_1 & -a_2 & 6a_3 & a_4 \\ 2c_1 & -c_2 & 6c_3 & c_4 \\ 2b_1 & -b_2 & 6b_3 & b_4 \\ 2d_1 & -d_2 & 6d_3 & d_4 \end{bmatrix}$

c) F = $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4: Siendo A, B y C matrices de orden 3, A **antisimétrica**; B **ortogonal** con determinante positivo y C simétrica con det (C) = - 2. Calcule si es posible:

a) $\det\left(\frac{1}{2}C\right)$= ....

b) $\det\left(A \cdot 2B^{-1}\right)$ = ...

c) $\det\left(C^{-1} \cdot -B\right)$ = ...

d) $\det(C^T + 3C)$ = ...

e) $\det(-4.B.B^T + 5C^T.C^{-1})$ =........

f) $\det\left(A.\left(\frac{3}{2}C.B^{-1}\right)^T\right)$ =........

g) $\det\left(\left(\frac{5}{2}C^T - (B^T)^{-1}\right)^{-1}\right)$=........

h) $\det\left(\left(\left(\frac{1}{3}B\right)^T.2C^{-1}\right)^{-1}\right)$ =........

Ejercicio 5: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Encuentre el menor complementario y cofactor correspondiente al elemento 2 y al elemento a_{31}.

b) Evalúe el determinante de la matriz A mediante cofactores y verifique utilizando la regla de Chío.

c) Indique si la matriz A es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de A.

Ejercicio 6: Halle el determinante de la siguiente matriz utilizando la regla de Chío.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique si la matriz B es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de B.

Ejercicio 7: Sea A = $\begin{pmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de *x* para los cuales la matriz A es invertible.

Ejercicio 8: Sea B = $\begin{pmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de *x* para los cuales el rango de la matriz B es menor a 3.

Ejercicio 9: Decida si el siguiente conjunto de vectores de R^3 es linealmente independiente.

{(1, 2, 1); (2, 1, -1); (- 1, 1, 1)}

Ejercicio 10: Complete las siguientes proposiciones de manera que resulten verdaderas.

a) Si $a_{25}.\ a_{pq}.\ a_{16}.\ a_{54}.\ a_{31}.a_{43}$ es un producto elemental de una matriz cuadrada A, entonces A es de orden ……; el signo de dicho producto elemental es ……. y la cantidad total de productos elementales es ……

b) Si $\frac{1}{2}(B^{-1})^T$ es $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\left|2B^T\right|$ es ……………………………………………………………………………………

c) Sean p: "A_{nxn} tal que det (A)= 0" y q: "A_{nxn} es no inversible". Entonces, p es condición ……………………………………………………para q y q es condición………………………………………………..para p.

d) Sean A, B, C y D matrices invertibles de orden 2x2. Si $(D^{-1}.C.B)^T = B^T.C^T.3.A$, entonces el det (A) es ……

Ejercicio 11: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

a) Si A_{2x2} y B_{2x2}, entonces det (A + B) = det (A) + det (B) ( )
b) Si A_{nxn} es una matriz antisimétrica de orden impar, entonces det (A) = 0. ( )
c) Si det (A) = 0 entonces A tiene dos filas proporcionales. ( )
d) El determinante del producto de una matriz de 2x1 por una de 1x2 siempre es cero. ( )
e) Sean A_{nxn} y B_{nxn} matrices invertibles entonces A. B es invertible. ( )
f) Si A_{nxn} es equivalente por filas a B_{nxn} entonces tienen el mismo determinante ( )
g) Si A_{nxn} es una matriz ortogonal, su determinante es 1 ó – 1. ( )

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

a) Determine si los vectores (2, 1, 2, 0); (2,0, 3, 1); (3, 0, 2, 0) y (- 1, 1, 3, 1) son solución del sistema.
b) Muestre que todo vector de la forma $(3-r-s; r; 2-s; s)$, donde r y s son variable real, es solución del sistema.
c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es $S = \{(3-r-s; r; 2-s; s), r \in IR \ \ y \ \ s \in IR\}$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices ampliadas en forma escalonada reducida correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales.

i) $\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$ **ii)** $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array}\right]$ **iii)** $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{array}\right]$ **iV)** $\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$

a) Escriba el sistema.

b) Clasifique el sistema según el Teorema de Rouché Frobenius.

c) Determine, si existen, las incógnitas principales y libres.

d) Encuentre el conjunto solución.

Ejercicio 3: Analice y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} -x_2 + 2x_1 + 1x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ 1x_4 + 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2z = 8 - y \\ -2y - x + 3z = 1 \\ -7y + 4z = 10 - 3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_2 + 7x_3 = 2 - x_1 \\ -12x_2 + x_1 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 3y = 4 \\ -5x = -5 \end{cases}$

Ejercicio 4: Sin usar lápiz ni papel determine cuál de los siguientes sistemas homogéneos con coeficientes reales, tienen soluciones no triviales.

$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + fy + gz = 0 \end{cases}$

Ejercicio 5: ¿Qué relación existe entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} x+3z=7 \\ -1/2y=2 \\ -2x-6z=-14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+3y+6z=2 \end{cases}$$

Ejercicio 6: En cada caso, escriba el sistema en la forma AX = B, luego si es posible, halle A^{-1} y utilice el producto de matrices para obtener el vector solución del sistema.

a) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3y-2x=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y=-x+1 \\ -z=2-y \\ 3+x+2y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1+4x_3=2 \\ 3x_2+x_3=-4+x_1 \\ x_2+2x_3=-1 \end{cases}$

Ejercicio 7: Para las siguientes matrices ampliadas determine los posibles valores de *a*, *b y c* para que el sistema A X = B no tenga solución, tenga infinitas soluciones o tenga solución única.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & b & a^2 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & a \\ -4 & 8 & -12 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 0 \\ -1 & -a & b & 0 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & a \\ 0 & 1 & 5 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & 2a-3b+c \end{array}\right]$

Ejercicio 8: Plantee el sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso para encontrar una matriz B tal que:

a)Si A = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$, entonces A B_{2x1} = O (O es la matriz nula)

b) Si A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$entonces A. B_{2x2} = I (I es la matriz identidad)

Ejercicio 9: Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

(A – λI) X = 0 siendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1 & 0 \\ -7 & 1/2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Argumente sus respuestas**.**

a) Si A es de orden 4 x 3 y ρ(A) = 3 entonces A X = B tiene solución única.

b) Si la solución de un SEL de 5x4 es S = {(t + 1, - s, 1 +s, s) ϵ R^4} entonces la matriz ampliada del SEL en forma escalonada reducida es $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

c) Dado un SEL con infinitas soluciones, A X = B, con A ≠ 0 y A_{4x10} la cantidad de variables libres que puede tener el sistema es 6 o 7 o 8 o 9.

d) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo A.X=B es un subespacio vectorial de R^n.

e) Si A es de orden nxn y el sistema AX = 0 es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema $A^T X = 0$.

f) Sea AX = B un SEL no homogéneo y A de orden 8x5, entonces el mayor rango de la matriz ampliada es 6.

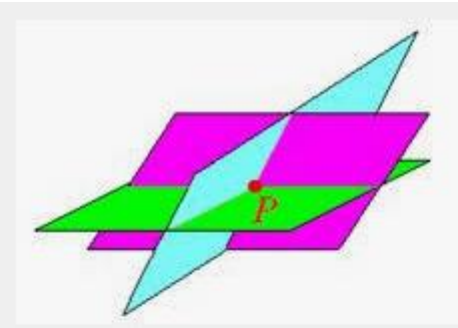
g) Si AX = 0, con A de orden 3x5 y el rango de la matriz de coeficientes es 3, entonces el espacio solución del sistema tiene dos variables libres.

h) Sea AX = 0 un sistema con infinitas soluciones, siendo A de orden 3x3, el mínimo rango de la matriz de coeficientes del SEL es 1.

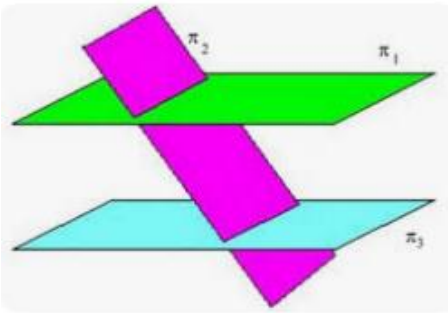
i) Según el Teorema de Rouché-Frobenius sea A X = B, con A_{mxn}, .Si el sistema tiene solución única entonces podemos afirmar que m=n.

Ejercicio 12: Plantee un sistema de ecuaciones para cada gráfico:

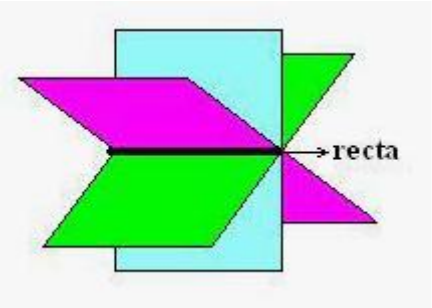
a)



b)

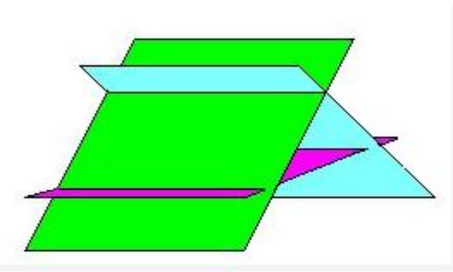


c)



d)

0



Ejercicio 12: Plantee, resuelva e interprete los siguientes problemas:

a) Un fabricante produce reveladores de película de 2, 6 y 9 minutos. La fabricación de cada tonelada del revelador de 2 minutos requiere 6 minutos en la planta A y 24 minutos en la planta B. Para manufacturar cada tonelada del revelador de 6 minutos son necesarios 12 minutos en la planta A y 12 minutos en la planta B. Por último, para producir cada tonelada del revelador de 9 minutos se utilizan 12 minutos la planta A y 12 minutos la planta B. Si la planta A está disponible 10 horas al día y la planta B, 16 horas diarias, ¿cuántas toneladas de cada tipo de revelador de película pueden producirse por día de modo que las plantas operen en toda su capacidad?

b) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1, la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Dadas las siguientes funciones, determine si son transformaciones lineales.

a) $T: R^2 \to R^2 / T((x,y)) = (x^2, y)$

b) $T: R^3 \to R^2 / T((x,y,z)) = (0,0)$

c) $T: R^3 \to R^3 / T((x,y,z)) = (x-y, z, 3)$

d) T: $M_{mxm} \to M_{mxm}$ tal que T(A) = A^T + A

e) $T: R^3 \to R^2 / T((x,y,z)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

f) $T: R^3 \to R^3 / T((x,y,z)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: Para las transformaciones lineales del ejercicio 1

a) Determine N(T), encuentre una base de dicho espacio y su dimensión.

b) Determine la imagen de T, encuentre una base de dicho espacio y su dimensión.

c) Verifique los resultados obtenidos usando el teorema de la dimensión.

d) Clasifique las transformaciones lineales según sean monoformismos, endomorfismos, isomorfismos o epimorfismos.

Ejercicio 3: Indique con una cruz cuál de los elementos dados pertenecen al conjunto Imagen de las diferentes transformaciones lineales:

a) Para T: $R^3 \to R^1$ tal que T(x, y, z) = x-y+z.

__ 0	__ (2,1,0)	__ (a, a + b, c)
__ $\sqrt{2}$	__ R^2	__ (m-n, m, n)

b) Para T: $P_2 \to P_2$ tal que T (a t^2+ b t + c) = (a+c) t^2 + (b+c) t.

__ t+2	__ t^2-1	__ t^2+t-a
__ bt^2+at	__ t^2-t	__ at^2-ct

Ejercicio 4: Para T(X)= A.X. Determine Im(T) y N(T) y encuentre una base para cada conjunto.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5: Encuentre la ley de la transformación lineal T, tal que T (1, 2, 1) = (2, 1) y T (2, 3, 1) = (5,2) y T(1,0,0) = (0,1). Luego halle T(-3, 2, 0).

Ejercicio 6: Determine el N(T) e Im(T) para el operador lineal reflexión respecto a la recta x=y en R^2.

Ejercicio 7: Complete las siguientes proposiciones: "La ley de la transformación lineal en R^2 que corresponde a una:

a) Rotación de 45° respecto del origen en sentido antihorario es T(x, y) = ……………."
b) Proyección sobre el eje x es T(x, y) =………………."
c) Contracción vertical de k = 1/2 es T(x,y) =……………..."

Ejercicio 8: Sea S el triángulo con vértices en (1,1), (2,1), (1,4). Represente gráficamente la imagen de S bajo la transformación indicada:

a) Rotación de un ángulo de 180° respecto del origen en sentido antihorario.
b) Deslizamiento cortante en la dirección del eje Y con factor k= 2.

Ejercicio 9: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

a) Sea T la transformación lineal de R^3 en R^3 dada por T((x, y, z)) = (x – z, y + z, 2x), entonces el Núcleo de T es el conjunto {(t, t, t), t ∈ R}
b) Sea la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por: T(x, y, z) = (x + y , x – z), luego se verifica quela dimensión de N(T) es uno y la dimensión de Im(T) es dos.
c) Si T es una transformación lineal matricial T(X) = A X , siendo A una matriz fija de orden 2x2, tal que N(T) = {0} , entonces el determinante de la matriz A es 0.
d) Sea T una transformación lineal de R3 en R2 dada por T((x, y, z)) = (x+z, y+z) y A la matriz estándar asociada a T, entonces se puede afirmar que las columnas de A forman un conjunto linealmente dependiente.
e) Sea $T:P_3 \rightarrow P_2$, su matriz asociada, en cualesquiera bases, tiene dimensión 4x3.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

MATRIZ ASOCIADA

Ejercicio 1: Encuentre la matriz estándar asociada a las siguientes transformaciones lineales y escriba su representación matricial:

a) T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ tal que T ((x, y)) = (x – y, 0, -3x).

b) T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ tal que T ((x, y, z)) = (-y + z, 2z

c) Operador lineal en IR^3 tal que T ((x, y, z)) = $\begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-x \\ 2z+x \end{pmatrix}$. Escriba la representación matricial, por simple inspección.

d) <u>Actividad para el alumno</u>: analice el conjunto núcleo e imagen de T en el ítem b)

Ejercicio 2: Sea la transformación lineal T: $IR^4 \rightarrow IR^5$ cuya matriz asociada estándar en la matriz de coeficientes del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5x_4 = w_1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = w_2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_4 = w_3 \\ -2x_3 = w_4 \end{cases}$$

a) Escriba la matriz estándar para T.
b) Exprese la transformación lineal en forma matricial.
c) Halle la imagen que la TL T le asigna a u = (3, 0, -1, -2).
d) Actividad para el alumno: demuestre que el conjunto imagen de T es un sub espacio de IR^5

Ejercicio 3: Dado el operador lineal en IR^{2x2}, T(A) = A+A^T, calcular T(A), siendo A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ utilizando la matriz asociada a T.

Ejercicio 4: Anote la matriz asociada al operador lineal en IR^2, cizalladura a lo largo del eje x con k=1, respecto de la base B = {(1, -1), (2, 2)} para el dominio y codominio.
Sea T: $P_2 \rightarrow P_1$/ T($a_0 + a_1 x + a_2 x^2$) = $a_1 + a_2 x$. Encuentre T(3 – 2x + 4 x^2). Encuentre la matriz asociada a T, estándar. <u>Actividad para el alumno</u>: determine si T es un isomorfismo.

Ejercicio 5: <u>Actividad para el alumno</u>: Encuentre la matriz asociada al operador lineal rotación, en IR^2, en sentido anti horario, con un ángulo de 45°, seguida de una reflexión respecto del eje x. Utilizando la matriz hallada, mapee el triángulo cuyos vértices son (0, 2) y (1, -1), (4, 2). Grafique.

Ejercicio 6: Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal identidad en IR^2, respecto de las siguientes bases:

a) B = {(-1, 1), (0, -2)} en el dominio y B´= {(1, 0), (0, 1)} en el codominio. Nombrarla P.

b) B´= {(1, 0), (0, 1)} en el dominio y B = {(-1, 1), (0, -2)} en el codominio. Nombrarla Q.

c) ¿Qué representan las matrices P y Q? ¿Qué relación existe entre ellas?

Ejercicio 7: Dada T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que T ((x, y)) = (-2y, x+y).

a) Encuentre la matriz A, asociada a T, en base B= {(1, 0), (0, 1)} en el dominio y en el codominio.
b) Encuentre la matriz M, asociada a T, en base B= {(-1, 1), (2, 0)} en el dominio y en el codominio.
c) Pruebe que las matrices A y M son semejantes.

Ejercicio 8: Encuentre el transformado del vector v = (2, -2)

a) usando la matriz A del ejercicio 5(camino directo)

b) usando la matriz M del ejercicio 5. (camino indirecto)

Ejercicio 9: Dada la transformación lineal $T: IR^2 \rightarrow IR^3 / T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix}$. Encuentre la matriz asociada a T, respecto de las bases $B = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ y $B' = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y Calcule $T(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ y corrobore utilizando la matriz asociada.

Ejercicio 10: Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y la base B´= { $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$en el codominio.

a) Encuentre la ley de transformación T(x) (en la base canónica).
b) Halle $[u]_B$ siendo u = (-2, 1, 4)

Ejercicio 11: Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base B={$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$} en el dominio y $B' = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el codominio. Hallar la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases C = ={$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$} y C´=$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y codominio respectivamente.

Ejercicio 12: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y la base canónica en el codominio. Encuentre la ley de transformación T(X) en la base canónica.

Ejercicio 13: Demuestre las siguientes proposiciones:

a) Si A y B son matrices de orden nxn semejantes asociadas a una TL, entonces sus trazas son iguales.
b) Si A y B son matrices semejantes de orden nxn, entonces A y B tienen los mismos valores característicos.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

DIAGONALIZACIÓN

Ejercicio 1: Para la siguiente matriz, determine si los vectores dados son vectores característicos, en caso afirmativo, obtener el valor característico asociado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Empleando la interpretación geométrica halle analíticamente los espacios propios de las siguientes matrices e interprete geométricamente dichos espacios.

a) Sea T: $IR^3 \longrightarrow IR^3$ la transformación lineal "proyección ortogonal sobre el plano xy".

b) Sea C la matriz asociada estándar al operador lineal en $IR^{2,}$ deslizamiento cortante en dirección y, con factor $-\frac{1}{2}$. Escriba otra matriz semejante a C

Ejercicio 3: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Encuentre los espacios característicos y determine su dimensión. Grafique e interprete geométricamente los espacios propios. Determine una matriz semejante a A. (Actividad de integración para el alumno: demuestre que el/los espacios característicos, son subespacios de IR^3, con la suma y producto usual)

Ejercicio 4: Sea T el operador lineal cero en IR^2. Escriba el esquema de la transformación lineal. Encuentre los valores, vectores y espacios característicos de la matriz asociada a la transformación. La matriz asociada a la transformación ¿es diagonalizable? (Actividad de integración para el alumno: analice el conjunto núcleo e imagen de la T.L.)

Ejercicio 5: Sea B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Determine si la matriz B es diagonalizable y justifique (Actividad de integración para el alumno: interprete geométricamente los espacios característicos.)

<u>**Corrobore**</u> con una aplicación los valores y vectores característicos.

Ejercicio 6: Si los pares de valores y vectores característicos de una matriz A, son:

$(0, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}), (7, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}).$

a) Escriba la ley de la transformación cuya matriz asociada es A.

b) Determine los sub espacios característicos

Ejercicio 7: Sea P(λ) el polinomio característico de A, $P(\lambda) = (\lambda+2)\ \lambda^2\ (\lambda- 3)$.

a) El orden de A es………

b) ¿Qué puede asegurar acerca de $\det(A - 3I)$?..

c) Los valores característicos de B = 2A son ………………………………………………………………………………….

d) Los valores característicos de A^T son……………………………………………………………………………………

e) det (A^t - 2I) es…….

f) Si M es una matriz semejante a A, entonces los valores característicos de M son………………………

g) ¿A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores característicos de A^{-1} son ……….

h) Para que A sea diagonalizable, debe verificarse…………………………………………………………….

i) ¿A es diagonalizable? Justifique su respuesta…………………………………………………………………………

j) Los valores característicos de A^4 son………………………………………………………………………….

Ejercicio 8: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique

a) Los vectores columna de una matriz P que diagonaliza a una matriz A, son vectores linealmente independientes.

b) Siendo A, P y D de orden nxn Si $P^{-1} A P = D$, entonces $A^3 = P^3 D^3 (P^{-1})^3$.

c) Siendo p: “A es simétrica” y q: “ A es diagonalizable ortogonalmente”. $(p \Rightarrow q \vee q \Rightarrow p)$.

d) Si A es una matriz inversible y ortogonalmente diagonalizable, entonces A^{-1} es ortogonalmente diagonalizable.

Ejercicio Nº 9: Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) Siendo A y C semejantes y $\lambda = 3$ es valor característico de una matriz C de 2x2, entonces ………………………es un valor característico de la matriz $(\frac{1}{5}A^2)^{-1}$

b) Sea A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Entonces la solución de la ecuación característica es

$\lambda = \frac{1}{2}[(\dots\dots..) \underline{+} \sqrt{(\dots)^2 + \dots}]$

c) Asigne valores a los elementos de A para que tenga valores característicos reales distintos y valores característicos iguales.

Ejercicio Nº 10: Demuestre que:

a) La transformación semejanza T: M_{nxn} en M_{nxn} T(A) = C^{-1}.A.C es una transformación lineal, C matriz fija de orden nxn.

b) Si u y v son vectores propios de la matriz A, asociados al valor propio λ, entonces $\alpha u + \beta v \neq 0$ es vector propio de A asociado a λ.

.

TRABAJO PRÁCTICO N°8

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1:

1.1) Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\frac{(-2+3i)}{(2+i).i} =$

b) $Re[(2-4i).(1+i)] =$

c) $Im\{[(-i).(-4+4i)]+(-3+2i)\} =$

d) $\frac{(2-2i)^2}{(2-i).(2+i)} =$

e) $\frac{\overline{(-1+i)}}{i} + Re[(-2-7i).(-i)] =$

f) $[\overline{(4-2i)} + (-1+i)^2] - \frac{(2-3i)}{-2i} =$

g) $\{(4+7i)/(1-i) + Im[(-2i+4).2i]\}.\frac{1}{i} =$

1.2) Represente gráficamente los números complejos obtenidos en los incisos (a), (c) y (f); sus opuestos y sus conjugados.

Ejercicio 2: Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

a) El módulo de z = $\frac{(2-i).\overline{(4-3i)}}{i^{26}}$ es ....

b) El argumento de z = $\frac{(8-4i)-(2-i)^2}{i^{15}+3i^{30}} + \frac{3\,i}{6i}$ es……… ……………………………………………………………………..

c) La forma binómica del complejo dado en coordenadas polares z= $(2,\frac{3\pi}{4})$ es.............................

d) Sea z un número complejo del segundo cuadrante tal que su módulo es igual a 2 y Re(z) = -1. Exprese z en forma trigonométrica……………………………..y en forma exponencial…………………………………………………………

e) El siguiente complejo z = $e^{\frac{\pi}{2}}.e^{5i}$ esta expresado en forma ………..............., su módulo es………………y su argumento…………………

Ejercicio 3: Encuentre:

a) La tercer potencia del número complejo z=1-i. Exprese el resultado en forma binómica y exponencial.

b) Las raíces cuartas del complejo z = 16 (cos π + i sen π). Grafique.

c) El logaritmo de z= $-e^{\frac{\pi}{2}i}$ y represente gráficamente.

d) Las raíces cúbicas de -8

e) El logaritmo principal del complejo z = $(1, -\sqrt{3})$ dado en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 4: Exprese en coordenadas polares los siguientes complejos:

a) $\omega = (\sqrt{3} + i)^{-i}$
b) $\omega = (-1)^{\pi-2i}$
c) $\omega = i^{i+\pi}$

Ejercicio 5: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$

a) Halle, de ser posible, la inversa de la matriz A. Justifique.

b) Analice el sistema de ecuaciones lineales A.X = B, B = $\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$, y si es posible, encuentre el conjunto solución.

Ejercicio 6: Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) bicuadradas:

a.1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

a.2) $9(x - 1)^4 - 13\,(x - 1)^2 + 4 = 0$

a.3) $2(x + 3)^4 + 3(x + 3)^2 - 5 = 0$

b) binómicas:

b.1) $- 4x^5 - 32x^2 = 0$

b.2) $9x^8 - x^4 = 0$

b.3) $2\,x^9 - 64\,x^4 = 0$

c) trinómicas:

c.1) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

c.2) $8x^6 + 15\,x^3 - 2 = 0$

c.3) $x^8 - 26\,x^4 + 25 = 0$

d) recíprocas de 3[er] grado:

d.1) $3/2\ x^3 + 13/2\ x^2 + 13/2\ x + 3/2 = 0$

d.2) $7x^3 – 4x^2 – 4x +7 = 0$

d.3) $-10\ x^3 + 15x^2 – 15\ x + 10 = 0$

e) recíprocas de 4º grado:

e.1) $x^4 + 5x^3 + 6\ x^2 + 5x + 1 = 0$

e.2) $18\ x^4 + 21\ x^3 – 94\ x^2 + 21\ x + 18 = 0$

e.3) $3\ x^4 - 2\ x^3 – 34x^2 - 2\ x + 3 = 0$

Ejercicio 7: Determine gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones

$$a)\begin{cases} 4x + y > 3 \\ -1 < Im(z) < 1 \\ -1 \leq Re(z) \leq 5 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} -2x + y \ \geq 3 \\ x \ \geq 0 \\ y \ \leq -1 + x \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} |x| > 1 \\ |z| \leq 2 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 9

ÁLGEBRA COMBINATORIA

Ejercicio 1: Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $C_{n,6} = 7 . C_{n,4}$

b) $3 . V_{n,4} = V_{n-1,5}$

c) $7 . V_{m,4} = 84 . C_{m,2}$

d) La diferencia entre el número de variaciones de n objetos tomados de a dos y el número de combinaciones de esos mismos objetos tomados también de a dos es 21. ¿Cuántos objetos hay?

e) $C_{4,n+1} = C_{5,n+2}$

f) $\frac{P_{2n+1}}{P_{2n-1}} = 96 - P_3 . V_{n,1}$

Ejercicio 2: Analice cada situación y resuelva

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar tres chicas y dos chicos en una fila de butacas de un cine teniendo en cuenta que no pueden estar dos chicos juntos ni dos chicas juntas?

b) En una pastelería se vende 4 tipos de pasteles: de crema, chocolate, naranja y selva negra.

b.1) ¿De cuántas formas diferentes se puede comprar 15 de estos pasteles?

b.2) ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse si se incluyen por lo menos ocho pasteles de selva negra?

c) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 libros diferentes en un estante si:

c.1) es posible cualquier ordenación?

c.2) 3 libros determinados deben estar juntos?

c.3) dos libros determinados deben ocupar los extremos?

c.4) tres libros son iguales entre sí?

d) ¿De cuántas formas se puede distribuir 11 canicas blancas idénticas en 4 recipientes diferentes?

e) Debemos ubicar a 3 personas de un grupo de 7 (Luis, Ana, Juan, Ely, Luz, Cris y Tavo) en 3 asientos: pasillo, centro o ventanilla.

e.1) ¿De cuántas maneras pueden elegirse las 3 personas?

e.2) ¿En cuántas de ellas está Ely en la primera posición (pasillo)?

e.3) ¿En cuántas de ellas está Ely en la 1ra posición (pasillo) y a Luis en la 3ra (ventanilla)?

e.4) ¿En cuántas estarán Ana o Cris?

f) Del grupo de 7 personas anterior debemos organizar comisiones de 3 personas. En los grupos no hay jerarquía, de tal forma que todas desempeñan la misma labor.

f.1) ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

f.2) ¿En cuántas de ellas participa Luz?

f.3) ¿En cuántas participan Juan y Tavo?

g) ¿Cuántas secuencias de 4 letras, 2 vocales y 2 consonantes (pudiendo repetirse), pueden formarse disponiendo de 5 vocales y 4 consonantes? No debe haber dos vocales seguidas.

h) Dada la palabra CATARATAS,

h.1) ¿De cuántas maneras se pueden reordenar las letras?

h.2) La misma situación, pero condicionada a que la S sea la primera y la T la última.

h.3) La misma situación, pero las letras TA, deben permanecer juntas en ese orden.

i) Con los números 2, 5, 7 y 9:

i.1) ¿Cuántos números de tres cifras puedes formar?

i.2) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?

i.3) ¿Cuántos de los números del apartado anterior son pares?

i.4) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?

i.5) ¿Cuántos números mayores que 5000 y menores que 9000 se pueden armar?

j) Tres atletas compiten en una carrera. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta?

k) El sistema Braille se basa en agrupaciones de puntos y rayas. ¿Cuántas agrupaciones que tengan como máximo cinco símbolos pueden realizar?

l) Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron a la reunión?

m) Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:

m.1) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.

m.2) Una mujer determinada debe pertenecer al comité.

m.3) Dos hombres determinados no pueden estar juntos en el comité.

n) El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencia de dígitos formados por unos y ceros. Si un byte es una secuencia de 8 de estos dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se pueden formar? ¿ y cuántas de esas cadenas comienzan con 1100?

Ejercicio 3: En el desarrollo de $(2y - \frac{3}{2y^2})^8$**,** determine:

a) El o los término/s central/es**.** b) el término cuadrático.

Ejercicio 4: Halle el exponente n de $(x + 2)^n$ sabiendo que $T_6 = x\, T_7$**.**

Ejercicio 5: Desarrolle $(x^2 - 2x)^{1/4}$ hasta el 3º término.

Ejercicio 6*:* Halle el exponente del binomio $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ si el quinto término es el término independiente.

Ejercicio 7: Determine el valor de a en el binomio $\left(\frac{x}{a} - y^2\right)^{15}$, sabiendo que el término que contiene a y^{22} presenta coeficiente numérico $-\frac{455}{27}$.

Ejercicio 8: Encuentre, de ser posible:

a) Los términos centrales y el término de grado 12 en el binomio $(2 + \frac{x}{4})^{15}$.

b) El término que contiene x^3y^4 en $(2x - y)^{12}$**.**

c) El valor del término que contiene a x^6y^{18} en $(x + y^2)^{15}$.

Ejercicio 9: Desarrolle hasta el cuarto término el binomio $(1 + x^2)^{-3}$.