UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA

GUÍA DE TRABAJOS PRACTICOS

Prof. Titular: NARVÁEZ, Ana María
Prof. Asociado: VEGA, Noemí
Prof. Adjunto: TOMAZELLI, Gabriela
JTP: BERNALDO DE QUIRÓS, Carolina
BOITEUX, Yanina
PANELLA, Eugenia
RUEDA. Analía

2022

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

LÓGICA PROPOSICIONAL

Ejercicio 1: Sean p, q, r y s las siguientes proposiciones

p: “terminaré mi programa de computación”

q: “está lloviendo”

r: “jugaré al básquet”

s: “iré al cine”

Escriba los siguientes enunciados en forma simbólica utilizando los conectivos adecuados:

a) Ni terminaré mi programa de computación ni jugaré al básquet.

b) Sólo si está lloviendo, iré al cine.

c) Jugaré al básquet esté lloviendo o no.

d) Iré al cine o, terminaré mi programa de computación y jugaré al básquet.

e) No es cierto que está lloviendo.

f) Jugaré al básquet o iré al cine, mas no haré ambas actividades.

Ejercicio 2[*1]: Dadas las siguientes frases en lenguaje natural, formalícelas como fórmulas del cálculo proposicional y seleccione entre las opciones dadas, la correcta.

a) Un país va bien si y solo si hay crecimiento económico y no hay inflación.

1. $p \leftrightarrow (q \wedge r)$
2. $[\, p \rightarrow (q \wedge - r)] \wedge [(q \wedge - r) \rightarrow p\,]$
3. $p \rightarrow (q \wedge - r)$
4. $[(q \wedge r) \rightarrow p\,] \wedge [\, p \rightarrow (q \wedge r)]$

b) En Argentina hay inflación y no hay crecimiento económico, por lo tanto, Argentina no va bien

1. $(s \wedge - t) \rightarrow -n$
2. $-n \rightarrow s \wedge - t$
3. (s ∧ t) → n
4. s → - n

Ejercicio 3: Confeccione la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas e indique si son tautologías, contradicciones o contingencias.

1) $-p \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

2) $q \Leftrightarrow (-p \vee -q)$

3) $(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

4) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

5) $p \Rightarrow (q \vee -r) \Leftrightarrow p \wedge -q \wedge r$

---

[1] *Trabajo Práctico Licenciatura en Ciencias de la computación-UNICEN.*

6) $(p \veebar q) \wedge (p \Rightarrow -q)$

Ejercicio 4: Complete la siguiente tabla indicando el valor de verdad solicitado:

$(-p \wedge q) \wedge -r$ es V	p es	q es	r es ....
p ⇒ p ∧ r es F	p es	r es	$-(q \vee p)$ es .....
$p \Rightarrow [(-r \veebar q) \vee q]$ es F	p es	q es	$-q \Rightarrow -r$ es ....
$[(p \wedge -r) \Rightarrow p] \Rightarrow (p \veebar q)$ es F	q es	$-p \veebar -q$ es	p ⇔ q es..........

Ejercicio 5: Las siguientes proposiciones son todas equivalentes entre sí. Dibuje el circuito lógico correspondiente a la proposición inicial, justifique los pasos que permiten llegar desde la primera proposición a la última y dibuje el circuito lógico simplificado.

[(p ∨ q) ∧ (p ∨ - q)] ∨ q

[p ∨ (q ∧ - q)] ∨ q

(p ∨ c) ∨ q

p ∨ q

Ejercicio 6: Simplifique las siguientes proposiciones, indicando las leyes lógicas utilizadas. Realice el circuito lógico simplificado de los ítem pares

1) $[-(-p \vee q) \vee q] \vee p \Leftrightarrow (q \vee p)$

2) $[(p \Rightarrow p) \vee q] \wedge [-q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \Rightarrow (p \vee -q)]$

3) $-\{-[(p \vee q) \wedge r] \vee -q\}$

4) $(p \Rightarrow q) \wedge [q \wedge (r \vee q)]$

5) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge -p)]$

Ejercicio 7: Determine el valor de verdad de— las siguientes proposiciones. Justifique.

a) Si p ⇒ q es falsa, podemos afirmar que - p ⇒ t ∨ q es verdadera.

b) Si p ⇒ q es verdadera, podemos afirmar que - p ⇒ t ∨ q es verdadera.

Ejercicio 8: Dados los siguientes enunciados de teoremas, exprese su enunciado contrarrecíproco.

a) Si f es una función derivable entonces f es continua.

b) Si T : V → W es una transformación lineal entonces $T(0_v) = 0_w$.

c) Si el determinante de A es cero entonces A no es inversible.

Ejercicio 9: Complete las siguientes proposiciones:

a) La negación de ∃ x/ [Q(x) ⇒ P(x) ∧ − R(x)] es ....

b) La negación de ∀ x: − [P(x) ∨ Q(x) ⇒ − R(x)] es ....

c) La negación de ∃ x/ [P(x) ⇔ R(x)] es ....

Ejercicio 10: Exprese las siguientes proposiciones usando conectivos y cuantificadores y escriba la negación de los mismos:

a) Todos números naturales son pares mayores que 8

b) Existe algún valor real de x que verifica que $x^2 = -1$.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

MATRICES

Ejercicio 1: Determine la matriz e identifique, si es posible, según sus características.

a) La matriz A= $[a_{ij}]$ $de\ orden\ 3x2$, donde $\begin{cases} a_{ij} = 1\ para\ todo\ i = j\,. \\ a_{ij} = i - j\ para\ todo\ i\ \neq j. \end{cases}$

b) La matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4x4, donde $\begin{cases} a_{ij} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+j} & si\ \ i\ \leq j \\ a_{ij} =\ 0 & si\ i\ >\ j \end{cases}$

c) La matriz $A = [a_{ij}]$ $de\ orden\ 3x3$, donde $\begin{cases} a_{ij} = 0 & si \quad i = j \\ a_{ij} = -3 & si \quad i\ >\ j \\ a_{ij} = 3 & si \quad i\ <\ j \end{cases}$

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Realice las operaciones propuestas siempre que sean posibles, y en caso de no serlo, justifique. Identifique combinaciones lineales en espacios vectoriales correspondientes.

a) D + F

b) C – 2E

c) A+ (1/2) B

d) - 2A + B^T

e) A. B

f) D.F y F.D

g) – B. A + I_{3x3}

h) $(- C)^2$

i) $[(A^T + B)^{T.} F] - 2B$

Verifique el ítem f) realizando el cálculo en https://matrixcalc.org/es/ u otro calculador o bien usando la app Mathway para celulares. Concluya.

Ejercicio 3: En las siguientes ecuaciones matriciales, todas las matrices que aparecen son cuadradas de orden n e invertibles, resuélvalas aplicando propiedades para obtener la expresión de la matriz X.

a) X. B = C – A

b) B. $(X + 2A)^T = B^2$

c) A^2. X = A^2 + B

d) 2(A + B – X) = 4(X + A)

e) C^{-1}(A+ X) B^{-1} = I

f) $(X.\ B^{-1})^{-1} = (A^{-1}.\ B^2)^{-1}.\ A$

Ejercicio 4: Dadas las siguientes matrices, determine cuáles son matrices elementales e indique para ellas la operación elemental que le dio origen.

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 5: Dada la matriz elemental E y siendo A una matriz genérica de orden 3x3, resuelva los productos E.A y A.E y exprese verbalmente que efecto producen sobre la matriz A, cada uno de dichos productos.

$$E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 6: Dadas las siguientes matrices:

a) Determine cuáles están expresadas en forma escalonada por filas, en forma escalonada reducida o ninguna de ellas.

b) Para cada una de ellas, determine el rango e indique si son invertibles o no.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad H=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 7: Exprese las siguientes matrices en forma escalonada reducida.

a) $\begin{bmatrix}1&1\\3&0\\1&3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2&-2&0&1\\1&2&2&3\\0&1&-1&2\end{bmatrix}$

Ejercicio 8: Complete de manera que las siguientes proposiciones resulten verdaderas.

a) El/los valor/es de a y b para que la matriz $\begin{bmatrix}1&-b&-2\\0&0&a+3\end{bmatrix}$ tenga rango igual a dos es/son ……………..

b) El/los valor/es de a y b para que la matriz $\begin{bmatrix}1&-3&0&0\\0&0&b&0\\0&a+2&0&b\end{bmatrix}$ tenga rango igual a uno es/son …………

c) El/los valor/es de k para que la matriz $\begin{bmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sea de rango menor a tres es/son ……………..

Ejercicio 9: Determine el rango de las siguientes matrices y calcule su inversa, si es posible.

A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Aplicando propiedades, resuelva:

a) Si se conoce $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a.1) $(2.\ A)^{-1}$ a.2) $(A^2)^{-1}$ a.3) $(A^T)^{-1}$

b) Si la transpuesta de 2B es $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule la inversa de B

c) Utilizando las matrices A y B de los incisos anteriores resuelva:

c.1) $(A.B)^{-1}$ c.2) $(A^T + B^T)^T$

Ejercicio 11: Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Argumente sus respuestas.

a) Si A es una matriz simétrica no nula entonces admite matriz inversa.
b) Las matrices inversibles de orden nxn determinan un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden nxn.
c) El producto de dos matrices elementales es siempre una matriz elemental.
d) Si A y B son matrices cuadradas de orden 2x2 y A. B= **0,** entonces A o B es la matriz nula.
e) Las matrices escalares de orden nxn determinan un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden nxn.

Ejercicio 12: Demuestre:

a) Si A y B son matrices inversibles de orden nxn, entonces A.B es inversible y $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Si A es una matriz inversible de orden nxn y k un escalar real no nulo entonces k A es inversible y $(k\,A)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

c) Si A es una matriz de orden nxn inversible y m es un entero positivo entonces A^m es inversible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

d) Si A es una matriz inversible de orden nxn entonces A^T es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) Si A es una matriz de mxn, entonces $A.A^T$ es una matriz simétrica.

Ejercicio 13: Escriba matricialmente la ecuación de una circunferencia y de un círculo de radio 2.

Ejercicio 14: Sea S = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$incluido en el espacio vectorial de las matrices R^{2x2} con las operaciones usuales.

a) Determine si S es LI o LD.

b) ¿Qué espacio vectorial genera S?

c) ¿Es posible completar S de manera que siga siendo LI? En caso afirmativo, ¿qué espacio vectorial se generaría?

<u>Ejercicio de aplicación (resuelto)</u>:

Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea M la matriz de ventas de enero:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

a) Interpretar la matriz M, explicando cómo han sido las ventas.

La matriz M representa las ventas de enero, donde cada columna representa a los 3 artículos producidos por la fábrica y cada fila a un cliente distinto. Así tenemos:

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \end{array}$$

De acuerdo a esto interpretamos que, durante el mes de enero, el cliente C1 compró 9 artículos del primer tipo, 5 del segundo y 2 del tercero. El segundo cliente compró 3 artículos del primer tipo, 8 del segundo y ninguno del tercero. Observamos que el tercer cliente, durante el mes de enero, no compró ningún artículo y el cuarto cliente compró 6 artículos del primer tipo, 7 del segundo y 1 del tercero.

b) Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero.

Siguiendo el mismo criterio anterior, para armar la matriz B correspondiente a las ventas del mes de febrero. Es decir, la primera columna de B representa a la cantidad de artículos del primer tipo, la segunda columna, cantidad de artículos del segundo tipo y tercera columna, cantidad de artículos del tercer tipo. Mientras que cada fila corresponde a un cliente distinto: C_1, C_2, C_3 y C_4. Así, obtenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero.

Para hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero, debemos sumar las ventas del mes de enero y las ventas del mes de febrero, es decir debemos hallar M + B:

$$M+B=\begin{bmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&2&3\\6&6&6\\4&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&7&5\\9&14&6\\4&0&0\\6&7&1\end{bmatrix}$$

d) Hallar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

Para determinar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero, debemos hallar B – M:

$$B-M=\begin{bmatrix}5&2&3\\6&6&6\\4&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3&1\\3&-2&6\\4&0&0\\-6&-7&-1\end{bmatrix}$$

Esto indica que el primer cliente, en el mes de febrero, compró 4 artículos del primer tipo menos que en el mes de enero, tres artículos menos del segundo tipo y un artículo más del tercer tipo. El segundo cliente, en el mes de febrero, compró tres artículos más del primer tipo que en el mes de enero, dos artículos menos del segundo tipo y seis más del tercer tipo. El tercer cliente, compró 4 artículos más del primer tipo en febrero respecto a enero y no compró en ninguno de estos meses artículos del segundo y tercer tipo. El cuarto cliente, en febrero respecto a enero, compró 6 artículos menos del primer tipo, 7 menos del segundo tipo y uno menos del tercer tipo.

e) ¿Cuál sería la matriz de ventas del mes que la fábrica se toma vacaciones?

En el mes que la fábrica se toma vacaciones, no se producen ventas y en consecuencia la matriz que representa las ventas durante el mes de vacaciones, es la matriz nula:

$$0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

f) Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo. ¿Cuál habrá sido el total de ventas en el primer cuatrimestre?

Para responder a esta última pregunta, debemos determinar, en primer lugar, las matrices C y D que representan las ventas de los meses de marzo y abril, respectivamente:

$$C=2M=2.\begin{bmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&1\end{bmatrix}=.\begin{bmatrix}18&10&4\\6&16&0\\0&0&0\\12&14&2\end{bmatrix}$$

$$D=4.C=4.\begin{bmatrix}18&10&4\\6&16&0\\0&0&0\\12&14&2\end{bmatrix}=.\begin{bmatrix}72&40&16\\24&64&0\\0&0&0\\48&56&8\end{bmatrix}$$

Luego el total de ventas del cuatrimestre, lo obtenemos resolviendo:

$$M+B+C+D=\begin{bmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&2&3\\6&6&6\\4&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}18&10&4\\6&16&0\\0&0&0\\12&14&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}72&40&16\\24&64&0\\0&0&0\\48&56&8\end{bmatrix}$$

<u>Total de ventas</u> = $\begin{bmatrix} 104 & 57 & 25 \\ 39 & 94 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 66 & 77 & 11 \end{bmatrix}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

DETERMINANTES

Ejercicio 1: Dados los siguientes productos elementales, complete los subíndices faltantes, determine su signo, indique el orden de la matriz de la cual se obtuvieron y la cantidad total de productos elementales que tiene dicha matriz.

a) $a_{21}.\ a_{44}\ .a_{13}.\ a_{\dots\dots}$ b) $a_{26}.\ a_{11}.\ a_{\dots\dots}.\ a_{63}\ .a_{34}.\ a_{42}$

Ejercicio 2: Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique indicando el nombre de la propiedad aplicada.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 6 & -8 \\ 5 & -1 & 7 & -10 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$

Ejercicio 3:

- Siendo A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y det(A) = 3. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2d & 2g \\ 2b & 2e & 2h \\ 2c & 2f & 2i \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} a & 3b & -c \\ d & 3e & -f \\ g & 3h & -i \end{vmatrix} =$

- Siendo A = $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

b) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -10 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 4: Siendo A y B matrices de orden 2, A **antisimétrica con det (A)= -2**; B **ortogonal** con <u>determinante positivo</u>. Calcule si es posible:

a) det$(-2B)$= ....
b) det$\left(A^{-1} \cdot 2B^{-1}\right)$ = ...
c) det$(-A + 4A^T)$ = ...
d) det$(2.B.B^T + 4I_{2x2})$ =........
e) det$(5A - 5B.B^T)$ =........
f) det$\left(-\frac{3}{4}.(A^T + 2A)^2\right)$ =........
g) det$(B^4.B^{-1}.2B^T)$ =.........
h) det$(5A^{-1}.(-2B^{-1}))$ =........

i) $\det\left(\left(-\frac{1}{3}A.B^T - \frac{2}{3}A^T.B^{-1}\right)^{-1}\right)$ =........

Ejercicio 5: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encuentre el menor complementario y cofactor correspondiente al elemento 6 y al elemento a_{31}.

b) Evalúe el determinante de la matriz A mediante cofactores y verifique por definición.

c) Indique si la matriz A es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de A.

Ejercicio 6: Halle el determinante de la siguiente matriz utilizando la regla de Chío.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique si la matriz B es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de B.

Ejercicio 7: Calcule el determinante de las siguientes matrices. Determine cuál/es son inversibles y halle, para ellas, la inversa.

A= $\begin{bmatrix} -1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8: Encierre en un círculo la opción correcta.

a) El/los valores de λ para que la siguiente matriz sea singular es/son:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

I) $\lambda \in R - \{1,2,3\}$ II) Para todo $\lambda \in$ R III) $\lambda \in \{1,2,3\}$

IV) Ningún valor de λ V) NRAC

b) Si ½$(B^{-1})^T$ es $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\left|2B^T\right|$ es:

I) 1/8 II) 16 III) $\frac{1}{2}$ IV) $\frac{-1}{16}$ V) NRAC

Ejercicio 9: Complete las siguientes proposiciones de manera que resulten verdaderas.

a) Si $a_{25}.\ a_{pq}.\ a_{12}.\ a_{54}.\ a_{31}$ es un producto elemental de una matriz cuadrada A, entonces A es de orden ……………..; el signo de dicho producto elemental es ……………. y la cantidad total de productos elementales es ………………….

b) Si A y B son matrices cuadradas de orden 2x2, y B antisimétrica, entonces $\left|\left(2A.B^{T}\right)^{-1}\right|$ es …………………..

c) Sean p: "A_{nxn} tal que det (A)≠0" y q: "A_{nxn} es inversible". Entonces, p es condición…………….para q y q es condición……………………………para p.

d) Sean A, B, C y D matrices invertibles de orden 3x3. Si $(D^{-1}.C.B)^{T} = B^{T}.C^{T}.3.A$, entonces el det (D) es ……………………….

e) Para que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tenga rango menor a 3, el/los valor/es de k es/son ………….…………….

Ejercicio 10: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Demuestre o justifique las verdaderas y proporcione contraejemplo para las falsas.

a) Si A_{2x2} y B_{2x2}, entonces det (A + B) = det (A) + det (B) ( )

b) Si A_{nxn} es una matriz antisimétrica de orden impar, entonces det (A) = 0. ( )

c) Si det (A) = 0 entonces A tiene una fila de ceros ( )

d) El determinante del producto de una matriz de 2x1 por una de 1x2 siempre es cero. ( )

e)

f) Sean A_{nxn} y B_{nxn} matrices inversibles entonces A. B es inversible. ( )

g)

h) Si A_{nxn} es equivalente por filas a B_{nxn} entonces tienen el mismo determinante ( )

i)

j) Si A_{nxn} es una matriz ortogonal, su determinante es 1 ó – 1. ( )

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

a) Determine si los vectores (2, 1, 2, 0); (2,0, 3, 1); (3, 0, 2, 0) y (- 1, 1, 3, 1) son solución del sistema.

b) Muestre que todo vector de la forma $(3 - x_4, 0, 2 + x_4, x_4)$, donde x_4 es una variable real, es solución del sistema.

c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es $S = \{(3 - x_4, 0, 2 + x_4, x_4) \in R^4\}$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices ampliadas correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **iii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) Escriba el sistema.

b) Clasifique el sistema según el Teorema de Rouché Frobenius.

c) Determine, <u>si existen</u>, las incógnitas principales y libres.

d) Encuentre el conjunto solución.

Ejercicio 3: Analice y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -3x - z + 2y = -7 \\ 4y - 2x + 6 = 0 \\ 3z + 4x - 12 = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_4 = -4 - x_2 - 3x_3 \\ -x_3 + 3x_4 = 13 + x_1 \\ 2x_2 + 6x_3 = 2x_4 - 4x_1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 3y = 4 - z \\ -5x - 2z = -5 \end{cases}$

Ejercicio 4: Encuentre el espacio vectorial solución de los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del ejercicio anterior.

Ejercicio 5: Resuelva y responda**:** ¿Qué relación existe entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} x + 3z = 7 \\ -\dfrac{1}{2}y = 2 \\ -2x - 6z = -14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 6z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6: Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y + 6z = 1 \\ 4z = 2 + 5x \\ 0 = 3 + 6x + 4y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 = -4 + x_1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

i) Escriba el sistema en forma matricial, es decir en la forma AX = B.

ii) En los casos que sea posible, halle A^{-1} y utilice el método matricial inverso para resolver el sistema. De lo contrario resuelva por el método de Gauss-Jordan.

Ejercicio 7: Para las siguientes matrices ampliadas determine los posibles valores de *a* y *b* para que el sistema A X = B:

i) no tenga solución.

ii) tenga infinitas soluciones.

iii) tenga solución única.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & b & 4 & 5 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+1 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 0 \\ -1 & -a & b & 0 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & -4 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$

Ejercicio 8: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$, plantear el sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso para encontrar, si existe, una matriz B tal que:

a) A B_{2x1} = O (O es la matriz nula) b) A B_{2x2} = I (I es la matriz identidad)

Ejercicio 9: Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución del sistema que se obtiene para cada valor de λ.

$(A - \lambda I)\, X = 0$ siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Argumente sus respuestas**.**

a) Dadas las proposiciones *p: "A.X = B es un SCD, siendo A de orden n"* y *q: "det(A) ≠ 0"*. Se cumple que p es condición suficiente pero no necesaria para q.

b) Si la solución de un SEL de 5x4 es S = {(t + 1, - s, 1 +s, s) ϵ R^4} entonces la matriz ampliada del SEL en forma escalonada reducida es $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

c) Si A es la matriz identidad de 5x5, entonces el espacio solución del sistema AX = 0 es S = R^5.

d) Si x_1 y x_2 son solución del SEL AX = B, entonces $x_1 + x_2$ también es solución del sistema.

e) Si A es de orden nxn y el sistema AX = 0 es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema $A^T X = 0$.

f) Si AX = B es un SEL con infinitas soluciones y A es de orden 8x5, entonces el mayor rango para la matriz ampliada del sistema es 5.

g) Si AX = 0, con A de orden 3x5 y el rango de la matriz de coeficientes es 3, entonces el espacio solución del sistema tiene dos variables libres.

h) Si AX = B, donde A es de orden 7x4 y A ≠ 0, entonces el mínimo rango posible para la matriz de coeficientes del SEL es 4.

i) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado es el mismo.

Ejercicio 11: Plantee, resuelva e interprete los siguientes problemas:

a) Un fabricante produce reveladores de película de 2, 6 y 9 minutos. La fabricación de cada tonelada del revelador de 2 minutos requiere 6 minutos en la planta A y 24 minutos en la planta B. Para manufacturar cada tonelada del revelador de 6 minutos son necesarios 12 minutos en la planta A y 12 minutos en la planta B. Por último, para producir cada tonelada del revelador de 9 minutos se utilizan 12 minutos la planta A y 12 minutos la planta B. Si la planta A está disponible 10 horas al día y la planta B, 16 horas diarias, ¿cuántas toneladas de cada tipo de revelador de película pueden producirse por día de modo que las plantas operen en toda su capacidad?

b) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2

Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1, la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Dadas las siguientes funciones, determine si son transformaciones lineales.

a) $T: R^2 \to R^2 / T((x, y)) = (x^2, y)$

b) $T: R^3 \to R^2 / T((x, y, z)) = (0,0)$

c) $T: R^3 \to R^3 / T((x, y, z)) = (x - y, z, 3)$

d) T: Mmxm → Mmxm tal que T(A) = A^T + A

e) $T: R^3 \to R^2 / T((x, y, z)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

f) $T: R^3 \to R^3 / T((x, y, z)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: Para las transformaciones lineales del ejercicio 1

a) Determine N(T), encuentre una base de dicho espacio y su dimensión.

b) Determine la imagen de T, encuentre una base de dicho espacio y su dimensión.

c) Verifique los resultados obtenidos usando el teorema de la dimensión.

d) Clasifique las transformaciones lineales según sean monoformismos, endomorfismos, isomorfismos o epimorfismos.

Ejercicio 3: Indique con una cruz cuál de los elementos dados pertenecen al conjunto Imagen de las diferentes transformaciones lineales:

a) Para T: $R^3 \to R^1$ tal que T(x, y, z) = x-y+z.

__ 0 __ (2,1,0) __ (a, a + b, c)

__ $\sqrt{2}$ __ R^2 __ (m-n, m, n)

b) Para T: $P_2 \to P_2$ tal que T (a t^2+ b t + c) = (a+c) t^2 + (b+c) t.

__ t+2 __ t^2-1 __ t^2+t-a

__ bt^2+at __ t^2-t __ at^2-ct

Ejercicio 4: Para T(X)= A.X. Determine Im(T) y N(T) y encuentre una base para cada conjunto.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5: Encuentre la ley de la transformación lineal T, tal que T (1, 2, 1) = (2, 1) y T (2, 3, 1) = (5,2) y T(1,0,0) = (0,1). Luego halle T(-3, 2, 0).

Ejercicio 6: Determine el N(T) e Im(T) para el operador lineal reflexión respecto a la recta x=y en R^2.

Ejercicio 7: Complete las siguientes proposiciones: "La ley de la transformación lineal en R^2 que corresponde a una:

a) Rotación de 45° respecto del origen en sentido antihorario es T(x, y) = ……………..”

b) Proyección sobre el eje x es T(x, y) =……………….”

c) Contracción vertical de k = 1/2 es T(x,y) =………………”

Ejercicio 8: Sea S el triángulo con vértices en (1,1), (2,1), (1,4). Represente gráficamente la imagen de S bajo la transformación indicada:

a) Rotación de un ángulo de 180° respecto del origen en sentido antihorario.

b) Deslizamiento cortante en la dirección del eje Y con factor k= 2.

Ejercicio 9: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

a) Sea T la transformación lineal de R^3 en R^3 dada por T((x, y, z)) = (x – z, y + z, 2x), entonces el Núcleo de T es el conjunto {(t, t, t), t ∈ R}

b) Sea la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por: T(x, y, z) = (x + y , x – z), luego se verifica quela dimensión de N(T) es uno y la dimensión de Im(T) es dos.

c) Si T es una transformación lineal matricial T(X) = A X , siendo A una matriz fija de orden 2x2, tal que N(T) = {0} , entonces el determinante de la matriz A es 0.

d) Sea T una transformación lineal de R3 en R2 dada por T((x, y, z)) = (x+z, y+z) y A la matriz estándar asociada a T, entonces se puede afirmar que las columnas de A forman un conjunto linealmente dependiente.

e) Sea T:$P_3 \rightarrow P_2$, su matriz asociada, en cualesquiera bases, tiene dimensión 4x3.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

MATRIZ ASOCIADA

Ejercicio 1: Encuentre la representación matricial de las siguientes transformaciones lineales:

a) T: $R^2 \to R^3$ tal que T ((x, y)) = (x - 3y; - y; 2x)

b) T: $R^3 \to R$ tal que T ((x, y, z)) = - x + 2z

c) T: $R^3 \to R^3$ tal que T ((x, y, z)) = (x - z; y; - 3x)

d) T: $M_{2x2} \to M_{2x2}$ tal que T(A) = A^T

Ejercicio 2: Sea la transformación lineal T: $R^4 \to R^3$ definida por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = w_1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = w_2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = w_3 \end{cases}$$

a) Anote la matriz estándar para T.

b) Exprese la transformación lineal en forma matricial.

c) Halle la imagen de u = (-1, 0, 2, -2).

Ejercicio 3: Exprese la matriz asociada estándar de los operadores lineales:

a) Expansión a lo largo del eje y con k = 2. Halle la matriz asociada, respecto de la base B = {(1, -1), (0, 2)}.

b) Cizalladura o corte a lo largo del eje y con k = -3. Encuentre el transformado del triángulo cuyos vértices son (1, 2) y (1, -1), (4, -1). Grafique.

c) Proyección ortogonal sobre el eje x, seguida de una reflexión respecto del eje y. Encuentre el transformado del triángulo cuyos vértices son (1, 2) y (1, -1), (4, -1). Grafique.

Ejercicio 4: Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal identidad en IR^2, respecto de las siguientes bases:

a) {(-1, 0), (0, -2)} en el dominio y {(1, 0), (0, 1)} en el codominio.

b) {(1, 0), (0, 1)} en el dominio y {(-1, 0), (0, -2)} en el codominio.

c) ¿Qué representan las matrices encontradas en los puntos a y b?

d) ¿Qué relación existe entre las matrices encontradas en los incisos a y b?

Ejercicio 5: Dada T: $R^2 \to R^2$ tal que T (x, y) = (x+2y, x-y). Encuentre la matriz asociada a T:

a) Usando la base {(1, 0), (0, 1)} en el dominio y en el codominio.

b) Usando la base {(2, 1), (0, -1)} en el dominio y en el codominio.

c) Exprese la TL en forma matricial, usando las matrices obtenidas en los ítems a y b

d) Pruebe que las matrices de los ítems a y b, son semejantes.

Ejercicio 6: Encuentre el transformado del vector v = (3, -2)

a) usando la matriz encontrada en el ejercicio 5a. (camino directo)

b) usando la matriz encontrada en el ejercicio 5b. (camino indirecto)

Ejercicio 7: Dada la transformación lineal $T: R^3 \to R^2 / T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ z-y \end{pmatrix}$. Encuentre la matriz asociada a T, respecto de las bases $B = \{(-1,0,1),(0,2,1),(1,-1,0)\}$ y $B' = \{(1,-1),(0,1)\}$.

Ejercicio 8: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y la base canónica en el codominio. Encuentre la ley de transformación T(x) (en la base canónica).

Ejercicio 9: Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base B= $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y $B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el codominio. Si u = (-2, 3):

a) Halle las coordenadas del vector u en la base B.

b) Halle las coordenadas del transformado del vector u en la base B´, $[T(u)]_{B'}$.

c) Encuentre la ley de transformación

Ejercicio 10: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y $B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ en el codominio. Hallar la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases $C = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ y $D = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y codominio respectivamente.

Ejercicio 11: Demuestre las siguientes proposiciones:

a) A es la matriz (estándar) asociada a un isomorfismo sí y solo sí, A es inversible.

b) Matrices asociadas un mismo endomorfismo, son semejantes.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

DIAGONALIZACIÓN

Ejercicio 1: Para la siguiente matriz, determine si los vectores dados son vectores propios y en ese caso dar los valores propios.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Sea T: $IR^2 \longrightarrow IR^2$, el operador rotación de un ángulo α.

a) ¿Cuándo T transforma vectores u, no nulos, en vectores sobre la misma recta que u?

b) Hallar los valores y vectores propios.

Ejercicio 3: Para las siguientes matrices, encuentre, de ser posible:

a) Los valores propios.

b) Los espacios propios asociados a cada valor propio.

c) Una base y la dimensión de los espacios propios e interprete geométricamente cada caso.

d) Determine si la matriz es diagonalizable. Encuentre la matriz que diagonalice a la matriz dada.

e) Verifique que la matriz diagonal D es matriz semejante a la matriz dada.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4: Si los pares de valores y vectores propios de una matriz A, son $\left(0, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right), \left(2, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$.

a) Halle el núcleo de la transformación cuya matriz asociada A.
b) Determine el rango de la transformación.
c) Encuentre la imagen del vector u = (-1, 3)
d) Verifique las propiedades: “el det (A) es igual al producto de los valores propios de A” y “La traza de A es igual a la suma de los valores propios de A”

Ejercicio 5: Sea A una matriz de orden 3 cuyos valores propios son 2, 1 y 0. Complete o responda según corresponda:

a) ¿Qué puede asegurar acerca de $det(A - I)$?...

b) Los valores propios de B = 3A son ....

c) Los valores propios de A^T son…………………………………………………………………………………

d) det (A^t - 2I) es...

e) Si M es una matriz semejante a A, entonces sus valores propios son…………………………………………

f) ¿A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores propios de A^{-1} son ………..

g) ¿A es diagonalizable? Justifique su respuesta…………………………………………………………………………………

h) Los valores característicos de $(B + I)^{-1}$ son ……………………………………………………………………………….

Ejercicio 6: Justifique por qué la matriz B es diagonalizable ortogonalmente (sugerencia: resolver utilizando alguna aplicación)

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7: Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique

a) Sea A una matriz de orden n. Si X e Y son vectores propios asociados a λ, X +Y también es vector propio asociado a λ.

b) Si $P^{-1} A P = D$, entonces $A^2 = (P^{-1})^2 D^2 P^2$

c) $p \Rightarrow q$, siendo las proposiciones p: "A_n es diagonalizable" y q: " A es de orden n y el rango de A es n".

d) Si A es inversible entonces los valores propios de A son distintos.

e) Sea A una matriz de orden 3 cuyos valores propios son 4, 1 y -5, entonces todo sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A es compatible.

f) Si A es una matriz inversible y ortogonalmente diagonalizable, entonces A^{-1} es ortogonalmente diagonalizable.

Ejercicio Nº 8: Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) Si $\lambda = 3$ es valor propio de una matriz C_{2x2}, entonces ………………………es un valor propio de la matriz $\left(\frac{1}{4}C\right)^{-1}$

b) Si A es una matriz de orden 2x2 con traza 3 y A es no inversible, entonces sus valores propios son ……

c) Escoja el tercer renglón de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ - & - & - \end{bmatrix}$ de modo que su polinomio característico sea $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$

Ejercicio Nº 9: Demuestre que:

a) Sea A_{nxn} una matriz inversible. Si λ es un valor propio de A y u es un vector propio asociado a λ, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} y u es un vector propio asociado a $\frac{1}{\lambda}$.

b) Si λ es autovalor de A_{nxn} entonces λ^2 es autovalor de A^2.

TRABAJO PRÁCTICO N°8

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1:

1.1) Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{60}{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=$

b) (2 + i) – i. (1 – 2i) =

c) Im (2 – 5i) + (- 3 + i) (1 – 2i) =

d) (3 – 2i) (3 + 2i) – (6 – 4i) =

e) Re $\left[(-1+\mathrm{i}).\overline{(7+4\mathrm{i})}\right]=$

f) $\dfrac{5+10\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

1.2) Represente gráficamente los números complejos obtenidos en los incisos (a), (c) y (f); sus opuestos y sus conjugados.

Ejercicio 2: Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

a) El módulo de z = $\dfrac{3-\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}^{25}}$ es ....

b) El argumento de z = $\dfrac{11-3\mathrm{i}-(2-3\mathrm{i})^2}{2\mathrm{i}^{20}-\mathrm{i}^{13}}+\dfrac{4}{5\mathrm{i}}$ es..

c) La forma binómica del complejo dado en coordenadas polares z = (3, $\frac{\pi}{3}$) es igual a ....

d) Sea z un número complejo del segundo cuadrante tal que su módulo es igual a 2 y Re(z) = -1. Exprese z en forma trigonométrica……………………………..……………………………...............y en forma exponencial………

e) El siguiente complejo z = - $e^{\frac{\pi}{2}}$ esta expresado en forma ……………………………….......... su módulo es …………………………………………………..y su argumento es…………………………………………………………

Ejercicio 3: Encuentre:

a) La quinta potencia del número complejo dado en coordenadas polares z = $\left(2,\dfrac{7}{4}\pi\right)$. Exprese el resultado en forma binómica y exponencial.

b) Las raíces cuartas del complejo $z = \frac{-4}{1-\sqrt{3}i}$.

c) El logaritmo de z = 2 – 2i y represente gráficamente.

d) Las raíces cúbicas del número 8.

e) La forma exponencial del logaritmo principal del complejo z = $(-2,-2\sqrt{3})$ dado en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 4: Exprese en coordenadas polares los siguientes complejos:

a) $\omega = (-1+i)^{3i}$

b) $\omega = \left(-\sqrt{2}\right)^{2-i}$

c) $w = i^{i+\pi}$

Ejercicio 5: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$

a) Halle, de ser posible, la inversa de la matriz A. Justifique.

b) Analice el sistema de ecuaciones lineales A.X = B, B = $\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$, y si es posible, encuentre el conjunto solución.

Ejercicio 6: Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) bicuadradas:

a.1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

a.2) $9(x-1)^4 - 13(x-1)^2 + 4 = 0$

a.3) $2(x+3)^4 + 3(x+3)^2 - 5 = 0$

b) binómicas:

b.1) $-4x^5 - 32x^2 = 0$

b.2) $9x^8 - x^4 = 0$

b.3) $2x^9 - 64x^4 = 0$

c) trinómicas:

c.1) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

c.2) $8x^6 + 15x^3 - 2 = 0$

c.3) $x^8 - 26x^4 + 25 = 0$

d) recíprocas de 3er grado:

d.1) $3/2\ x^3 + 13/2\ x^2 + 13/2\ x + 3/2 = 0$

d.2) $7x^3 - 4x^2 - 4x + 7 = 0$

d.3) $-10\ x^3 + 15x^2 - 15\ x + 10 = 0$

e) recíprocas de 4º grado:

e.1) $x^4 + 5x^3 + 6\ x^2 + 5x + 1 = 0$|

e.2) $18\ x^4 + 21\ x^3 - 94\ x^2 + 21\ x + 18 = 0$

e.3) $3\ x^4 - 2\ x^3 - 34x^2 - 2\ x + 3 = 0$

Ejercicio 7: Determine gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones

$$a)\begin{cases} y < x \\ -4 < Im(z) < 1 \\ 0 \leq Re(z) \leq 5 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} |x| < 1 \\ |z| \leq 2 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 8: Coloque verdadero, V, o falso, F, según corresponda. Justifique sus respuestas

V/F	Proposición
	Las raíces de la ecuación $7x^9 + x^7 = 0$ son cero y $\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$. La primera de ellas con multiplicidad igual a siete.
	Si $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ es una solución de la ecuación $ax^3 - bx^2 + bx - a = 0$, con a y b reales, entonces las otras soluciones de la ecuación son 1 y 1 + i.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 9

ÁLGEBRA COMBINATORIA

Ejercicio 1: Encuentre lo pedido en cada ítem.

a) Calcule $C_{n,3}$ sabiendo que $V_{n,2}= 156$

b) $C_{6,x+1} = C_{7,x+2}$ Calcule el valor de x.

c) La diferencia entre el número de variaciones de n objetos tomados de a dos y el número de combinaciones de esos mismos objetos tomados también de a dos es 190. ¿Cuántos objetos hay?

d) $\frac{4}{3}V_{n+3,2} - \frac{3}{2}V_{n+2,2} = 10$ Calcular el valor de n.
(ejercicio propuesto para el alumno. Respuesta: n=10, n=3)

e) Si el número de permutaciones simples de m elementos es igual a 6 veces el número de combinaciones de m elementos tomados de a 3. Halle el valor de m.

Ejercicio 2: Analice cada situación y resuelva

a) Hay que colocar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

b) En una heladería se vende 4 sabores de helados. Dos de crema: chocolate y dulce de leche y dos tipos de agua que son: naranja y limón.

b1) ¿De cuántas formas diferentes se puede comprar 1 kilo de helados con tres de estos gustos?.

b2) ¿De cuántas formas diferentes se puede comprar 1 kilo con sólo dos gustos uno al agua y otro a la crema?

c) Con 22 consonantes y 5 vocales:

c1) ¿Cuántas agrupaciones de cinco letras se pueden formar? Considere que las letras no pueden repetirse.

c2) ¿En cuántas de las palabras del ítem c.1) la letra central es una vocal?

c3) ¿Cuántas de las palabras del ítem c.1) constan de 3 consonantes y 2 vocales?

d) En un grupo de 18 alumnos hay que formar un grupo de 6:

d1) ¿De cuántas maneras puede hacerse?

d2) ¿De cuántas maneras puede hacerse sabiendo que un alumno en particular, Juan, debe integrar el grupo?

d3) ¿De cuántas maneras puede hacerse excluyendo a Juan?

e) Con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?

e1) ¿Cuántos de esos números empiezan con 1?

e2) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

e3) ¿Cuántos son pares?

e4) ¿Cuántos son mayores que 20.000 y menores que 50.000?

e5) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar, si las cifras no se pueden repetir?

f) Dada la palabra MATEMATICA,

f1) ¿De cuántas maneras se pueden reordenar las letras?

f2) La misma situación, pero condicionada a que la A sea la primera y la E la última.

f3) La misma situación, pero las letras MAT, deben permanecer juntas en ese orden.

g) Un equipo de científicos consta de 25 miembros, de los cuales 4 son ingenieros.

g1) ¿Cuál es el número de grupos de 5 miembros que se puede formar?

g2) ¿Cuántos de estos grupos se pueden formar si se pretende que en cada grupo haya por los menos un ingeniero?

h) Tres atletas compiten en una carrera. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta?

i) Una persona que hace una fiesta, quiere poner 15 latas de refrescos surtidos para sus invitados. Compra en una tienda que vende cinco tipos diferentes de refresco.

i1) ¿Cuántas selecciones distintas de latas de 15 refrescos puede hacer?

i2) Si la cerveza es uno de los tipos de bebida ¿cuántas diferentes selecciones incluyen por lo menos doce latas de cerveza?

j) El alfabeto Morse utiliza los signos **.** y **-**. Utilizando como máximo cuatro de estos signos, ¿cuántas secuencias distintas puedes formar?

k) Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron a la reunión?

l) En un curso de 30 alumnos deben elegirse 3 puestos jerárquicos para una tarea, el gerente de una empresa, el subgerente y secretario. ¿Dé cuántas maneras podrán entregarse los cargos a los diferentes alumnos?

m) Las matrículas de los automóviles de ciertos países llevan 4 números y 3 letras. Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y las 26 letras de nuestro alfabeto. ¿Cuántas matriculas distintas se pueden hacer de esta manera?

n) El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencia de dígitos formados por unos y ceros. Si un byte es un secuencia de 8 de estos dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se pueden formar?

Ejercicio 3: En el desarrollo de $(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{x})^5$**,** determine:

a) El término de grado 4.

b) El o los término/s central/es**.**

Ejercicio 4: Desarrolle $(-2x + x^3)^{1/3}$ hasta el 4º término.

Ejercicio 5*:* Halla el exponente del binomio si el cuarto término es el término independiente $(x^2 + \frac{1}{x^2})^n$

Ejercicio 6: Determine los valores de x, que verifican que $T_3 + T_6 = 0$, sabiendo que T_3 y T_6 son términos del desarrollo de $\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^7$.

Ejercicio 7: Encuentre, empleando la fórmula del término enésimo:

a) Los términos centrales de: $(yx^5 - 4yx^2)^5$

b) El término que contiene x^6 de $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$

c) Halle el valor de T_i de $(3x^2 - \frac{2}{x^3})^{25}$,siendo el grado de T_i igual a 20.

Ejercicio 8: Encuentre el coeficiente del término que contiene x^6y^3 en $(x+y)^n$.

Ejercicio 9: Desarrolle hasta el quinto término:

a) $(1 + x^2)^{-3}$