Análisis Matemático I
Clase 1: Presentación de la Cátedra-Introducción a Funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2024

Cuerpo Docente

- Profesor Titular: Dr. Pablo Ochoa, e-mail: pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar
- Profesor Adjunto: Lic. Martin Matons
- Profesores a cargo de la práctica:
    - Ing. Paula Acosta
    - Ing. Julián Martínez
    - Lic. Verónica Nodaro
    - Dra. Dalía Bertoldi
    - Dr. Hernán Garrido
    - Lic. Julio Alejo Ruiz
    - Lic. Cecilia Fernández Gauna
- Profesora Colaboradora: Dra. Mercedes Larriqueta

Metodología

Inicio del cuatrimestre: 04 de Marzo de 2024.
Finalización del cuatrimestre: 14 de Junio de 2024.

Metodología

Inicio del cuatrimestre: 04 de Marzo de 2024.
Finalización del cuatrimestre: 14 de Junio de 2024.
Metodología de Enseñanza:
La modalidad de cursado es de carácter presencial. Las clases tienen un carácter teórico-práctico. De las 6 horas semanales, se destinarán 3 horas al dictado de las clases teórico-prácticas y 3 horas al desarrollo de actividades prácticas.
Importante: consultar frecuentemente la plataforma AulaAbierta, ahí se encuentran las comisiones, horarios de consulta y se irá subiendo el material didáctico del curso.

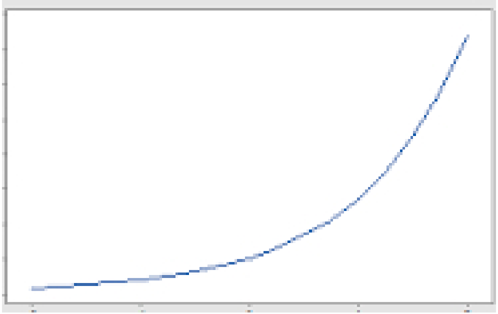
Resultados de Aprendizaje

- Analizar modelos matemáticos considerando las herramientas de límites, continuidad y derivadas para deducir propiedades geométricas, físicas y analíticas de éstos.
- Estudiar problemas geométricos y físicos del ámbito ingenieril o de computación tomando en cuenta los conceptos y propiedades del cálculo integral para su comprensión y resolución.
- Modelar situaciones concretas y aplicadas del ámbito ingenieril o de computación en lenguaje simbólico y matemático para su análisis y resolución a través del cálculo diferencial e integral.
- Expresar rigor y destreza en cálculos y argumentaciones para lograr exactitud y claridad en la comunicación de sus desarrollos teóricos y prácticos, tanto escritos como orales, a través de la resolución de problemas y comprensión de demostraciones.

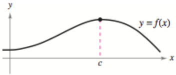
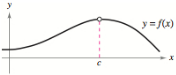
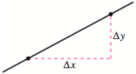
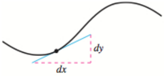
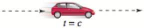
Criterios de Evaluación

- Exactitud en la expresión de definiciones, enunciados de teoremas, razonamientos en las demostraciones y en el desarrollo de cálculos.
- Coherencia en lo que se expresa en forma escrita y también oral, coherencia entre los resultados obtenidos y la interpretación de los mismos.
- Organización lógica en los razonamientos empleados en cálculos, demostraciones de teoremas e interpretación de resultados.
- Comprensión de la pertinencia de hipótesis o supuestos en los resultados dados y en las aplicaciones de la Matemática.
- Claridad en la comunicación escrita y oral de cálculos, desarrollos teóricos y lógicos, etc.

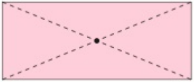
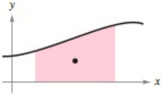
EXPECTATIVA: Curva de aprendizaje



PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

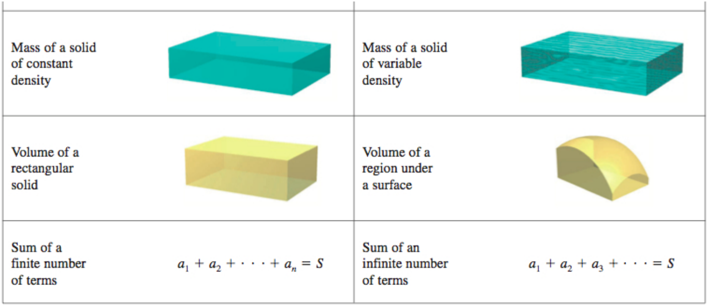
Without Calculus		With Differential Calculus	
Value of $f(x)$ when $x = c$		Limit of $f(x)$ as x approaches c	
Slope of a line		Slope of a curve	
Secant line to a curve		Tangent line to a curve	
Average rate of change between $t = a$ and $t = b$		Instantaneous rate of change at $t = c$	
Curvature of a circle		Curvature of a curve	

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Integral Calculus	
Area of a rectangle		Area under a curve	
Work done by a constant force		Work done by a variable force	
Center of a rectangle		Centroid of a region	
Length of a line segment		Length of an arc	

Presentación de la Cátedra

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:



Mass of a solid of constant density		Mass of a solid of variable density	
Volume of a rectangular solid		Volume of a region under a surface	
Sum of a finite number of terms	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Sum of an infinite number of terms	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$

Diagrama tomado de: Edwards, B. and Larson, R. Calculus of a single variable. Ed. 10. 2014.

Bibliografía

Libro principal:
Título: Cálculo: una variable.
Autor: George Thomas.
Editorial: PEARSON.
Edición: 12.
Año: 2010.

Régimen de regularidad

Durante el semestre, se tomarán 2 evaluaciones parciales para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los dos exámenes en cualquiera de sus instancias.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**
Cronograma (horarios a confirmar):

- Primer examen parcial: Lunes 8 de Abril
- Segundo examen parcial: Lunes 20 de Mayo
- Recuperatorios/ Global: Lunes 3 de Junio.

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. En todos los casos, el alumno debe traer en el examen final una carpeta con ejercicios resueltos de una guía de ejercitación. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. En todos los casos, el alumno debe traer en el examen final una carpeta con ejercicios resueltos de una guía de ejercitación. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Beneficios de alcanzar la regularidad:

- Puede cursar asignaturas en el semestre siguiente que requieran tener regular AM1.
- Para acreditar la asignatura, puede rendir un examen final escrito más breve que en el caso del alumno libre.
- En su nota final NF, se tiene en cuenta el desempeño durante el cuatrimestre:

NF=0.20 x (promedio de notas de parciales) + 0.80(nota examen final)

Acreditación de la asignatura

Importante. El alumno libre que no haya cursado la asignatura, no se inscribió al espacio, o que no haya rendido ambos exámenes parciales, quedará en condición de **abandonó**, no podrá acceder al examen final. El resto de los alumnos libres (ya sea por haber rendido, pero no aprobar los dos exámenes parciales o por pérdida de regularidad) tendrá acceso al examen final. La nota final del alumno libre será la nota obtenida en el examen final.

Clase 1

Objetivo de la clase 1:

Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Noción de función

Las funciones son objetos matemáticos muy importantes para describir el *mundo real*. Algunos ejemplos son:

- la velocidad de ejecución de un algoritmo depende de los pasos a ejecutar
- el costo de elaboración de un tanque metálico cilíndrico depende del radio o de la altura del mismo
- la fuerza ejercida sobre la pared de una presa por un líquido aumenta con la profundidad
- el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto puede depender del desplazamiento del mismo

Noción de función

Recordar que:

$$\mathbb{N} := \text{conjunto de los números naturales}$$

$$\mathbb{Z} = \text{conjunto de los números enteros}$$

$$\mathbb{Q} = \text{conjunto de los números racionales}$$

$$\mathbb{R} = \text{conjunto de los números reales}$$

Definición de función

Sea A un subconjunto de números reales. Una función f definida en A asigna a cada número x de A un único número $f(x)$.
El **dominio** de f es el conjunto A. La **imagen** de f es el conjunto de los $y \in \mathbb{R}$ tales que existe $x \in A$ que cumple

$$f(x) = y.$$

El **conjunto de llegada o codominio** de f es cualquier conjunto que contenga a la imagen de f.

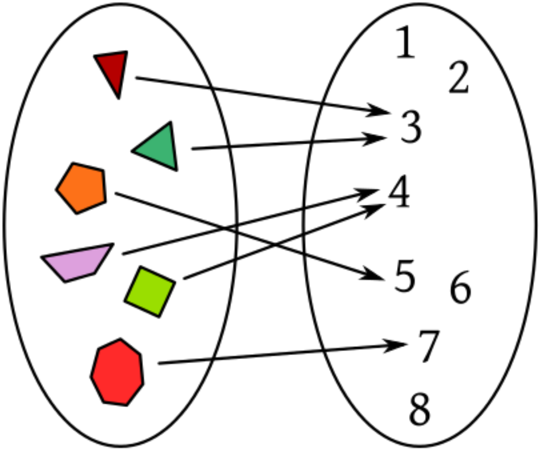
Muchas veces tomaremos simplemente como codominio a $\mathbb{R}$.

Notación: Si D es el dominio de f y C su conjunto de llegada, entonces escribimos:

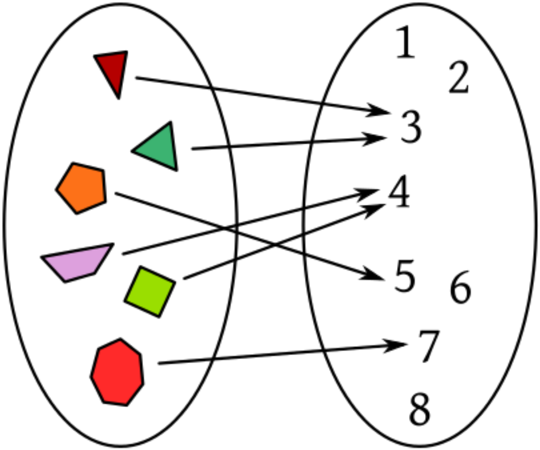
$$f : D \to C.$$

Si en una situación intervienen más de una función, por ejemplo f, g, etc., entonces distinguimos los dominios como sigue: $D(f) =$dominio de f, $D(g) =$ dominio de g, etc.

Noción de función: ejemplo



Noción de función: ejemplo



Dominio: el conjunto de las 6 figuras geométricas que se ilustran.
Imagen $= \{3, 4, 5, 7\}$.
Conjunto de llegada o codominio $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$4 - x \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$4 - x \geq 0$$

$$4 \geq x.$$

Así, el dominio de f es $D = (-\infty, 4]$.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$2 - x^2 \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$2 - x^2 \geq 0$$

$$2 \geq x^2.$$

Tomando raíces cuadradas a ambos miembros y recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, se obtiene:

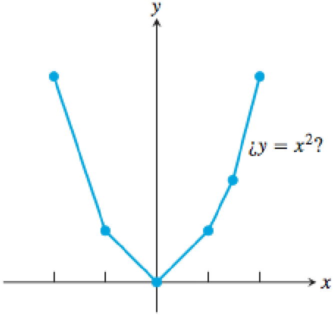
$$\sqrt{2} \geq \sqrt{x^2}$$

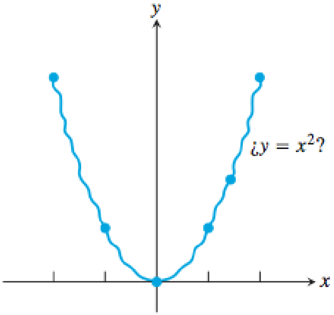
$$\sqrt{2} \geq |x|.$$

Así, el dominio de f es $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

El problema de graficar una función.

Gráfica de una función: sea $y = x^2$. ¿Exactitud en el trazado del gráfico?





El Análisis Matemático da herramientas para determinar con gran detalle el comportamiento de la gráfica de una función, facilitando así la descripción y representación de la misma.

Construcción de un modelo matemático

TABLA 1.1 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

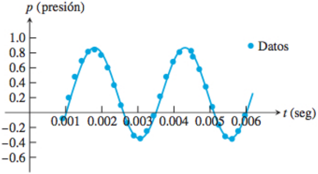
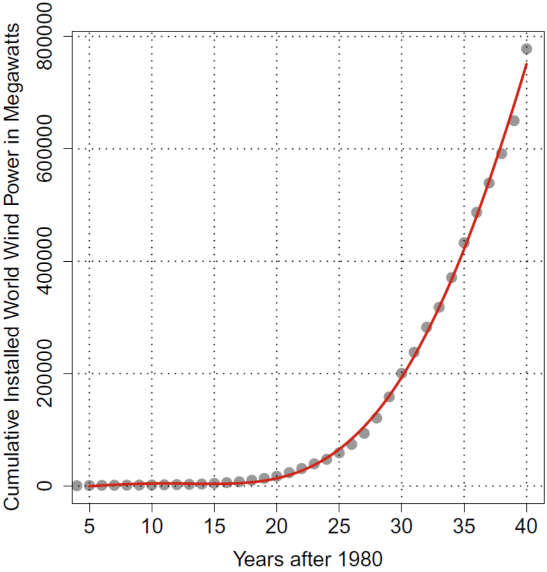
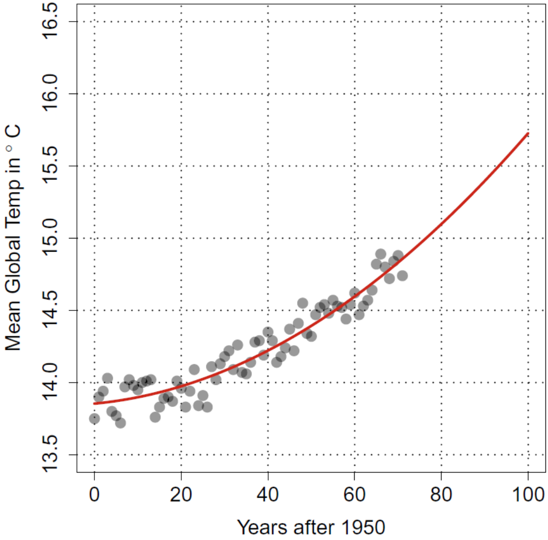


FIGURA 1.6 La curva suave que pasa por los puntos trazados según la tabla 1.1 forma una gráfica que representa a la función de presión (ejemplo 3).

Ejemplos de modelos matemáticos



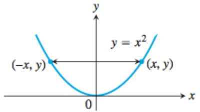
Ejemplos de modelos matemáticos



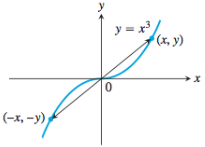
Clasificación de funciones en pares e impares

Funciones pares e impares

- Una función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f.
- Una función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f.

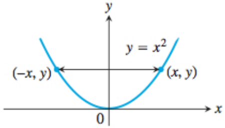


(a)

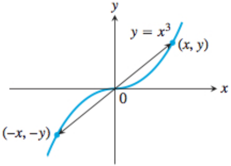


(b)

Observación: la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas



(a)



(b)

Dar otros ejemplos.

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es creciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:
$$f(x_1) \leq f(x_2).$$
- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es decreciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:
$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dar interpretación geométrica.

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

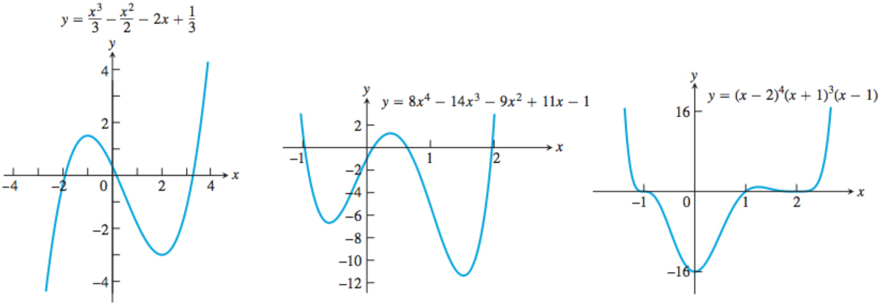
donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Funciones polinómicas

Una función polinómica es una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Ejemplos de funciones polinómicas



Observación: el gráfico de una función polinómica es *suave*, sin *picos* ni *saltos*.

Funciones racionales

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional.

Funciones racionales

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

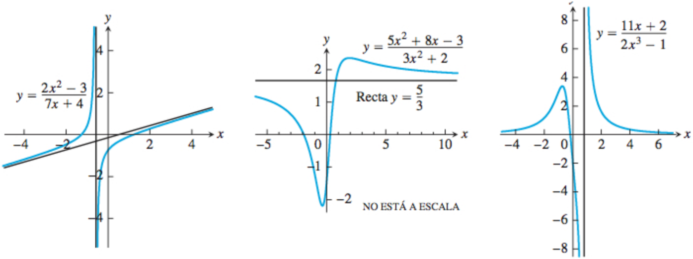
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional. Observar que el dominio D_R de R es :

$$D_R = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Funciones racionales

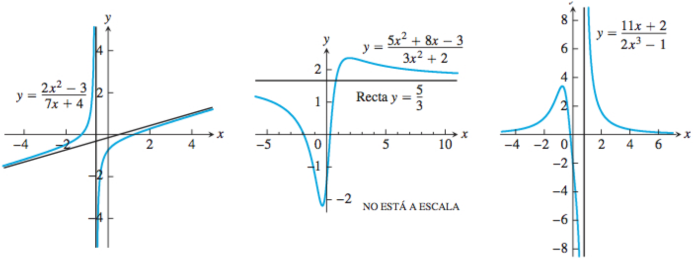
Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.

Funciones racionales

Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.
Solución: dado que f es una función racional, para determinar su dominio observamos cuándo se anula el denominador

$$7x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{7}.$$

Luego, $D(f) = (-\infty, -4/7) \cup (-4/7, +\infty)$.

Ejercicios para los 15' complementarios: encuentre el dominio de

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

y luego de

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}.$$