ECUACIONES DE MAXWELL - ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Maxwell sentó las bases del Electromagnetismo al elaborar un notable trabajo de síntesis reuniendo cuatro leyes enunciadas con anterioridad en forma independiente y, al menos hasta ese momento, aparentemente inconexas entre sí. Ellas son:.

$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\oint \overline{B} \cdot d\overline{A} = 0$$ Ley de Gauss para el campo magnético

$$\oint \overline{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \overline{E} \cdot d\overline{A} \right)$$ Ley de Ampere

$$\oint \overline{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int \overline{B} \cdot d\overline{A}$$ Ley de Faraday

Estas son las leyes en su forma completa. Hay sin embargo un caso particular, que es el que más interés práctico tiene para nosotros: cuando el análisis lo hacemos en el vacío (o en el aire, que es casi lo mismo). En esa situación, la ley de Ampere se reduce (no hay ninguna corriente de conducción I en el vacío), y queda:

$$\oint \overline{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \overline{E} \cdot d\overline{A}$$ Ley de Ampere cuando I = 0

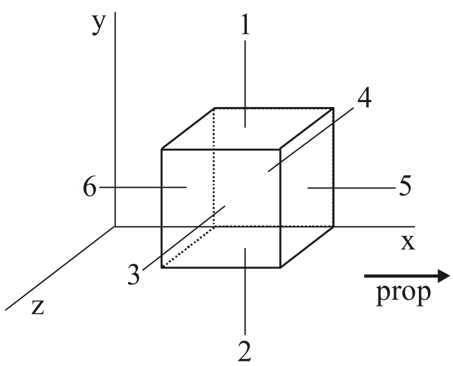
Si analizamos simultáneamente esta ecuación y la ley de Faraday, vemos que hay una muy notoria simetría entre las dos.
La ley de Faraday nos dice que si hay un campo magnético variable en el tiempo, el segundo miembro de la ecuación es distinto de cero, y por lo tanto el primero también lo será, y deberá haber un campo eléctrico (que también será variable, obviamente)
La ley de Ampere en su forma reducida nos dice exactamente lo opuesto: si hay un campo eléctrico variable en el tiempo, el segundo miembro de la ecuación será distinto de cero, y en consecuencia el primero también lo será, y deberá haber un campo magnético variable.
Tomadas las dos ecuaciones en conjunto, es evidente que hay una especie de realimentación:

B variable $\rightarrow$ E variable $\rightarrow$ B variable $\rightarrow$ E variable $\rightarrow$ .....

Esto nos sugiere que si de algún modo se provoca una perturbación, y se crea un campo variable, debido a esta interrelación entre B y E la perturbación tendería a mantenerse, aunque la fuente que la originó desapareciera. Dicho en otros términos: las ecuaciones sugieren la posibilidad de que haya una oscilación de los campos eléctrico y magnético, o sea una onda electromagnética.
Por supuesto, de existir tal onda, deberá cumplir rigurosamente todas y cada una de las ecuaciones de Maxwell.
Vamos a aceptar entonces la posibilidad de existencia de la onda, y sin hacer ninguna conjetura anticipada deduciremos que características debería tener simplemente aplicándole las ecuaciones. (Desde ya que se puede demostrar la existencia. Eso se hará en una etapa posterior)
Por simplicidad de nuestro análisis, trabajaremos con una onda plana. Si bien es un caso particular, las conclusiones que saquemos son absolutamente generales, pues si una onda electromagnética plana debe cumplir determinados requisitos para existir, cualquier onda electromagnética en cualquier circunstancia deberá cumplirlos.
Recordemos el concepto de onda plana: si nos alejamos suficientemente de la fuente emisora, el frente de onda tiende a ser un plano. Por ejemplo, la luz que llega a la superficie terrestre desde el sol podemos suponer perfectamente que tiene un frente de onda plano. Ello implica que la amplitud de la onda es la misma en cualquier punto de ese plano que constituye el frente de onda, o dicho de otro modo: si la onda se propaga en una determinada dirección, por ejemplo x, su amplitud no depende de y ni de z, solo de x, la dirección de propagación.

Tomemos entonces una onda plana que se propaga en la dirección del eje x y veamos cómo debe ser para satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

En primer lugar, apliquemos la ley de Gauss para el campo eléctrico a la superficie del cubo mostrado en la figura.



Estamos en el vacío, y no hay ninguna carga presente. Por lo tanto la ley de Gauss se reduce a:

$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{A} = 0 \qquad (1)$$

Si llamamos Φ_T al flujo a través de la superficie total y Φ_i a los flujos en cada cara, se cumplirá entonces:

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 = 0$$

Pero hemos dicho que se trata de una onda plana que se propaga en x, y por lo tanto la amplitud de su campo eléctrico no depende de la variable y. Ello significa que los campos en puntos correspondientes de las caras 1 y 2 serán iguales (sea cual sea su dirección, que hasta ahora desconocemos). En consecuencia los flujos Φ_1 y Φ_2 tendrán igual magnitud y signo opuesto (en una cara entrante y en la otra saliente), y en definitiva:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Siguiendo un razonamiento análogo con las caras 3 y 4 (el campo tampoco depende de z) podemos decir:

$$\Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

Lo cual nos lleva a concluir que:

$$\Phi_5 + \Phi_6 = 0 \qquad (2)$$

Para que se cumpla esta última relación cabrían dos posibilidades:
Una es que la amplitud de los campos en ambas caras sea la misma, esto es

$$E_5 = E_6$$

Pero esta posibilidad debemos descartarla. No es posible que el campo sea el mismo en las caras 5 y 6 pues en ese caso no habría onda (si la onda se propaga en x, forzosamente tendrá distintos valores en distintos puntos sobre el eje x, y esta igualdad se debe cumplir para todo x para el cual se evalúe el campo)
Eso nos lleva a la única alternativa posible para que se cumpla la relación (2): que el campo no tenga componente en la dirección de propagación, y de ese modo

$$\Phi_5 = \Phi_6 = 0$$

<u>CONCLUSIÓN</u>: Para que se cumpla la ley de Gauss para el campo eléctrico, éste debe ser transversal, esto es normal a la dirección de propagación

$$\boxed{\mathbf{E_x = 0}} \qquad (3)$$

<u>Cuidado</u> no confundir:

$E = f(x)$	La amplitud del campo eléctrico depende de x (dirección de propagación)
$E_x = 0$	El campo eléctrico no tiene componente en la dirección de propagación

La ley de Gauss para el campo magnético tiene exactamente la misma forma que la ecuación (1):

$$\oint \overline{B} \cdot d\overline{A} = 0$$

Podemos entonces hacer un razonamiento idéntico al realizado para el campo eléctrico, y llegaríamos a:

$$\boxed{\mathbf{B_x = 0}} \qquad (4)$$

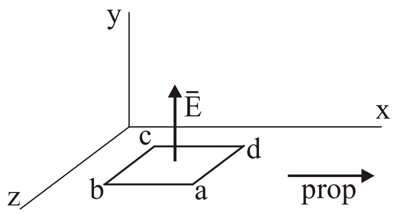
<u>CONCLUSIÓN</u>: Para que se cumpla la ley de Gauss para el campo magnético, éste debe ser transversal, esto es normal a la dirección de propagación

Vale también la aclaración:

$B = f(x)$	La amplitud del campo magnético depende de x (dirección de propagación)
$B_x = 0$	El campo magnético no tiene componente en la dirección de propagación

Sabemos ya que ambos campos , E y B son normales a la dirección de propagación. Veamos ahora qué relación

hay entre sus direcciones.
Tomemos nuevamente nuestra onda propagándose en la dirección del eje x. Siendo el campo E normal a la dirección de propagación, le asignamos arbitrariamente la dirección del eje y, y deduzcamos la orientación del campo magnético B.
Para ello aplicamos la ley de Faraday a la trayectoria abcd, ubicada en el plano xz, como muestra la figura:



$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int \overline{B} \cdot d\overline{A}$$

Tomemos el primer miembro de esa ecuación: estando el vector **E** en la dirección del eje y, y la trayectoria en el plano xz, evidentemente el producto escalar en cada uno de los lados será nulo, o sea:

$$\int_{abcd} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

Por lo tanto:

$$-\frac{d}{dt}\int \overline{B} \cdot d\overline{A} = 0$$

Pero B existe (no es B = 0), y es variable en el tiempo (no es dB/dt = 0). Por lo tanto, para que se cumpla esa relación, la única alternativa posible es que el producto escalar sea cero, o sea que el campo magnético no tenga componente en la dirección del eje y. Como ya sabíamos que tampoco tiene la dirección del eje x, entonces:

El campo magnético tiene la dirección del eje z

De todo lo expuesto, queda como conclusión que, para que se cumplan las ecuaciones de Maxwell:

Los dos campos deben ser normales a la dirección de propagación, y normales entre sí

Si lo representamos vectorialmente: