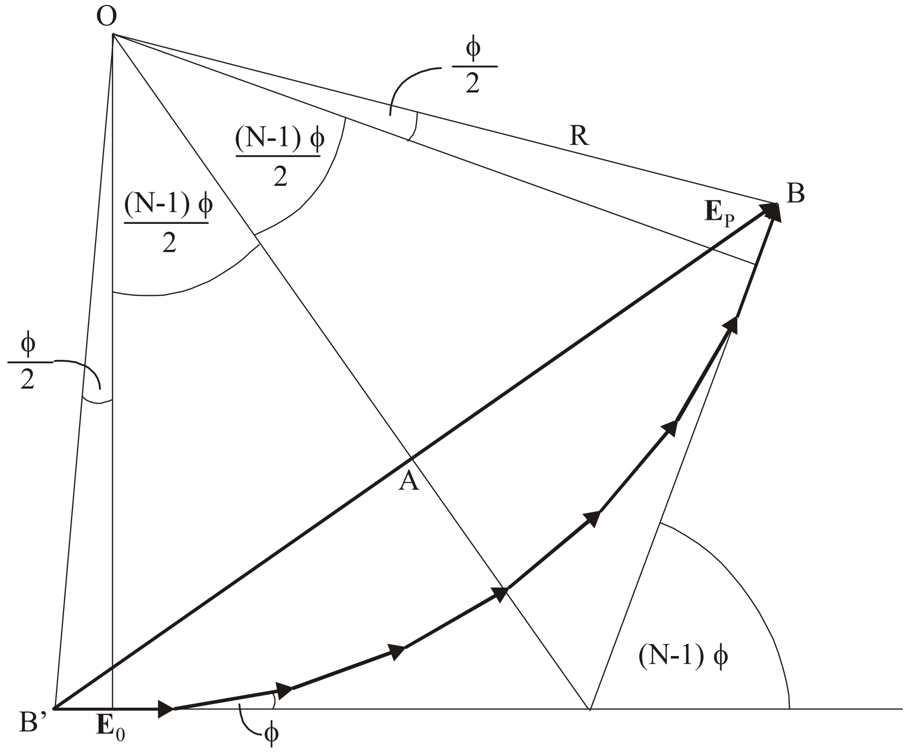
INTENSIDAD DEL PATRÓN DE N RANURAS



Lo que pretendemos obtener es la amplitud del campo eléctrico E_P resultante en un punto P genérico sobre una pantalla para un sistema de N ranuras. El diagrama muestra el caso particular para N = 8 ranuras, pero el análisis es general y válido para cualquier número N (de allí que en la notación de los ángulos se use N y no 8).

Como se observa, ϕ es el ángulo de fase entre los fasores correspondientes a dos ranuras consecutivas, y es también el ángulo que subtiende cada uno de los fasores E_0 tomando como vértice O (punto de intersección de las normales a los fasores por su punto medio)

Los triángulos OAB y OAB' son iguales, y por ello podemos poner:

$$E_P = 2\,R\,\mathrm{sen}\left[(N-1)\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2}\right] = 2\,R\,\mathrm{sen}\left(N\frac{\phi}{2}\right) \qquad (1)$$

Además:

$$\mathrm{sen}\frac{\phi}{2} = \frac{\frac{E_0}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\frac{E_0}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$E_P = E_0 \frac{\mathrm{sen}\left(N\frac{\phi}{2}\right)}{\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}} \qquad (3)$$

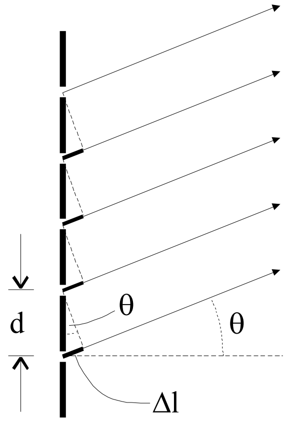
Recordemos que la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado del campo eléctrico.

Tenemos entonces:

$$\boxed{I_P = \frac{1}{2}c\,\varepsilon_0\,{E_P}^2 = \frac{1}{2}c\,\varepsilon_0\,{E_0}^2 \frac{\mathrm{sen}^2\left(N\frac{\phi}{2}\right)}{\mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2}} = I_0 \frac{\mathrm{sen}^2\left(N\frac{\phi}{2}\right)}{\mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2}}} \qquad (4)$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La figura muestra parte de una red de N ranuras. Si la pantalla donde va a incidir la luz está a una distancia grande, podemos suponer que los rayos que convergen a un punto genérico son esencialmente paralelos. Se ve con claridad en el dibujo que la diferencia de camino Δl va a ser la misma para cada par de rayos que pasen por ranuras consecutivas.



Si se cumple que:

$$\Delta l = d \operatorname{sen} \theta = m \lambda$$

Todos los rayos llegarán en fase a ese punto, y estaríamos en presencia de un máximo de interferencia.

Estamos en presencia entonces de la misma relación que hallamos para un sistema de dos ranuras. La posición de los máximos de interferencia está dada por:

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{d}}$$

La ubicación de los mínimos se puede deducir a partir de la ecuación (3). En un mínimo la intensidad vale 0, y por lo tanto deberá ser nulo el numerador de la expresión (seno igual a cero). Para ello, se deberá cumplir:

$$N\frac{\phi}{2} = m\pi \qquad \text{en donde } m = 1, 2, ...$$

Reacomodando términos:

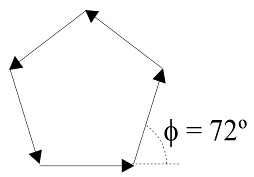
$$\phi = m\frac{2\pi}{N}$$

Esta ecuación nos dice que tendremos mínimos cuando la diferencia de fase entre rayos de rendijas consecutivas sea un número entero de veces $2\pi/N$.

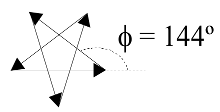
Veamos como ejemplo una red de cinco ranuras. En este caso:

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{360^{o}}{5} = 72^{o}$$

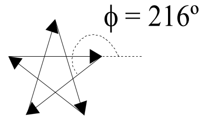
a) Para m = 1; $\phi = 1 \cdot 72^{o} = 72^{o}$, y el diagrama fasorial sería:



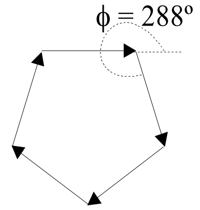
b) Para m = 2; $\phi = 2 \cdot 72^{o} = 144^{o}$:



c) Para m = 3; $\phi = 3 \cdot 72^{o} = 216^{o}$:



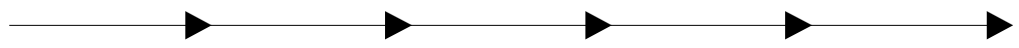
d) Para m = 4; $\phi = 4 \cdot 72^{o} = 288^{o}$:



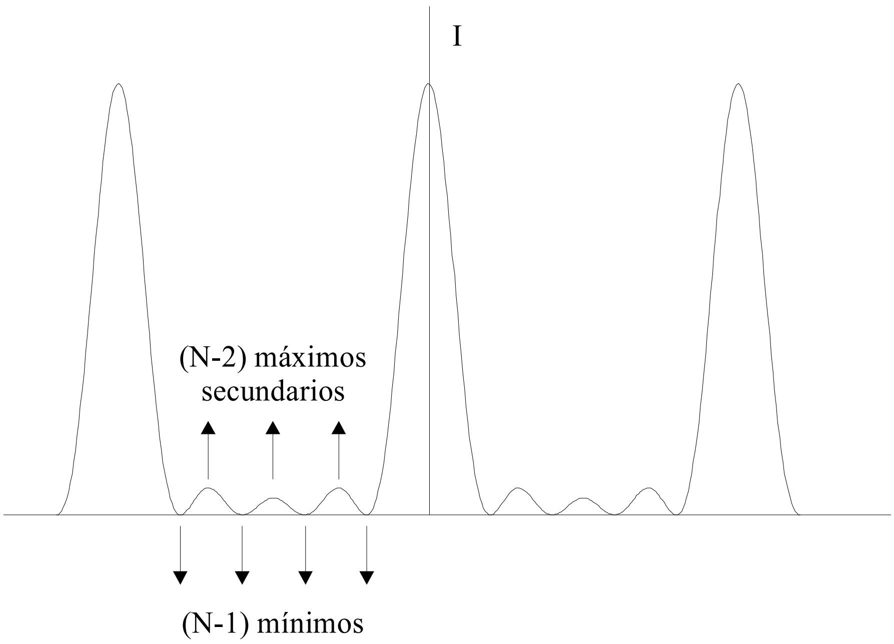
Los cuatro diagramas tienen algo en común: son cerrados; esto es, la suma vectorial de las contribuciones de todas las ranuras es cero, como corresponde, por supuesto, a mínimos en el patrón.

Cuando m = 0, o bien m = 5, la situación es distinta, evidentemente. Los vectores estarán en fase, y su suma será un máximo, no un mínimo:

ϕ = 0º ó 360º



Analíticamente, lo que está sucediendo con la ecuación (3) es que, para $\phi = 0$, o bien $\phi = m\, 2\, \pi$, la expresión se convierte en un cociente indeterminado (cero / cero). Es sencillo verificar con la regla de L'Hôpital que el límite al cual tiende la expresión en este caso es: $E_p = N\, E_0$, en concordancia con lo obtenido gráficamente.
Para una red de cinco (N) ranuras hay, entonces cuatro (N-1) mínimos ubicados entre los máximos principales.
Una consecuencia directa de esto es que debe haber tres (N-2) máximos secundarios entre ellos.
La figura muestra la forma que tiene el patrón de intensidad para una red de cinco ranuras:



El análisis fue hecho para cinco ranuras, pero las conclusiones son generales: Para cualquier número N de ranuras, el patrón tendrá (N-1) mínimos y (N-2) máximos secundarios entre cada par de máximos principales.