

UNIDAD 3

Sistemas Multivariables

Profesores:

Ing. María Susana Bernasconi-

sbernasc@uncu.edu.ar

susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli

fernandogeli@gmail.com

Sistemas MIMO

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

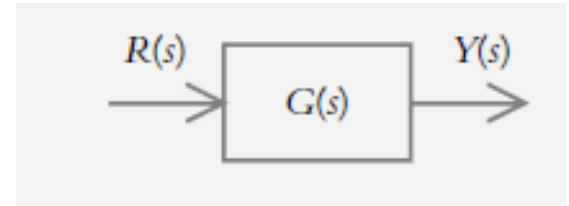
Bibliografía:

Ingeniería de Control Moderna-K.OGATA

Control and Dynamics Systems – Y. TAKAHASHI – M.RABIN – D.AUSLANDER

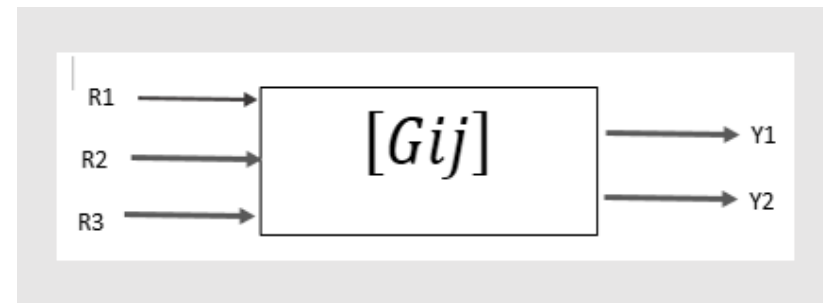
Cuando un sistema tiene una sola entrada y una sola salida se denomina sistema SISO (*single input single output*); cuando posee varias entradas y varias salidas se llama sistema MIMO (*multi input multi output*).

Para sistemas SISO, la función de transferencia $G(s)$ corresponde a la relación salida entrada escrita directamente como:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{\text{condics. iniciales}=0}$$

Sin embargo, para sistemas MIMO se requiere introducir subíndices para identificar tanto al número de salida i como al número de entrada j con respecto a la posición de la función de transferencia individual $G_{ij}(s)$, asociada a una salida y a una entrada específica:



$$G_{i,j}(s) = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)}$$

Cuando tenemos sistemas dinámicos lineales, se cumple que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado, de dimensión n .

$u(t)$ es el vector de entradas, de dimensión m .

$y(t)$ es el vector de salida, de dimensión p .

$\mathbf{A}(t)$ es la matriz del sistema, de dimensiones $n \times n$.

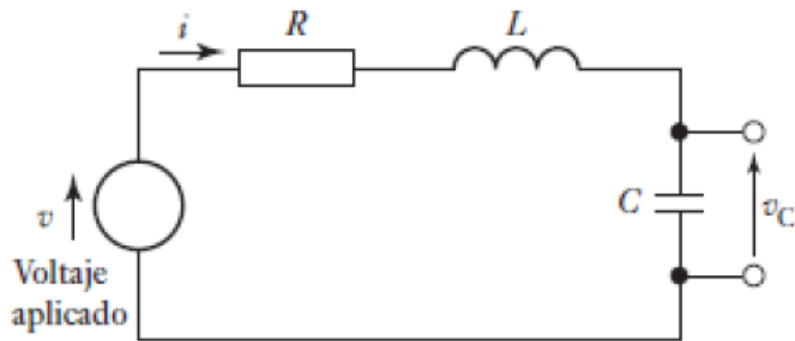
$\mathbf{B}(t)$ es la matriz de entradas, de dimensiones $n \times m$.

$\mathbf{C}(t)$ es la matriz de salida, de dimensiones $p \times n$.

$D(t)$ tiene dimensiones $p \times n$ (en la mayoría de los sistemas es nula).

En la Figura se muestra un sistema resistor-inductor-capacitor
 Hallar las ecuaciones de estado

$$v = v_R + v_L + v_C$$



$$v = iR + L \frac{di}{dt} + v_C$$

$$i = C(dv_C/dt):$$

$$v = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C + RC \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}vc + \frac{1}{L}v$$

$$\frac{dvc}{dt} = \frac{1}{C}i$$

$$x_1(t) = i(t)$$

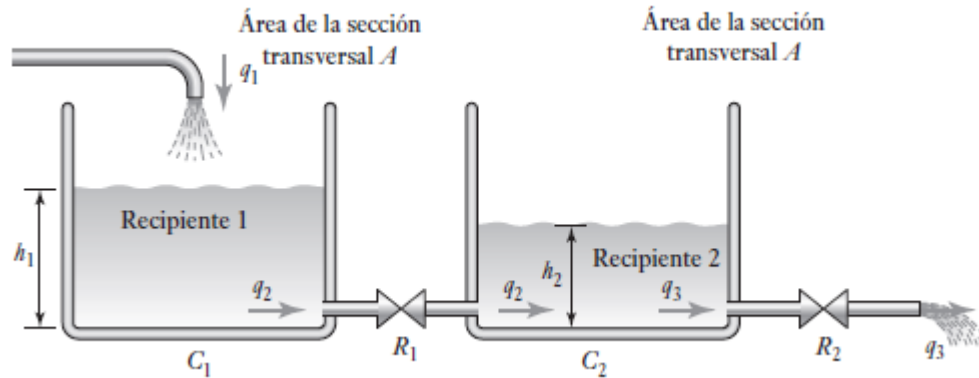
$$x_2(t) = vc(t)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}v$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$[y] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\left[\begin{array}{l} q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \\ q_1 - \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \\ q_2 - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \\ \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho g}{R_1 A_1} & \frac{-\rho g}{R_1 A_1} \\ \frac{\rho g}{R_1 A_2} & \frac{-\rho g}{A_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * q_1$$

$$[y] = [0 \quad 1] * \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Generalizamos para sistemas de orden n-esimo representados por ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de entrada no contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

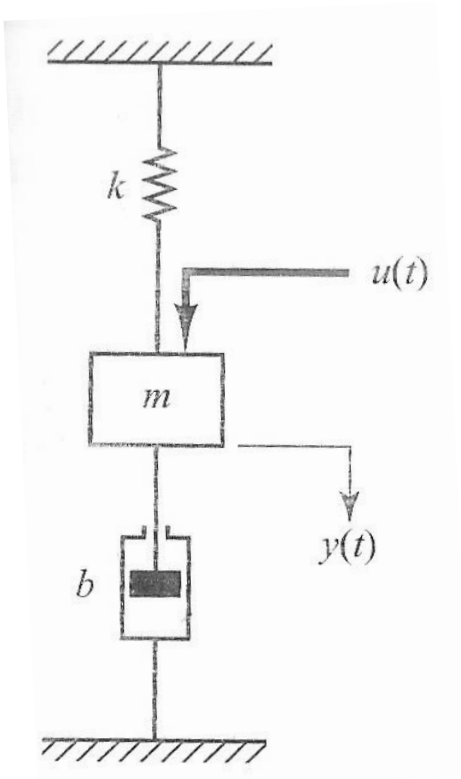
$$\begin{array}{l}
 x_1 = y \\
 x_2 = \dot{y} \\
 \vdots \\
 x_n = y^{(n-1)}
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = x_3 \\
 \vdots \\
 \dot{x}_{n-1} = x_n \\
 \dot{x}_n = a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad
 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad
 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = \mathbf{C}\mathbf{x}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}}$$

Considere el sistema mecánico que aparece en la Figura 3.16. Se supone que el sistema es lineal. La fuerza externa $u(t)$ es la entrada al sistema, y el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. El desplazamiento $y(t)$ se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de una fuerza externa. Este sistema tiene una sola entrada y una sola salida.

A partir del diagrama, la ecuación del sistema es



$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Generalizamos para sistemas de orden n-esimo representados por ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de entrada contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u$$

donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ se determinan a partir de

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0$$

⋮

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

⋮

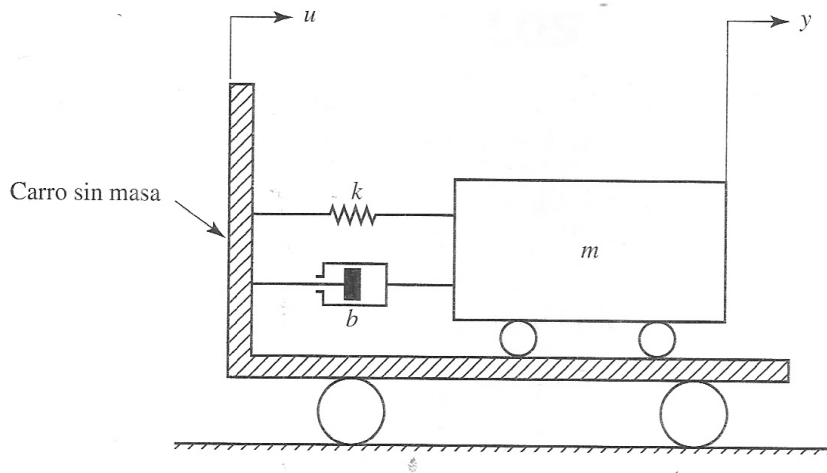
$$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
 \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0 * \ddot{u} + \frac{b}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$



$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 = 0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 = \frac{b}{m} \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0 * \ddot{u} + \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$



$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} u$$

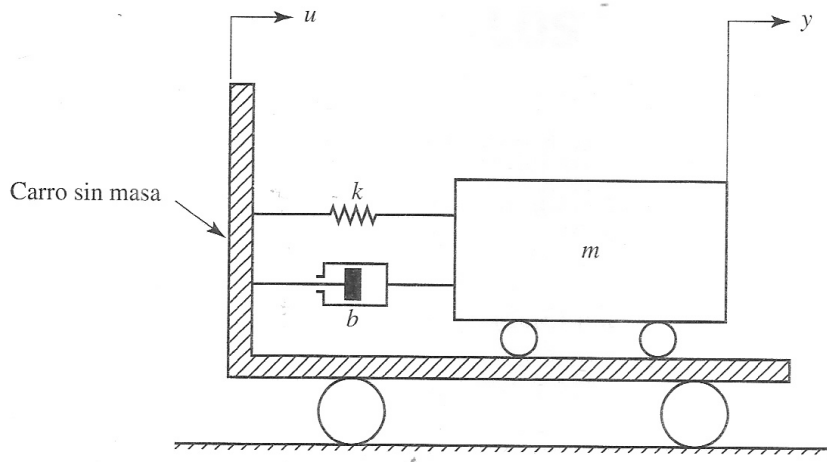
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \right] u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



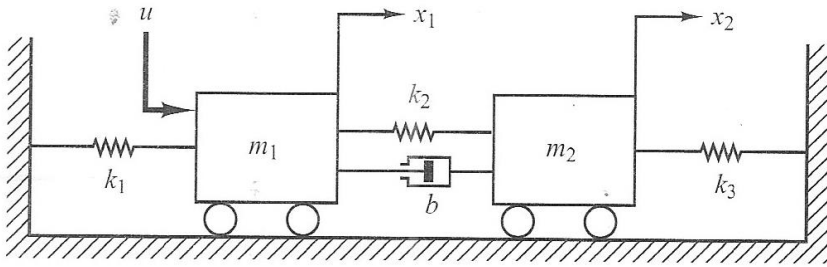
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$



$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = b \dot{x}_2 + k_2 x_2 + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b \dot{x}_1 + k_2 x_1$$

$$[m_1 s^2 + b s + (k_1 + k_2)]X_1(s) = (b s + k_2)X_2(s) + U(s)$$

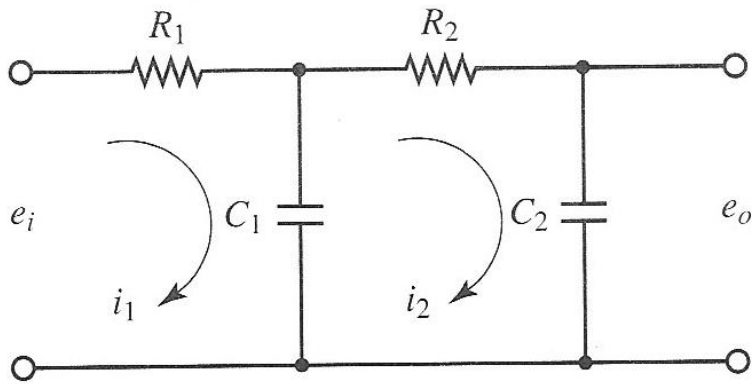
$$[m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)]X_2(s) = (b s + k_2)X_1(s)$$

$$\begin{aligned} & [(m_1 s^2 + b s + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + b s + k_2 + k_3) - (b s + k_2)^2]X_1(s) \\ & = (m_2 s^2 + b s + k_2 + k_3)U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2]X_1(s) \\ & = (m_2s^2 + bs + k_2 + k_3)U(s) \end{aligned}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$



Suponemos que e_i es la entrada y e_o es la salida. Las capacitancias C_1 y C_2 no cambian inicialmente. En la segunda etapa del circuito (la parte R_2C_2) produce un efecto de carga en la primera etapa (la parte R_1C_1)

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i$$

$$\frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_o$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \\ \frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \\ \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \end{array} \right.$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$

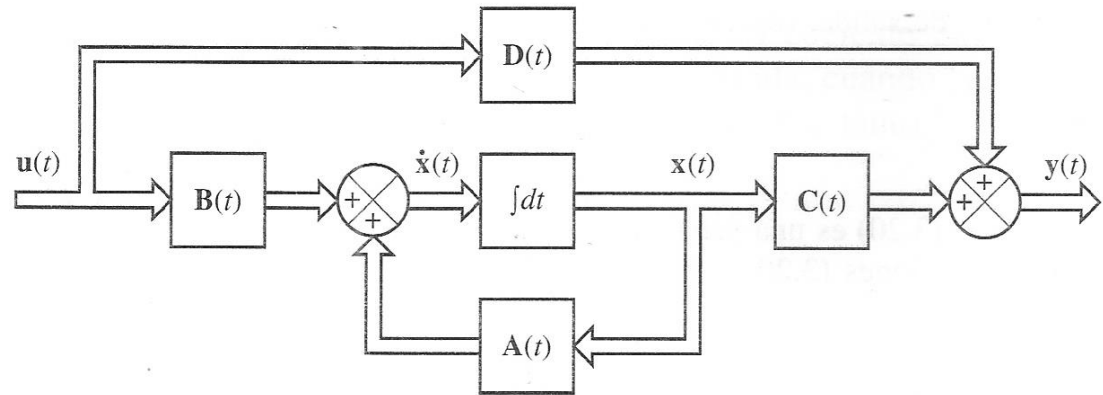
$$= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

Función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$



$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)$$



$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s)$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

Función de transferencia y modelo de estado

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

donde $\mathbf{x}(0)$ es el vector de condiciones iniciales. Si es $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

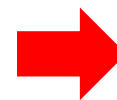
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{U}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}[s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s)\end{aligned}$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \text{Adj} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^T$$



$$p(s) = \det [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

Polos = Valores propios de A

Solución homogénea para una ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = ax$$

$$x(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_kt^k + \dots \quad \longrightarrow \quad x(0) = b_0$$

$$b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + \dots + kb_kt^{k-1} + \dots = a(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_kt^k + \dots)$$

$$b_1 = ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0$$

⋮

$$b_k = \frac{1}{k!} a^k b_0$$

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots \right) x(0)$$

$$= e^{at} x(0)$$

Solución homogénea para una ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

\mathbf{x} = vector de dimensión n

\mathbf{A} = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0}$$

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \dots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \dots = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots)$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2} \mathbf{A}^3 \mathbf{b}_0$$

\vdots

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{b}_0$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots \right) \mathbf{x}(0)}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}$$

Solución para el caso no homogéneo para una ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$\dot{x} - ax = bu$$

$$e^{-at}[\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

$$e^{-at}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau$$

Solución para el caso no homogéneo para una ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

\mathbf{x} = vector de dimensión n
 \mathbf{u} = vector de dimensión r
 \mathbf{A} = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$
 \mathbf{B} = matriz de coeficientes constantes de $n \times r$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Solución para el caso no homogéneo para una ecuación diferencial matricial aplicando Transformada de Laplace

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Premultiplicando
por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

EJEMPLO 11.5. Obtenga la matriz de transición de estados $\Phi(t)$ del sistema siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga también la inversa de la matriz de transición de estados, $\Phi^{-1}(t)$.

Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\Phi(t)$ se obtiene mediante

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

la inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, se obtiene la inversa de la matriz de transición de estados del modo siguiente:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 11.6. Obtenga la respuesta en el tiempo del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario que se presenta en $t = 0$, o

$$u(t) = 1(t)$$

Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ se obtuvo en el Ejemplo 11.5 como

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La respuesta a la entrada escalón unitario se obtiene entonces como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\tau$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si el estado inicial es cero, o $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}(t)$ se puede simplificar a

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Controlabilidad y observabilidad.

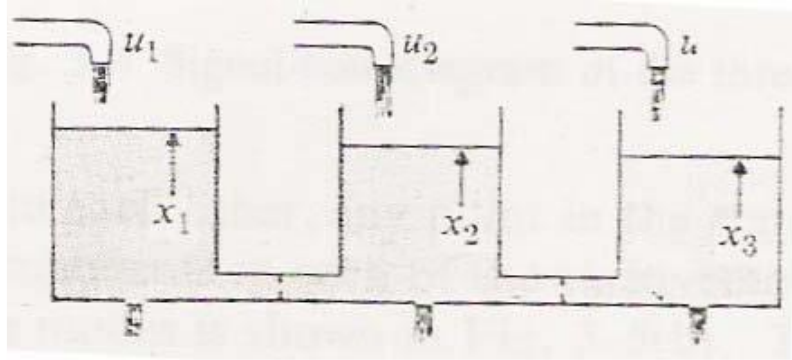
Una función de transferencia desarrollada en fracciones simples muestra al sistema de manera desacoplada, es decir, que las variables de estado son afectadas directamente por la función de entrada $U(s)$ y cada una de ellas afecta individualmente la salida $Y(s)$. El equivalente matricial de un sistema desacoplado es cuando se presenta la matriz de estado A , como una matriz diagonal. Si en un sistema cuya ecuación de estado homogénea es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= A * X(t) \\ \frac{d}{dt}T * X^o(t) &= A * T * X^o(t) \\ \frac{d}{dt}X^o(t) &= T^{-1} * A * T * X^o(t) \end{aligned} \quad T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

realizamos una transformación lineal del vector de estado $X(t)$ a un nuevo vector $X^o(t)$, mediante una matriz cuadrada T (recordar que hay muchas matrices de transformación, pero sólo una hará que A se convierta en una matriz diagonal) Puede verse que esta ecuación es igual a la ecuación (4.11), a diferencia de que al haber llevado a cabo una transformación lineal, la nueva matriz A diagonalizada está representada en la ecuación (4.13) como el producto de 3 matrices: $T^{-1} * A * T$.

$$s * I - T^{-1} * A * T = T^{-1} * (s * I - A) * T$$

$$\left| T^{-1} * (s * I - A) * T \right| = \left| (s * I - A) \right| = 0$$



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$|s * I - A| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ -2 & s+3 & -2 \\ 0 & 1 & s+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s^3 + 9 * s^2 + 23 * s + 15 = 0$$

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -3$$

$$p_3 = -5$$

$$v_1^1 = 1$$

$$v_2^1 = 2$$

$$v_3^1 = 1$$

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - p_1 * I) * v^1 = \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - (-1) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - p_2 * I) * v^2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} * \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-2 * v_1^1 + 1 * v_2^1 + 0 * v_3^1 = 0$$

$$2 * v_1^1 - 2 * v_2^1 + 2 * v_3^1 = 0$$

$$0 * v_1^1 + 1 * v_2^1 - 2 * v_3^1 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



Controlabilidad:

$$\frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$T^{-1} * B$

Observabilidad:

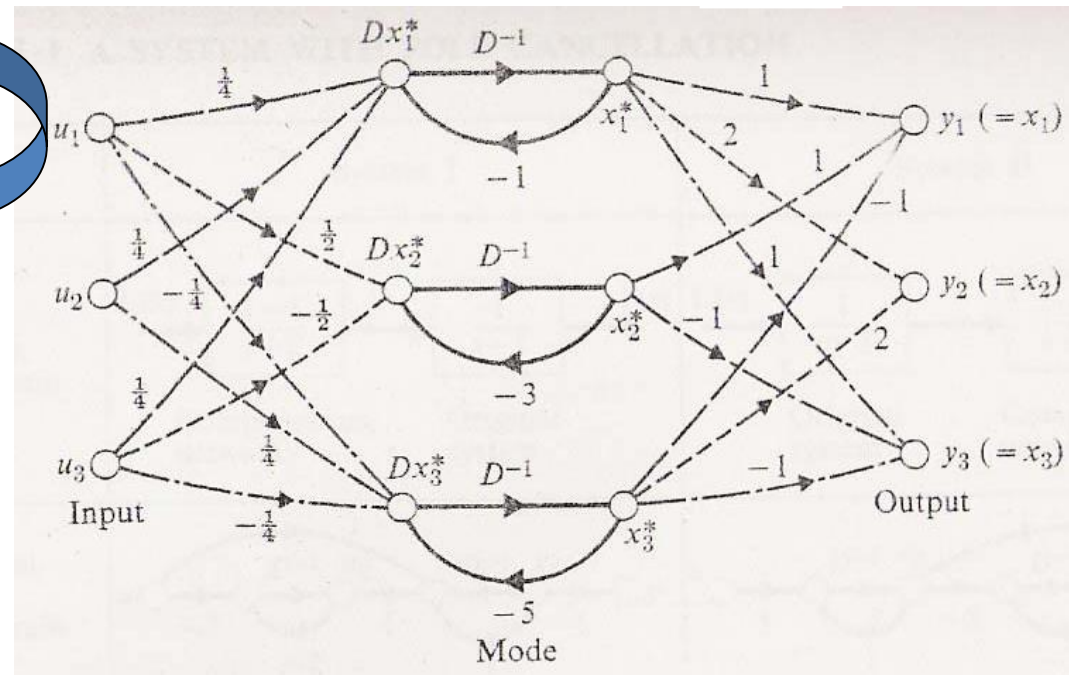
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$C * T$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ x_3^\circ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{T^{-1} * A * T} * \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ x_3^\circ \end{bmatrix} + \frac{1}{4} * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{T^{-1} * B} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$y = C * X + D * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + D * U$$

$$y = C * T * X^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ x_3^\circ \end{bmatrix}$$



Controlabilidad

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

\mathbf{x} = vector de estados (vector de dimensión n)

u = señal de control (escalar)

\mathbf{A} = matriz de $n \times n$

\mathbf{B} = matriz de $n \times 1$

Este sistema es completamente **controlable** en $t=t_0$ si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un tiempo finito $t_0 < t < t_1$. Se supone que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es $t_0 = 0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau) d\tau \longrightarrow \mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \longrightarrow \mathbf{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau) d\tau$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau) d\tau = \beta_k \\ \mathbf{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k \end{aligned} \right\} = - [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

La MATRIZ DE CONTROLABILIDAD $n \times n$ debe ser de rango n

Observabilidad

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

\mathbf{x} = vector de estado (vector de dimensión n)

\mathbf{y} = vector de salida (vector de dimensión m)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

\mathbf{A} = matriz $n \times n$

\mathbf{C} = matriz $m \times n$

Un sistema es completamente **observable** si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 < t < t_1$. El sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan a todos los elementos del vector de salida. Se consideran sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se supone $t_0 = 0$. A veces algunas variables de estado no son accesibles para la medición directa, por lo que se hace necesario estimarlas para construir las señales de control. Estas estimaciones son posibles si y solo si el sistema es completamente observable.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \\ e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

$$[\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \quad \dots \quad (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

La MATRIZ DE OBSERVABILIDAD $n \times nm$
debe ser de rango n

Sea el sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

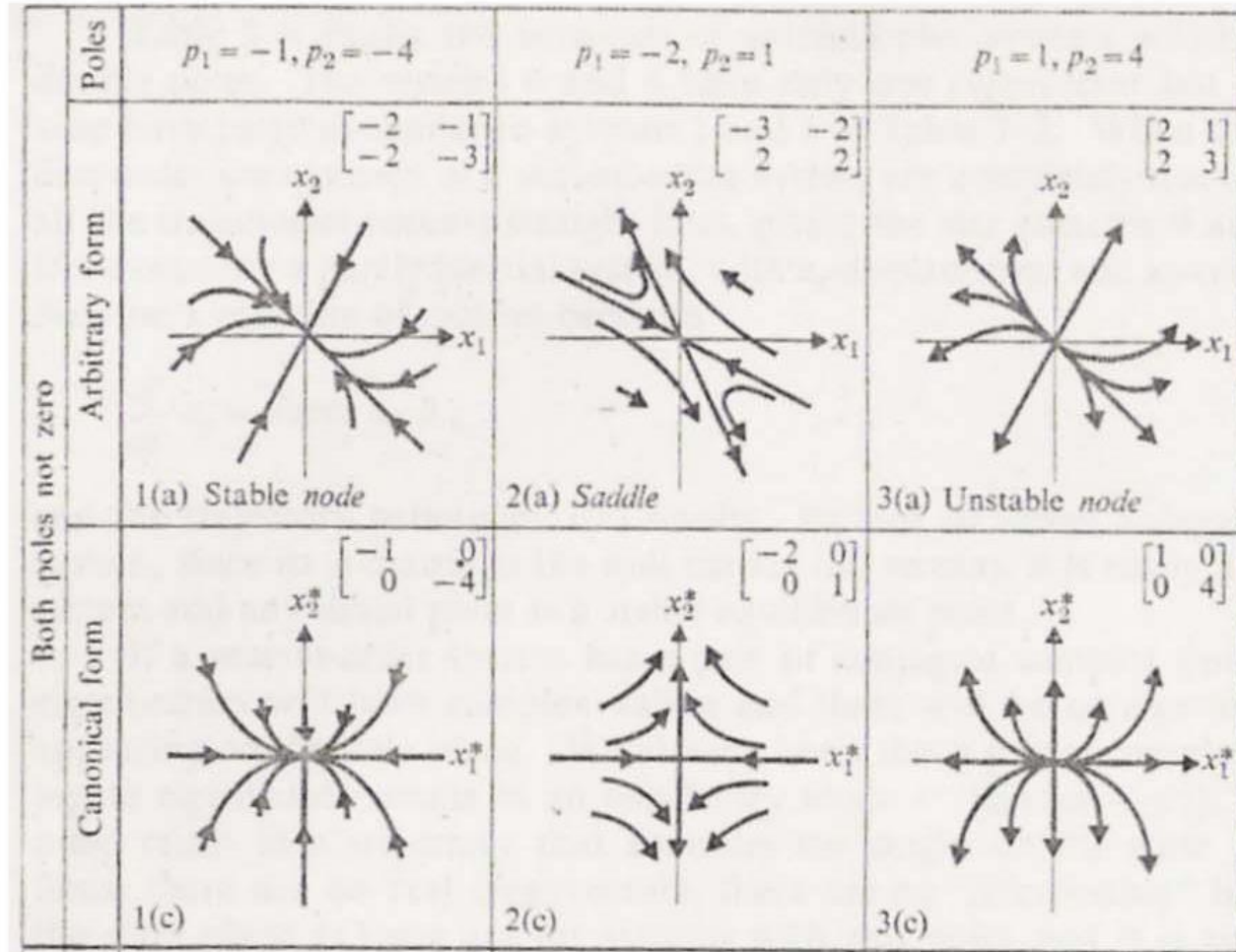
$$[\mathbf{B} \ ; \ \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El rango es 2, por lo tanto es completamente controlable

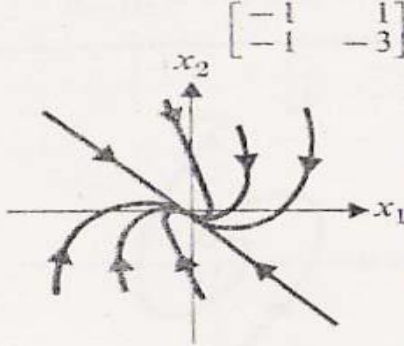
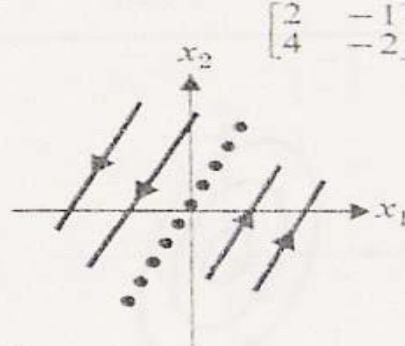
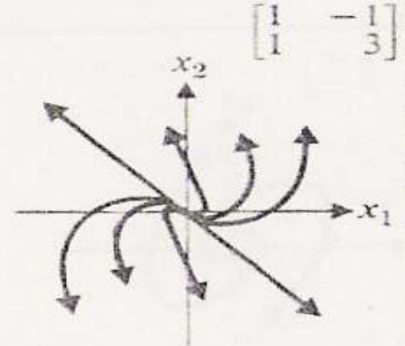
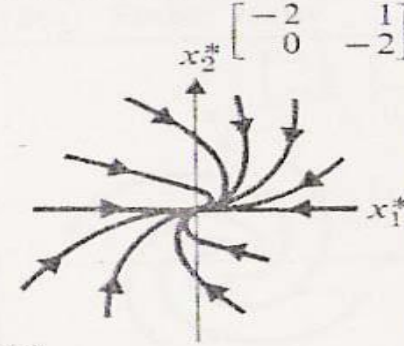
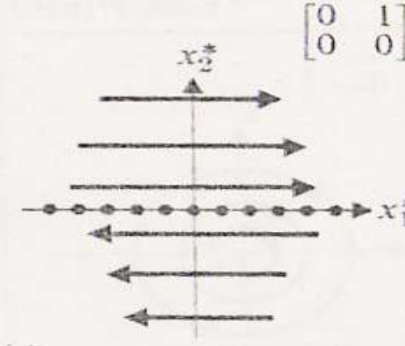
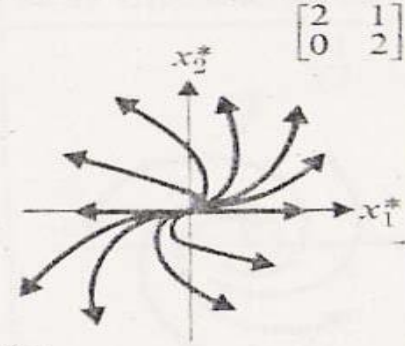
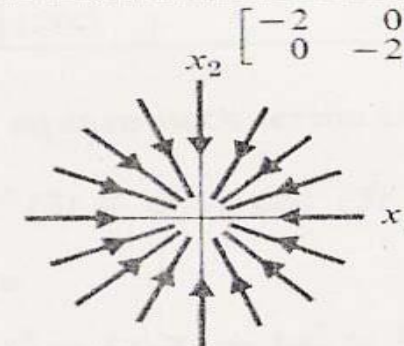
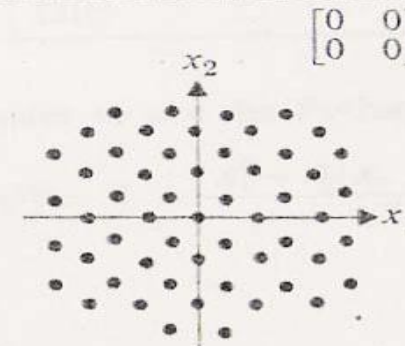
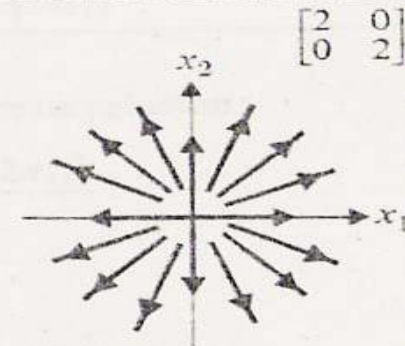
$$[\mathbf{C}^* \ ; \ \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

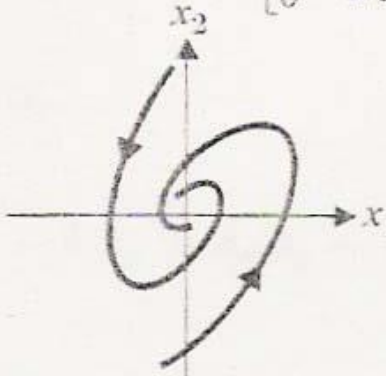
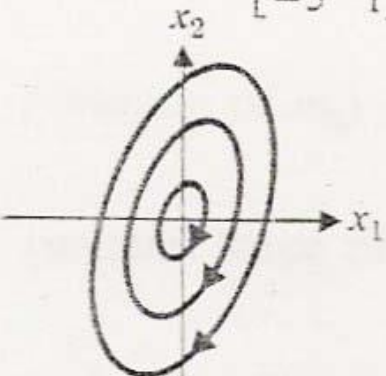
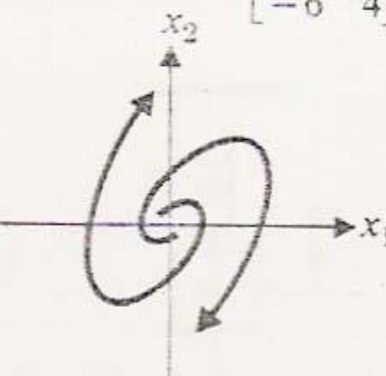
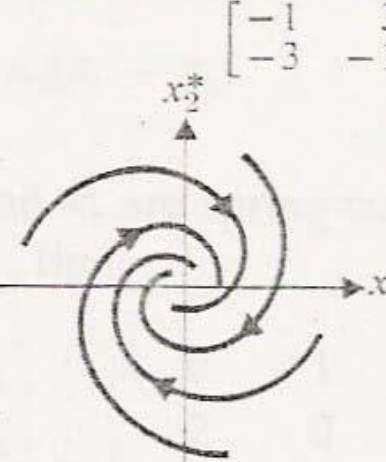
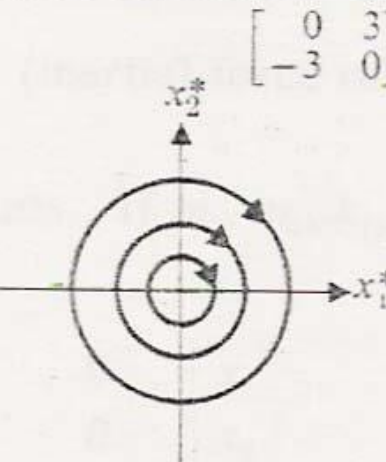
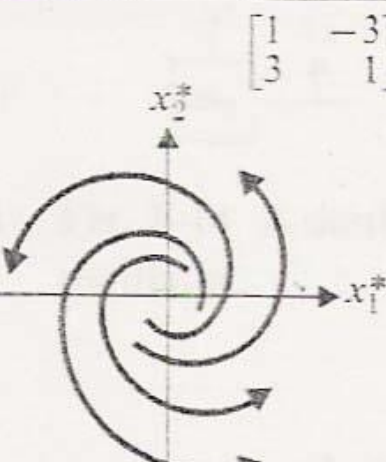
El rango es 2, por lo tanto es completamente observable

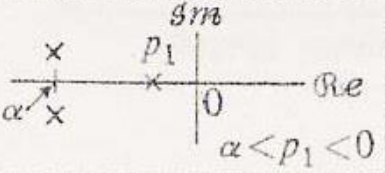
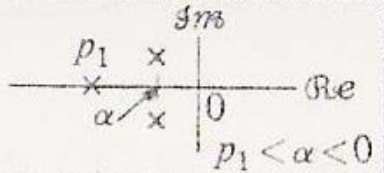
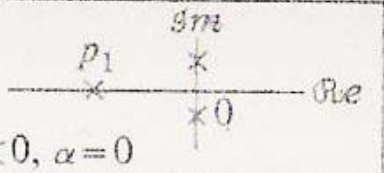
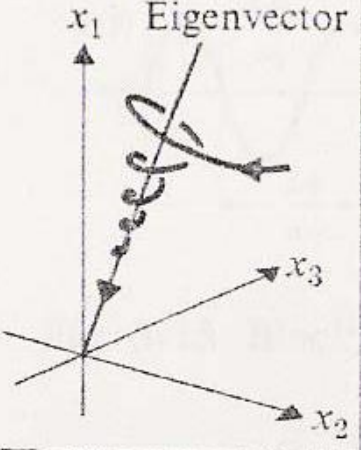
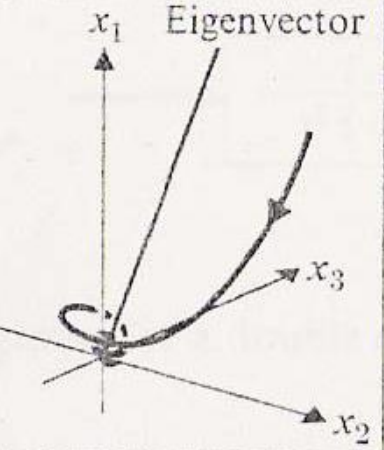
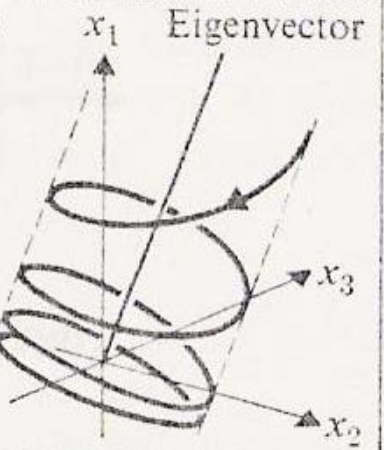
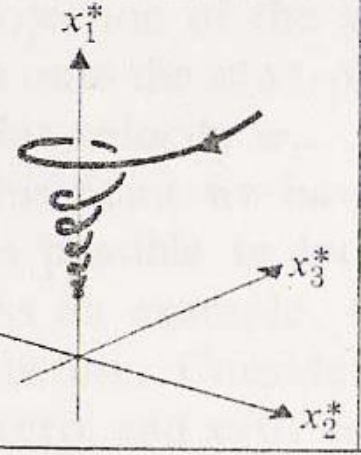
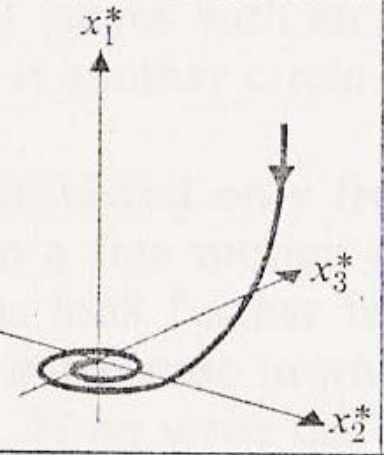
Movimiento en el espacio de estado.



One pole zero	Poles	$p_1 = -5, p_2 = 0$		$p_1 = 5, p_2 = 0$
	Arbitrary form	<p>4(a)</p>	—	<p>5(a)</p>
Canonical form	<p>4(c)</p>	—	<p>5(c)</p>	

	Poles	
Coupled	$p_1 = p_2 = -2$	<p>Arbitrary form</p> <p>6(a)</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 0$	<p>Arbitrary form</p> <p>7(a)</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 2$	<p>Arbitrary form</p> <p>8(a)</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ </p> 
Coupled	Jordan canonical form	<p>6(c)</p> <p> x_2^* $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 0$	<p>7(c)</p> <p> x_2^* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 2$	<p>8(c)</p> <p> x_2^* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ </p> 
Decoupled (Diagonal)	$p_1 = p_2 = -2$	<p>9 Stable star</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 0$	<p>10</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ </p> 
	$p_1 = p_2 = 2$	<p>11 Unstable star</p> <p> x_2 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ </p> 

Poles	$p_1, p_2 = -1 \pm 3j$	$p_1, p_2 = \pm 3j$	$p_1, p_2 = 1 \pm 3j$
Arbitrary form	$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$  <p>12(a) <i>Stable focus</i></p>	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$  <p>13(a) <i>Center</i></p>	$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$  <p>14(a) <i>Unstable focus</i></p>
Modified canonical form	$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$  <p>12(c)</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$  <p>13(c)</p>	$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  <p>14(c)</p>

<p>Poles</p>	 <p style="text-align: center;">$\alpha < p_1 < 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$p_1 < \alpha < 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$p_1 < 0, \alpha = 0$</p>
<p>A in arbitrary form</p>	<p>1(a) x_1 Eigenvector</p> 	<p>2(a) x_1 Eigenvector</p> 	<p>3(a) x_1 Eigenvector</p> 
$\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \omega \\ 0 & -\omega & \alpha \end{bmatrix}$	<p>1(c) x_1^*</p> 	<p>2(c) x_1^*</p> 	<p>3(c) x_1^*</p> 