Diagramas de flujo de señal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Bibliografía:
Ingeniería de Control Moderna-K.OGATA
Sistemas de Control Automatico- Benjamin KUO

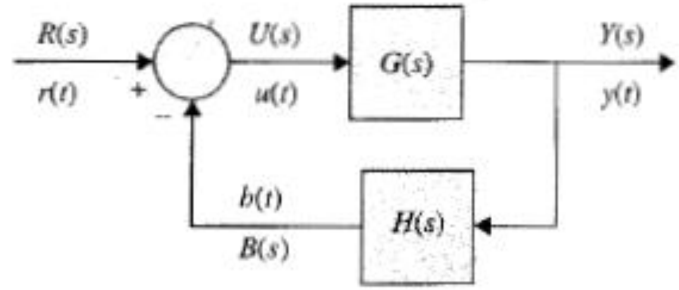


Figura 3-4 Diagrama de bloques básicos de un sistema de control realimentado.

y

$$B(s) = H(s)Y(s) \tag{3-20}$$

La señal actuante se escribe como:

$$U(s) = R(s) - B(s) \tag{3-21}$$

Al sustituir la ecuación (3-21) en la ecuación (3-19) se obtiene:

$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)B(s) \tag{3-22}$$

Al sustituir la ecuación (3-20) en la ecuación (3-22) y resolviendo para $Y(s)/R(s)$ se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3-23}$$

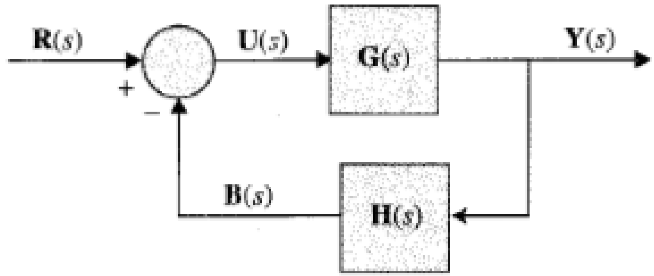


Figura 3-6 Diagrama de bloques de un sistema de control realimentado multivariable.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{R}(s) - \mathbf{B}(s)$$
$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) - \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)$$

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{R}(s)}$$

Considere que la matriz de funciones de transferencia de trayectoria directa y la matriz de funciones de transferencia de la trayectoria de realimentación del sistema mostrado en la Fig. 3-6 son:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & 1 + \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{s+3}{s+2} \end{bmatrix} \tag{3-32}$$

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s+2} & \dfrac{1}{s} \\ -2 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \tag{3-33}$$

$$\Delta = \frac{s+2}{s+1}\frac{s+3}{s+2} + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 5s + 2}{s(s+1)} \tag{3-34}$$

$$\mathbf{M}(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + 5s + 2}\begin{bmatrix} \dfrac{3s^2 + 9s + 4}{s(s+1)(s+2)} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{3s+2}{s(s+1)} \end{bmatrix} \tag{3-35}$$

Gráficas de flujo de señal

Una gráfica de flujo de señal (SFG [Signal-Flow Graph]) se puede ver como una versión simplificada de un diagrama de bloques. La SFG fue introducida por S. J. Mason [2] para la representación de causa y efecto de sistemas lineales que son modelados por ecuaciones algebraicas. Además de la diferencia en apariencia física de la SFG y el diagrama de bloques, la gráfica de flujo de señal se puede ver como restringida por reglas matemáticas más rígidas, mientras que el uso de la notación del diagrama de bloques es más liberal. Una SFG se puede definir como un medio gráfico de retratar las relaciones entrada-salida entre las variables de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales.

Considere que un sistema lineal está descrito por un conjunto de N ecuaciones algebraicas:

$$y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Debe señalarse que estas N ecuaciones están escritas en la forma de relaciones de causa y efecto:

$$j\text{-ésimo efecto} = \sum_{k=1}^{N} (\text{ganancia desde } K \text{ a } j) \times (k\text{-ésima causa})$$

$$\text{salida} = \sum \text{ganancia} \times \text{entrada}$$

Éste es el axioma más importante en la formación del conjunto de ecuaciones algebraicas para las SFG. En el caso de que el sistema esté representado por un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales, primero se deben transformar en ecuaciones de la transformada de Laplace y después se rearreglan estas últimas en la forma de la ecuación (3-36), o:

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

3-4-1 Elementos básicos de una gráfica de flujo de señal

Cuando se construye una SFG, los puntos de unión, o **nodos**, se utilizan para representar variables. Los nodos están conectados por segmentos lineales llamados **ramas**, de acuerdo con las ecuaciones de causa y efecto. Las ramas tienen ganancias y direcciones asociadas. *Una señal se puede transmitir a través de una rama solamente en la dirección de la flecha.* En general, dado un conjunto de ecuaciones tales como las ecuaciones (3-36) o (3-39), la construcción de una SFG consiste en seguir las relaciones de causa y efecto relacionando cada variable en términos de sí misma y de las otras. Por ejemplo, considere que un sistema lineal está representado por la ecuación algebraica sencilla:

$$y_2 = a_{12}y_1 \tag{3-40}$$

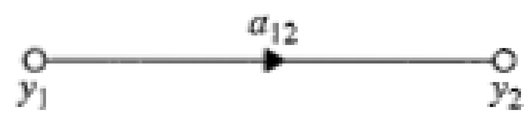
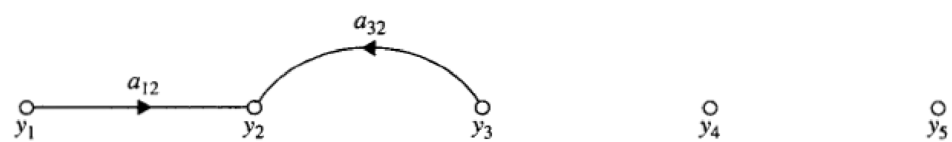


Figura 3-7 Gráfica de flujo de señal de $y_2 = a_{12}\, y_1$.

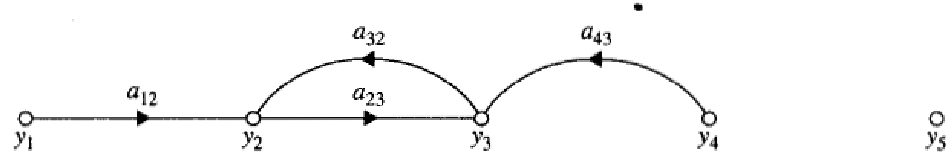
Resumen de las propiedades básicas de una gráfica de flujo de señal

Las propiedades importantes de la SFG que han sido cubiertas hasta el momento se resumen como siguen:

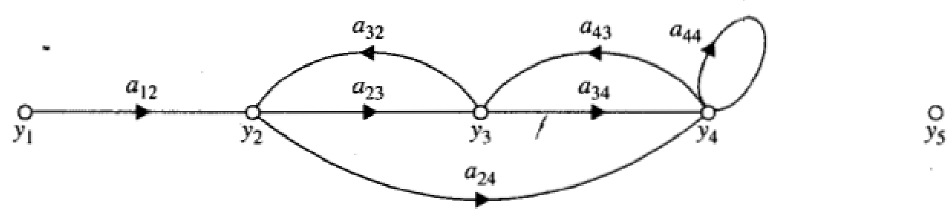
1. La SFG se aplica solamente a sistemas lineales.
2. Las ecuaciones a partir de las cuales se dibuja una SFG deben ser algebraicas en la forma de causa y efecto.
3. Los nodos se utilizan para expresar variables. Normalmente, los nodos se arreglan de izquierda a derecha, desde la entrada a la salida, siguiendo una sucesión de relaciones de causa y efecto a través del sistema.



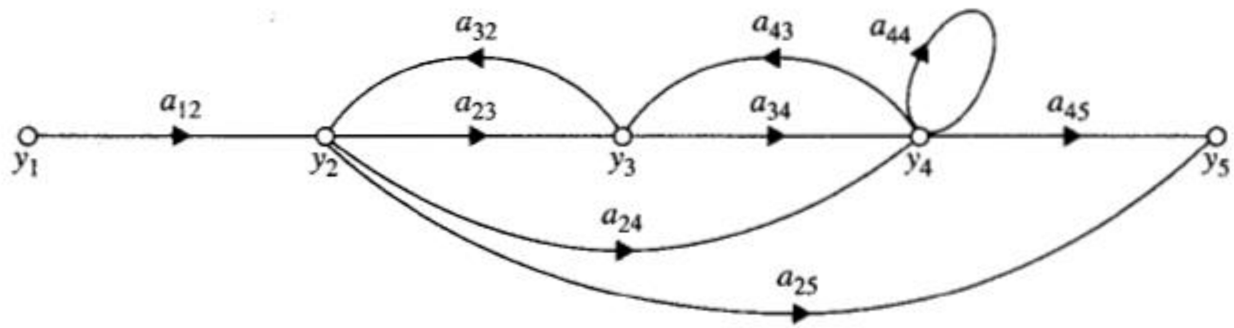
(a) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$



(b) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4$



(c) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \quad y_4 = a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4$



(d) **Gráfica de flujo de señal completo**

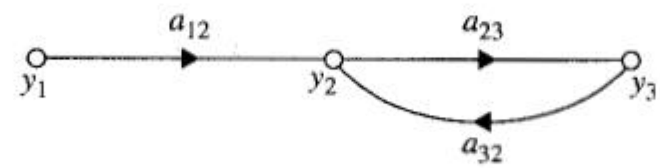
Figura 3-8 Construcción paso a paso de la gráfica de flujo de señal para la ecuación (3-42).

4. La señal viaja a través de las ramas solamente en la dirección descrita por las flechas.
5. La dirección de la rama desde el nodo y_k a y_j, representa la dependencia de y_j sobre y_k, pero no al contrario.
6. Una señal y_k que viaja a través de una rama entre y_k y y_j se multiplica por la ganancia de la rama, a_{kj}, por lo que la señal $a_{kj}y_k$ es entregada en y_j.

Definiciones de los términos de una gráfica de flujo de señal

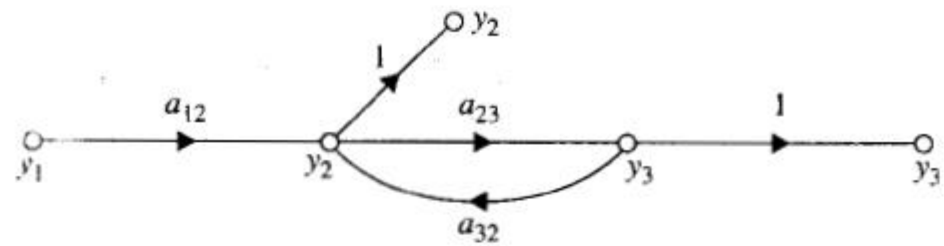
▲ Un nodo de entrada tiene sólo ramas de salida.

▲ Un nodo de salida tiene sólo ramas de entrada.

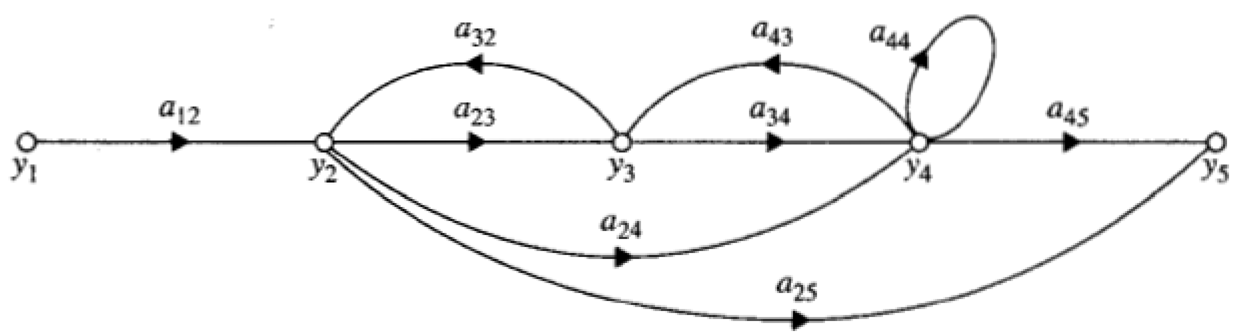


(a) Gráfica de flujo de señal original

Figura 3-9 Modificación de una gráfica de flujo de señal para que y_2 y y_3 satisfagan los requisitos como nodos de salida.



(b) Gráfica de flujo de señal modificado



(d) Gráfica de flujo de señal completo

Trayectoria. *Una* **trayectoria** *es cualquier colección de una sucesión continua de ramas que se dirigen en la misma dirección.* La definición de una trayectoria es enteramente general, ya que no previene que cualquier nodo la atraviese más de una vez. Por tanto, la simple SFG de la Fig. 3-9(a), puede tener numerosas trayectorias que atraviesan las ramas a_{23} y a_{32} en forma continua.

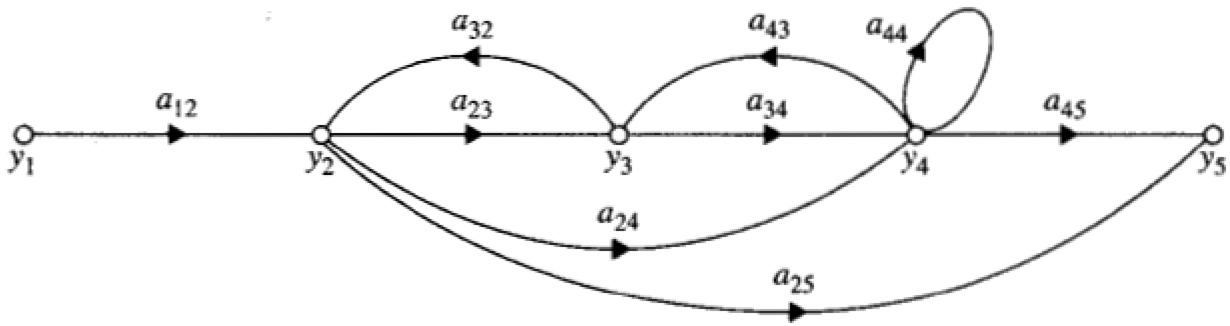
Trayectoria directa. *Una* **trayectoria directa** *es una trayectoria que empieza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida, a lo largo de la cual ningún nodo se atraviesa más de una vez.* Por ejemplo, en la SFG de la Fig. 3-8(d), y_1 es el nodo de entrada, y el resto de los nodos son todos nodos posibles de salida. La trayectoria entre y_1 y y_2 es simplemente la rama conectada entre los dos nodos. Existen dos trayectorias entre y_1 y y_3; una contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_3, y la otra contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_4 (a través de la rama con ganancia a_{24}) y entonces de regreso a y_3 (a través de la rama con ganancia a_{43}. El lector debe tratar de determinar las dos trayectorias directas entre y_1 y y_4. De forma similar, existen tres trayectorias directas entre y_1 y y_5.

Malla. *Una* **malla** *es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo y en donde ningún otro nodo se encuentra más de una vez.* Por ejemplo, existen cuatro mallas en la SFG de la Fig. 3-8(d). Éstas se muestran en la Fig. 3-11.

Ganancia de la trayectoria. *El producto de las ganancias de las ramas que atraviesan una trayectoria se llama* **ganancia de la trayectoria**. Por ejemplo, la ganancia de la trayectoria para la trayectoria y_1–y_2–y_3–y_4 de la Fig. 3-8(d) es $a_{12}a_{23}a_{34}$.

Antes de presentar varios ejemplos ilustrativos sobre la construcción de diagramas de estado, se deben señalar los puntos importantes en la utilización del diagrama de estado.

1. Un diagrama de estado se puede construir directamente a partir de la ecuación diferencial del sistema. Esto permite la determinación de las variables de estado y de las ecuaciones de estado.
2. Un diagrama de estado se puede construir a partir de la función de transferencia del sistema. Este paso se define como la **descomposición** de las funciones de transferencia (Sec. 5-11).
3. El diagrama de estado se puede utilizar para la programación del sistema en una computadora analógica o para la simulación en una computadora digital.
4. La ecuación de transición de estado en el dominio de la transformada de Laplace se puede obtener a partir del diagrama de estado mediante la fórmula de ganancia de la SFG.
5. Las funciones de transferencia de un sistema se pueden determinar del diagrama de estado.
6. Las ecuaciones de estado y las ecuaciones de salida se pueden determinar del diagrama de estado.



(d) Gráfica de flujo de señal completo

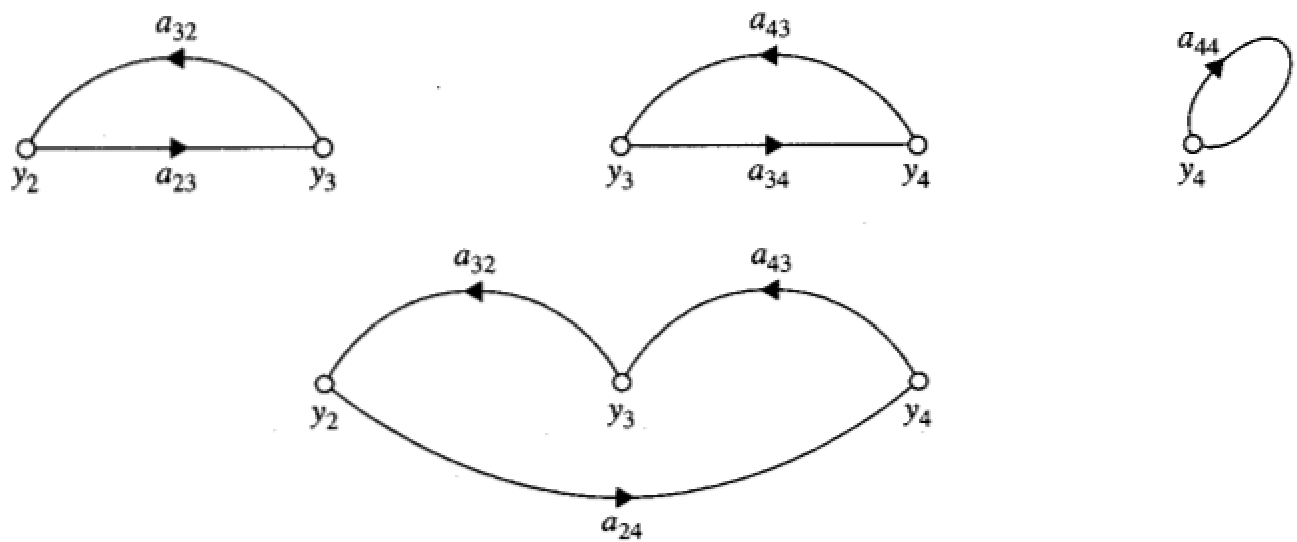


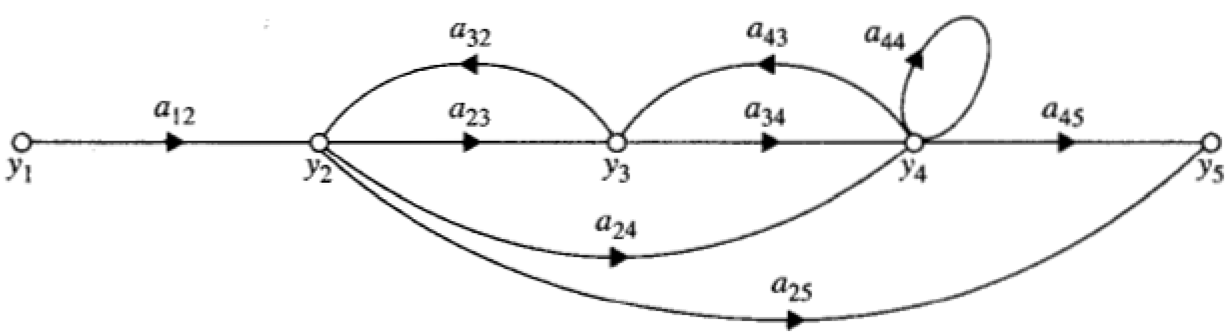
Figura 3-11 Cuatro mallas en la gráfica de flujo de señal de la Fig. 3-8(d).

Ganancia de la trayectoria directa. *La* **ganancia de la trayectoria directa** *es la ganancia de la trayectoria de una trayectoria directa.*

Ganancia de malla. *La* **ganancia de malla** *es la ganancia de la trayectoria de una malla.* Por ejemplo, la ganancia de malla de la malla y_2–y_4–y_3–y_2 de la Fig. 3-11 es $a_{24}a_{43}a_{32}$.

▲ Dos partes de una SFG no se tocan si no comparten un nodo en común.

Mallas que no se tocan. *Dos partes de una SFG* **no se tocan** *si no comparten un nodo común.* Por ejemplo, las mallas y_2–y_3–y_2 y y_4–y_4 de la SFG de la Fig. 3-8 son mallas que no se tocan.



(d) Gráfica de flujo de señal completo

Fórmula de ganancia para gráficas de flujo de señal

Dada una SFG o un diagrama de bloques, la tarea de resolver las relaciones entrada-salida mediante manipulación algebraica puede ser bastante tediosa. Afortunadamente, existe una fórmula de ganancia general disponible que permite la determinación de las relaciones entrada-salida de una SFG mediante inspección. Dada una SFG con N trayectorias directas, y L mallas, la ganancia entre el nodo de entrada y_{ent} y el nodo de salida y_{sal} es [3].

$$\boxed{M = \frac{y_{sal}}{y_{ent}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}}$$

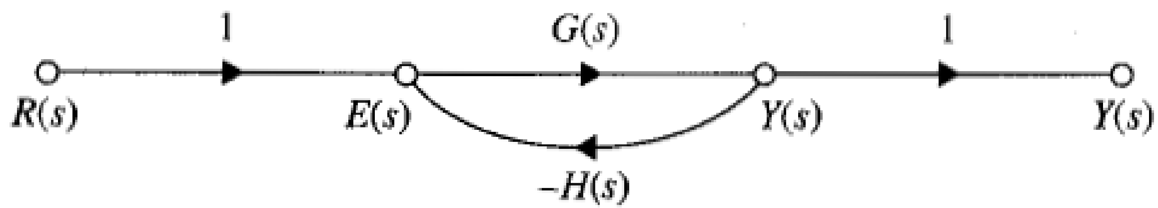
y_{ent} = variable del nodo de entrada
y_{sal} = variable del nodo de salida
M = ganancia entre y_{ent} y y_{sal}
N = número total de trayectorias directas entre y_{ent} y y_{sal}
M_k = ganancia de la trayectoria directa k-ésima entre y_{ent} y y_{sal}

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \cdots$$

L_{mr} = producto de la ganancia de la combinación posible m-ésima ($m = i, j, k, \ldots$) de las mallas de no contacto ($1 \leq r \leq L$).

Δ = 1 – (suma de las ganancias de **todas las mallas individuales**) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de **dos** mallas que no se tocan) – (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de **tres** mallas que no se tocan) + . . . (3-48)

Δ_k = la Δ para aquella parte de la SFG que no toca la k-ésima trayectoria directa.



1. Solamente existe una trayectoria directa entre $R(s)$ y $Y(s)$, y la ganancia de la trayectoria directa es:

$$M_1 = G(s)$$

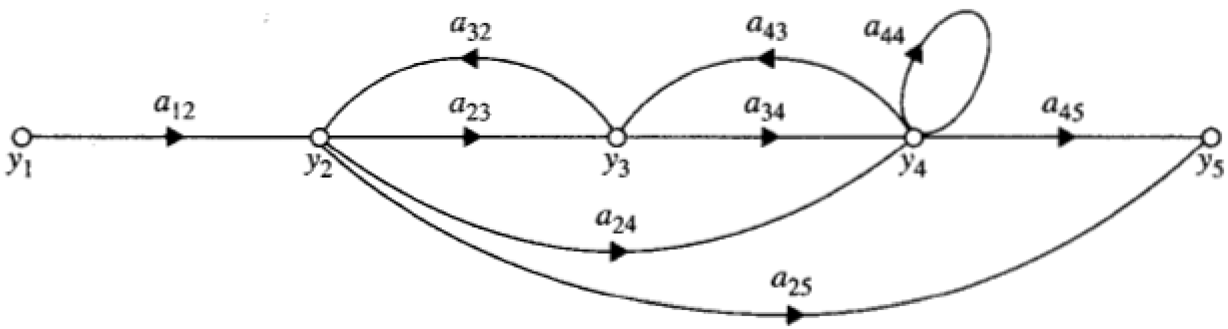
2. Hay solamente una malla; la ganancia de malla es:

$$L_{11} = -G(s)H(s)$$

3. No hay mallas que no se tocan ya que solamente existe una malla. Además, la trayectoria directa está en contacto con la única malla. Por tanto, $\Delta_1 = 1$, y:

$$\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G(s)H(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$



(d) **Gráfica de flujo de señal completo**

$M_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$ Trayectoria directa: $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5$

$M_2 = a_{12}a_{25}$ Trayectoria directa: $y_1 - y_2 - y_5$

Los cuatro lazos de la SFG

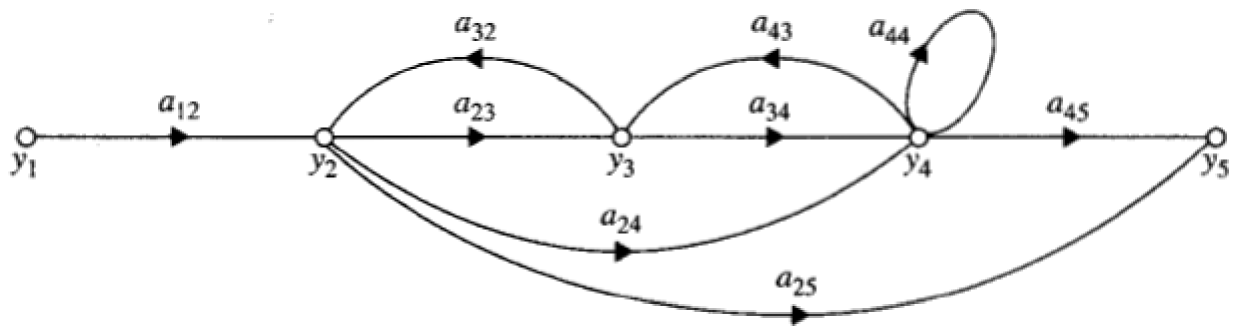
$$L_{11} = a_{23}a_{32} \qquad L_{21} = a_{34}a_{43} \qquad L_{31} = a_{24}a_{32}a_{43} \qquad L_{41} = a_{44}$$

Dos mallas que no se tocan

$$y_2 - y_3 - y_2 \quad \text{y} \quad y_4 - y_4 \qquad L_{21} = a_{23}a_{32}a_{44}$$

Todas las mallas se tocan con la trayectoria directa M_1. Por lo que $\Delta_1 = 1$. Dos de las mallas no se tocan con la trayectoria directa M_2. Estas dos mallas son $y_3 - y_4 - y_3$ y $y_4 - y_4$. Por lo que:

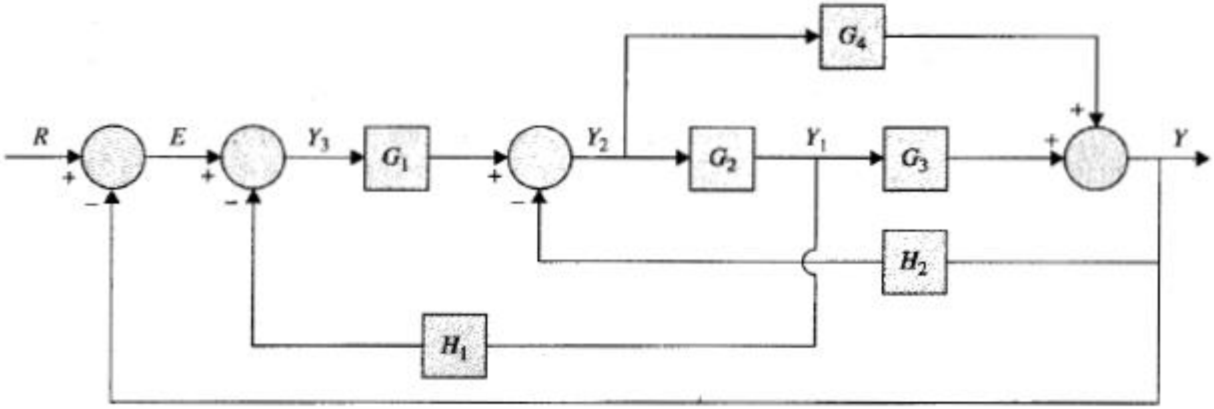
$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44}$$



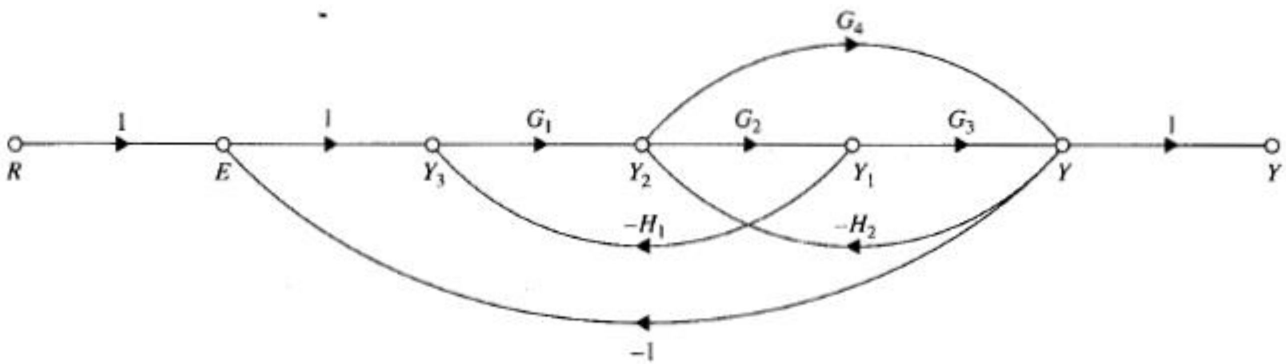
(d) Gráfica de flujo de señal completo

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) + L_{21} \\ &= 1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}\end{aligned}$$

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}) + (a_{12}a_{25})(1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}}$$



(a)



(b)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$$