Solución analítica de la ecuación de estado lineal.

Sistemas libres.

Presentamos un resumen del tratamiento analítico de los sistemas lineales, invariantes en el tiempo (es decir estacionarios) de orden finito (es decir de parámetros agrupados).

Movimiento libre de un sistema de primer orden.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\, x(t) \qquad x(0) = x_0 \quad para \quad t = 0$$

a= ctte real positiva, negativa o cero

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\, dt$$

$$x(t) = e^{at} x_0 = e^{-t/T} x_0 \qquad T = 1/a$$

Si :

$$x_0 = x_{01} + x_{02}$$

$$x(t) = e^{at}(x_{01} + x_{02}) = e^{at} x_{01} + e^{at} x_{02}$$

Por lo que cumple con la condición de superposición para que un sistema dinámico libre sea lineal. (se cumple sólo si el coeficiente a no es función de x).
Si a es positiva, esta respuesta representa una exponencial creciente (inestable), si es cero x(t)=x(0), constante para todo t (oscilación permanente) y si a es negativa es una exponencial decreciente (estable, amortiguada).

Sistemas desacoplados (diagonales).

$$\frac{dx_1^*(t)}{dt} = \lambda_1 x_1^*(t)$$

$$\frac{dx_2^*(t)}{dt} = \lambda_2 x_2^*(t) \qquad U(t) = 0 \text{ (sistema libre)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n^*(t)}{dt} = \lambda_n x_n^*(t)$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma matricial:

$$\frac{d\chi^*(t)}{dt} = \Lambda\, \chi^*(t)$$

Donde $\chi*(t)=\begin{bmatrix} x_1*(t)\\ x_2*(t)\\ \vdots\\ x_n*(t)\end{bmatrix}$ $\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$

Ya que la solución a un sistema desacoplado: $\frac{d\chi*(t)}{dt}=\Lambda\,\chi*(t)$

está dada por: $\chi*(t)=e^{\Lambda t}\chi*(0)$

el problema para sistemas desacoplados se reduce solo a la evaluación de las λ_i que se denominan valores propios del sistema, ya que, cada respuesta en coordenadas modales $x_i*(t)$, está dada por un término exponencial $e^{\lambda_i t}x_i*(0)$ y los términos $e^{\lambda_j t}x_j*(0)$ en los que $j\neq i$ son cero.

$$\begin{bmatrix} x_1*(t)\\ x_2*(t)\\ \vdots\\ x_n*(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}x_1*(0)\\ e^{\lambda_2 t}x_2*(0)\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}x_n*(0)\end{bmatrix}$$

Este caso de coordenadas modales se define como formado por puros modos propios (los términos $e^{\lambda_i t}$).
Para encontrar la solución de la respuesta del sistema en las coordenadas originales, vemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11}e^{\lambda_1 t}x_1*(0)+\cdots+t_{1n}e^{\lambda_n t}x_n*(0)\\ \vdots\\ \vdots\\ t_{n1}e^{\lambda_1 t}x_1*(0)+\cdots+t_{nn}e^{\lambda_{n1} t}x_n*(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11}x_1*(0)\\ \vdots\\ \vdots\\ t_{n1}x_1*(0)\end{bmatrix}e^{\lambda_1 t}+\cdots+\begin{bmatrix} t_{1n}x_n*(0)\\ \vdots\\ \vdots\\ t_{nn}x_n*(0)\end{bmatrix}e^{\lambda_n t}$$

Vemos que la respuesta indica la presencia en cada término de respuesta $x_i(t)$ de cada modo propio $e^{\lambda_j t}$ para el cual $t_{ij} \neq 0$

Los valores iniciales $x_i^*(0)$ se encuentran en términos de $x_i(0)$:

$$\chi^*(0) = T^{-1}\chi(0)$$

Los vectores Vi se llaman vectores propios. Cada ecuación de vectores propios, correspondiente a un valor propio λ_i particular, consiste de n ecuaciones simultaneas, homogéneas, algebraicas, que pueden resolverse hasta lograr una constante de proporcionalidad.
Así se logran encontrar las direcciones de los vectores propios (pero no sus magnitudes). Usando estos vectores de dirección como columnas, se obtiene una matriz de transformación T.

<u>Ejemplo.</u>

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -c_1(t)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = c_1(t) - 2c_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left|(pI - A)\right| \begin{vmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p+2 \end{vmatrix} = (p+1)(p+2) = 0$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$$

$$\left|A - \lambda_i I\right| Vi = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{\,1} \\ v_1^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_1^{\,1} - v_1^{\,2} = 0$$

Como nos interesan las direcciones tomamos un valor arbitrario para una de las componentes y determinamos la otra:

Primer vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2{}^1 \\ v_2{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segundo vector propio $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación. $T = [V1 \quad V2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

La solución total es:

$$\mathrm{X(t) = X\ libre + X\ forzada} = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-2)} bu(\tau) d\tau$$

La integral del producto de dos funciones en la forma de la ecuación de X forzada se denomina *integral de convulsión*.

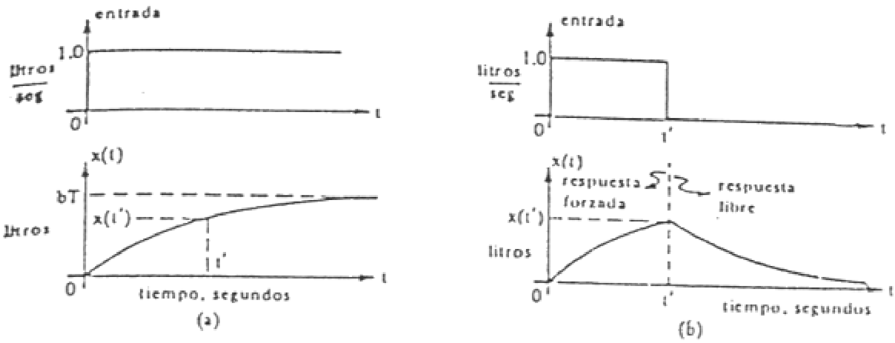
<u>Ejemplo:</u>

Si consideramos que $a = -\dfrac{1}{T}$ donde T es la constante de tiempo y u(t) sea una *entrada de paso unidad* (u(t)=0 para t<0 y u(t)=1 para $t \geq 0$)
Si el estado inicial x_0 es = 0 , x(t) = X forzada.

$$x(t) = e^{-t/T} \int_0^t e^{(\tau/T)} bd\tau = (1 - e^{-t/T})bT \qquad \text{(figura a)}$$

Si la válvula que controla la velocidad de flujo de entrada se mantiene abierta durante t´ segundos y luego se cierra, los primeros t´ segundos la solución es de X forzada y para t > t´ la solución está dada por:

$$x(t) = e^{-(t-t')/T} x'(t) \qquad \text{(figura b)}$$



Si aplicamos una función excitatriz impulso (conocida también como función delta de Dirac) $\delta(t - t_1)$ donde t1 es el instante en que se aplica el impulso.

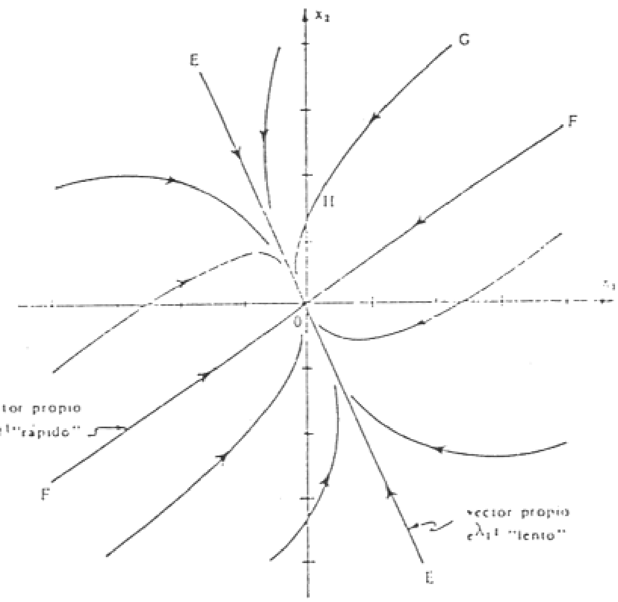
$$X \;\; forzada = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau} b\delta(\tau)d\tau$$

$$x(t) = be^{at} \; = be^{-t7T}$$

En el caso de una matriz de 2X2, según sea el valor que tome λ, habrán 2 autovectores que tendrán trayectorias según el vector propio EE que se lo denomina modo lento y o FF, modo rápido (fig. c).
Si el sistema comienza con condiciones iniciales en la ecuación que se encuentren sobre EE o FF en la figura c, entonces la respuesta permanece sobre la recta y sólo un modo propio aparece en la ecuación $\chi^*(t) = I\chi^*(0)e^{\Lambda t}$.

De los dos exponenciales especificados $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$, λ_2 es el modo más rápido. Cualquier trayectoria (diferente a las rectas) por ejemplo GH está caracterizada por contenidos de ambos modos. Sin embargo como el modo rápido decae más rápidamente que el modo lento, la última parte de la trayectoria es asintótica a EE (la dirección del modo lento). En general, los sistemas libres con modelos lineales para los cuales $|A| \neq 0$, tienen propiedades globales de estabilidad, ya que tienen únicamente un punto de equilibrio (en nuestro ejemplo es el origen de coordenadas).

Trayectoria Libre y Modos de Respuesta



Trayectorias lineales del sistema de las dos especies

Figura c

Observabilidad y controlabilidad.

Hemos visto que los sistemas pueden describirse por las ecuaciones de estado y que las respuestas pueden descomponerse en componentes independientes denominadas modos propios.
Debido a que estos modos están desacoplados, ofrecen el punto de comienzo ideal para examinar las preguntas de la observabilidad y controlabilidad.

- Para que una salida observe completamente un sistema, debe tener componentes de todos los modos propios. Análogamente para que una entrada U controle completamente un sistema, debe tener algún efecto sobre los modos propios.
- Para que un sistema sea observable, su salida no debe excluir a ninguno de los modos propios. Cada modo tiene su dirección característica en el espacio de estado; esta dirección se describe por su vector propio correspondiente Vi. Así para que un sistema con una sola salida sea observable, la dirección del espacio de estado asociada con la salida, el elemento n del vector fila C

(recordar. $\frac{d\chi^*(t)}{dt} = \Lambda\,\chi^*(t)$ y $Y(t) = C\chi(t) + DU(t)$)

debe ser tal que:

$$CVi \neq 0 \text{ para cualquier i}$$

Una interpretación geométrica de este resultado es que C no debe ser ortogonal a ningún vector propio real.
La determinación de la controlabilidad de una entrada escalón también se relaciona a los modos propios del sistema. La interpretación geométrica es que una entrada alineada con un vector real excita solamente ese modo propio del sistema. Por lo tanto para un sistema controlable de una sola entrada, la matriz de coeficiente de la entrada B, que es un vector columna, no debe estar en la dirección de ninguno de los valores propios del sistema.

<u>Ejemplo:</u> $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Si $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, los valores propios son -1 y -2

los vectores propios $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con los que conformamos la matriz T

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Para analizar controlabilidad se debe resolver $T^{-1}B$:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ X_2 no es controlable por U

Para analizar obsrvabilidad se debe resolver CT:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ todas las salidas son observables

EJERCICIO Nº 1.

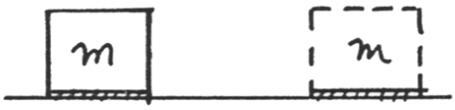
Expresar como variables de estado y encontrar los puntos de equilibrio (donde $\frac{dx_1}{dt}$ y la $\frac{dx_2}{dt}$ son igual a cero). Graficar las trayectorias.

a) Péndulo sin fricción

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\,sen\theta = 0$$ (momento de inercia + fuerza de campo gravitatorio).

b) Sistema masa-resorte sin elasticidad.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0$$



c) Péndulo con fricción.

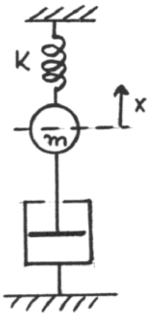
$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgl\,sen\theta = 0$$ (f(x1), fricción).

EJERCICIO Nº 2.

La ecuación de Newton para un sistema libre es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = 0$$ m = masa b = coeficiente viscoso lineal

a) Haciendo $x = x_1$ y $\frac{dx}{dt} = x_2$ (la velocidad), determinar la matriz solución S(t).
b) Obtener los autovectores de la matriz A y diagonalizar.
c) Graficar las trayectorias en el plano de fase.



EJERCICIO Nº 3.

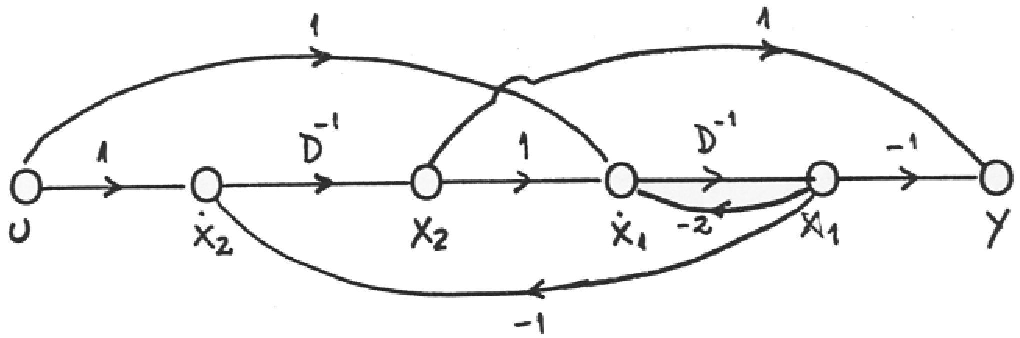
El desplazamiento x de un sistema oscilatorio, se describe por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$ siendo: k = 5, m = 1, b = 2.

Haciendo $x = x_1 \quad y \quad \frac{dx}{dt} = x_2$, obtener la matriz modal T que convierte la matriz A a la forma canónica modificada.

EJERCICIO Nº 4.

Para el siguiente diagrama de flujo de señal de un sistema de 2º orden:



Determinar:

a) La forma canónica Λ

b) Obtenga $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

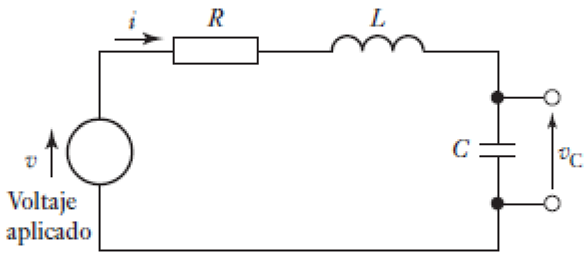
Raices repetidas =-1

$$[y] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO Nº 5.

En la Figura se muestra un sistema resistor-inductor-capacitor
Hallar las ecuaciones de estado

$$v = v_R + v_L + v_C$$



$$v = iR + L\frac{di}{dt} + v_C$$

$$i = C(dv_C/dt);$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}vc + \frac{1}{L}v$$

$$\frac{dvc}{dt} = \frac{1}{C}i$$

$X_1(t)=i(t)$

$X_2(t)= vc(t)$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}v$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-R/L & -1/L\\ 1/C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/L\\ 0\end{bmatrix}v$$

$$[y] = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

EJERCICIO Nº 6.

Para el caso de dos parejas victima – victimario, que siguen las siguientes relaciones en su variación:

$$\frac{dx_1}{dt} = a.x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -b.x_1$$

Siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las desviaciones respecto del equilibrio de las respectivas poblaciones, si N1(T) y N2(t) son cada una de las poblaciones totales, y N1s y N2s las poblaciones en estado de equilibrio, se puede expresar que

N1(t) = N1s + n1(t)
N2(t) = N2s + n2(t)

Encontrar la matriz A, los valores propios, vectores propios y solución en coordenadas modales.

EJERCICIO Nº 7.

a) Analizar si el sistema es estable.
b) Analizar observabilidad y controlabilidad

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$[y]=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

=0 raíces= $3\pm j\frac{\sqrt{8}}{2}$ = inestable

Observabilidad: $\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ det= 3 , es observable

Controlabilidad: $[B \quad AB]$= $\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ det= -3 es controlable

EJERCICIO Nº 8

Dada la matriz A: $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ encontrar la solución homogénea (sistema libre)

s^2-3s-4=0 raíces -1 y 4 = inestable

$[\lambda I - A]=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -3\\ -2 & \lambda-1\end{bmatrix}$ para $\lambda=-1$ $\begin{bmatrix}-3 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ autovector 1

para $\lambda=4$ $\begin{bmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3/2\\ 1\end{bmatrix}$ autovector 2

$$\begin{bmatrix}x1\\ x2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}e^{4t}+\frac{2}{5}e^{-1t} & \frac{3}{5}e^{4t}-\frac{3}{5}e^{-1t}\\ \frac{2}{5}e^{4t}-\frac{2}{5}e^{-1t} & \frac{2}{5}e^{4t}+\frac{3}{5}e^{-1t}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}x_{1(0)}\\ x_{2(0)}\end{bmatrix}$$

EJERCICIO Nº 9.

a) Hallar el modelo en el espacio de estados para la ecuación diferencial de 2° orden dada por:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+5y=u(t)$$

b) Encontrar la función de transferencia
-a partir de la ecuación diferencial
-a partir de modelo en el espacio de estados

c) graficar las trayectorias

$X_1(t)=y(t)$

$X_2(t)=\dot{y}\,(t)$

$$\dot{x_2} = u(t) - 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$[y] = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)} = [C]*[sI-A]^{-1}*[B] = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}s & -1\\ 5 & s-6\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2-6s+5}$$

$$g(t)=\frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t}$$

EJERCICIO Nº 10.

Determinar la función de transferencia si el modelo de estado está dado por:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$[y] = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)} = [C]*[sI-A]^{-1}*[B] = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

$$g(t)=2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Profesor Titular: Ing. María Susana Bernasconi
JTP: Ing Fernando Geli