# UNIDAD 5
# Estabilidad
# Criterio de Routh

Profesores:
Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com

# POLOS, CEROS Y ESTABILIDAD

Un requerimiento importante para un sistema de control es que debe ser estable. Esto significa que si al sistema se aplica una entrada de magnitud finita , entonces la salida debería también ser finita (y nunca infinita); es decir, incrementarse dentro de un límite.

Para sistemas lineales el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado.

Los ***polos*** son las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia y los ***ceros*** las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia.

## ESTABILIDAD

Un sistema se puede definir como ***estable*** si toda entrada acotada, es decir, finita, produce una salida acotada. De manera alternativa, un sistema se puede definir como estable si al estar sujeto a una entrada impulso la salida tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Si, al responder a la entrada impulso, la salida del sistema tiende a infinito a medida que el tiempo tiende a infinito, entonces el sistema es inestable.

## POLOS Y CEROS

La función de transferencia en lazo cerrado $G(s)$ de un sistema, en general se puede representar como:

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

Y, si las raíces del denominador y del numerador se establecen como:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

$z_1, z_2, \dots , z_m$ son los ceros.
$p_1, p_2, \dots , p_n$ son los polos.
$K$ es una constante o ganancia del sistema.

Los ceros son los valores de $s$ para los cuales la función de transferencia se convierte en cero. Los polos son los valores de $s$ para los cuales la función de transferencia es infinita, es decir, éstos hacen que el valor del denominador sea cero.

Los polos y los ceros pueden ser cantidades reales o complejas. En general, los polos y los ceros se pueden escribir como:

$$s = \sigma + j\omega$$

$\sigma$ es la parte real.
$j\omega$ es la parte imaginaria.

# ESTABILIDAD Y POLOS

La estabilidad de un sistema se puede determinar considerando cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada impulso. Con un sistema estable la salida deberá tender a cero con el tiempo, y con un sistema inestable la misma deberá crecerá con el tiempo.

- Considere un sistema sin ceros y un polo en $-2$. La función de transferencia $G(s)$ será: $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$$\theta_0(s) = \frac{1}{s+2}\theta_i(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = e^{-2t}$$

El valor de $e^{-2t}$ decrece con el tiempo, haciéndose cero en un tiempo infinito. Por lo tanto el sistema es **ESTABLE**.

- Considere un sistema sin ceros y un polo en 2. La función de transferencia $G(s)$ será: $G(s) = \dfrac{1}{s-2}$

$$\theta_0(s) = \frac{1}{s-2}\theta_i(s) = \frac{1}{s-2} \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = e^{2t}$$

El valor de $e^{2t}$ crece con el tiempo, haciéndose infinito en un tiempo infinito. Por lo tanto el sistema es **INESTABLE.**

- Considere un sistema sin ceros y con polos en $(-2 \pm j1)$. La función de transferencia $G(s)$ será:

$$G(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)][s-(-2-j1)]} \longrightarrow \theta_0(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)][s-(-2-j1)]}$$

Ésta es una transformada de Laplace de la forma $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ y así la transformada inversa es $\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$.

$$\theta_0 = \frac{1}{2j}\left(e^{-2t}e^{jt} - e^{-2t}e^{-jt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)$$

sen $t$

$$\theta_0 = e^{-2t} sent$$

Ésta es una onda senoidal, la cual tiene una amplitud que decrece con el tiempo de acuerdo con $e^{-2t}$. De esta manera, la salida decae con el tiempo y, por lo tanto, el sistema es **ESTABLE.**

En general, cuando a un sistema se aplica un impulso, la salida es de la forma de una suma de términos exponenciales. Si sólo 1 de los términos exponenciales es una exponencial creciente, entonces la salida crece de manera continua con el tiempo y el sistema es ***inestable***. Esta situación se producirá si uno de los polos tiene parte real positiva y, de esta manera, el denominador de la función de transferencia incluye un término $(s-a)$.
Cuando existen pares de polos que involucran $\pm j\omega$ entonces la salida es siempre una oscilación. Esta oscilación es estable si la parte real del par de polos es negativa e inestable si es positiva.

Si sólo interesa la estabilidad, los polos de la función de transferencia son importantes y los valores de los ceros del sistema son irrelevantes.

# CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH-HURWITZ

Determinar la estabilidad de un sistema dada su función de transferencia implica también determinar las raíces del polinomio del denominador de la función y considerar si cualquiera de éstas son o no positivas. Sin embargo, las raíces no se pueden obtener con facilidad si el polinomio del denominador es de la forma:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

y $n$ es mayor que 3 o 4. El criterio de Routh-Hurwitz, sin embargo, representa un método que se puede utilizar en tales situaciones.

La ***primera prueba*** que se aplica es revisar los coeficientes de los términos de la expresión anterior. Si éstos son todos positivos y ninguno es cero, entonces el sistema puede ser estable. Si cualquiera de los coeficientes es negativo, entonces el sistema es inestable. Si cualquiera de los coeficientes es cero, entonces, el sistema podría ser críticamente estable.

Para sistemas que tienen denominadores que podrían ser estables, se lleva a cabo una segunda prueba. Los coeficientes de la ecuación se escriben en un orden particular denominado “arreglo de Routh”. Este es:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

Los siguientes renglones se determinan mediante el cálculo a partir de los elementos de los 2 renglones inmediatamente anteriores.

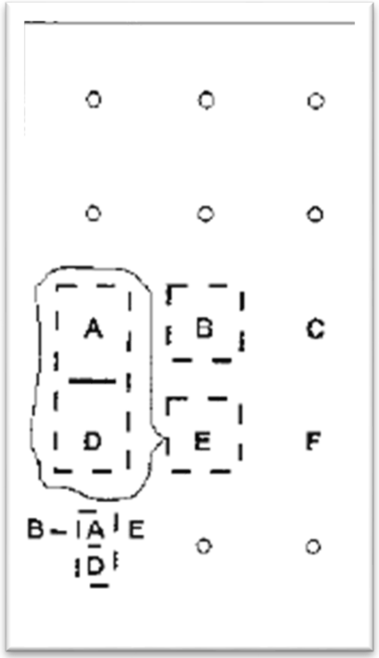
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\cdots$ |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\cdots$ |
| . | . | . | . | ... |
| . | . | . | . | .. |
| . | . | . | . | . |
| $s^2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
| $s^1$ | $y_1$ | $y_2$ | | |
| $s^0$ | $z_1$ | | | |

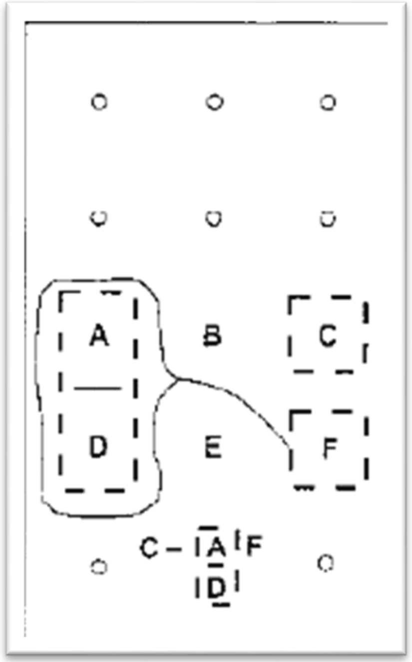
Los elementos del tercer renglón se obtienen a partir de los elementos de los 2 renglones previos mediante:

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} \qquad b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5}$$

Los elementos del cuarto renglón se obtienen a partir de los elementos de los 2 renglones previos mediante:

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2 \qquad c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3$$



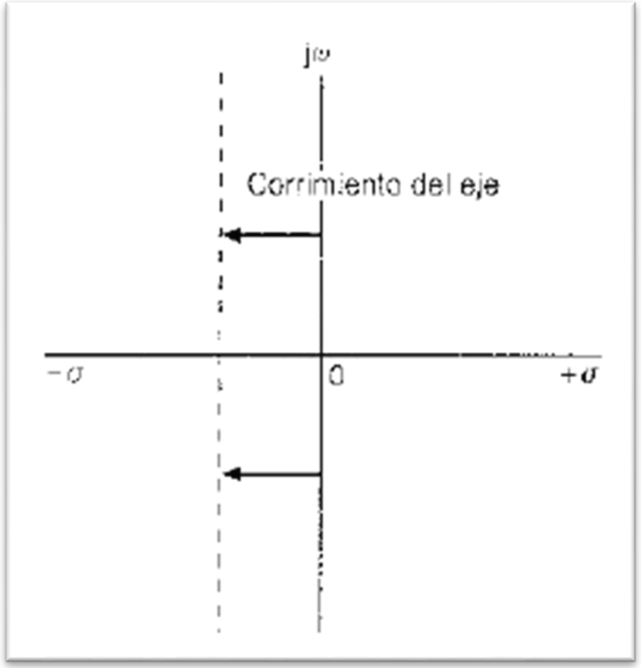




Cuando el arreglo se ha completado, éste se revisa. Si todos los elementos de la primera columna son positivos, todas las raíces tienen partes reales negativas, y están en el lado izquierdo del diagrama de patrón de polos y ceros. Entonces, el sistema es estable si todos los elementos de la primera columna son positivos.

Si en la primera columna hay elementos negativos, el número de cambio de signo en la primera columna es igual al número de raíces con parte reales positivas.

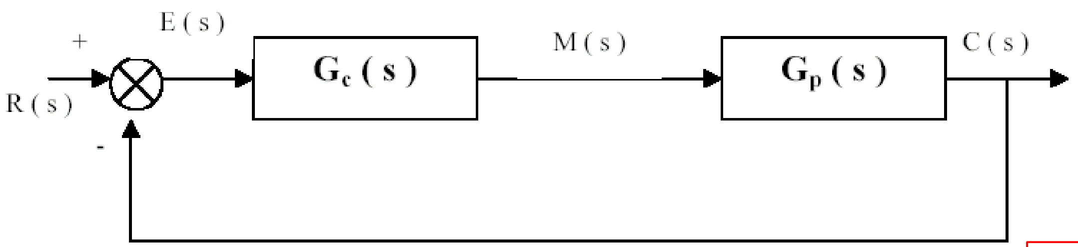
## ESTABILIDAD RELATIVA

La construcción del arreglo de Routh y la aplicación del criterio de que la primera columna del arreglo sólo debe contener términos positivos, permite decidir si el sistema tiene o no todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano $s$ y, que de esta manera, el sistema sea estable o no. Sin embargo, a menudo esto es útil para saber qué tan cerca de la inestabilidad está un sistema estable.

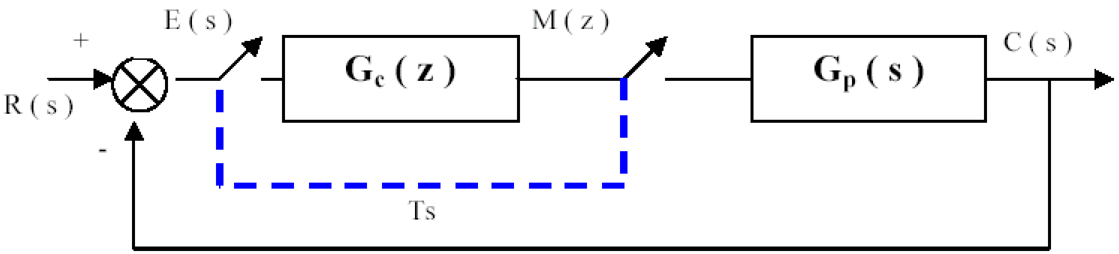



Para lograrlo, hay que ver qué tan cerca del eje imaginario están las raíces. Esto se puede hacer recorriendo el eje a la izquierda una cantidad definida y encontrar si el corrimiento da o no por resultado un sistema inestable medido a partir del nuevo eje.

Recorrer el eje a $-\sigma$ significa que todos los valores de $s$ del denominador de la función de transferencia se reemplacen por $(r - \sigma)$ y en la ecuación en $r$ es donde ahora se aplica la prueba de estabilidad.




$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$




$$G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$$

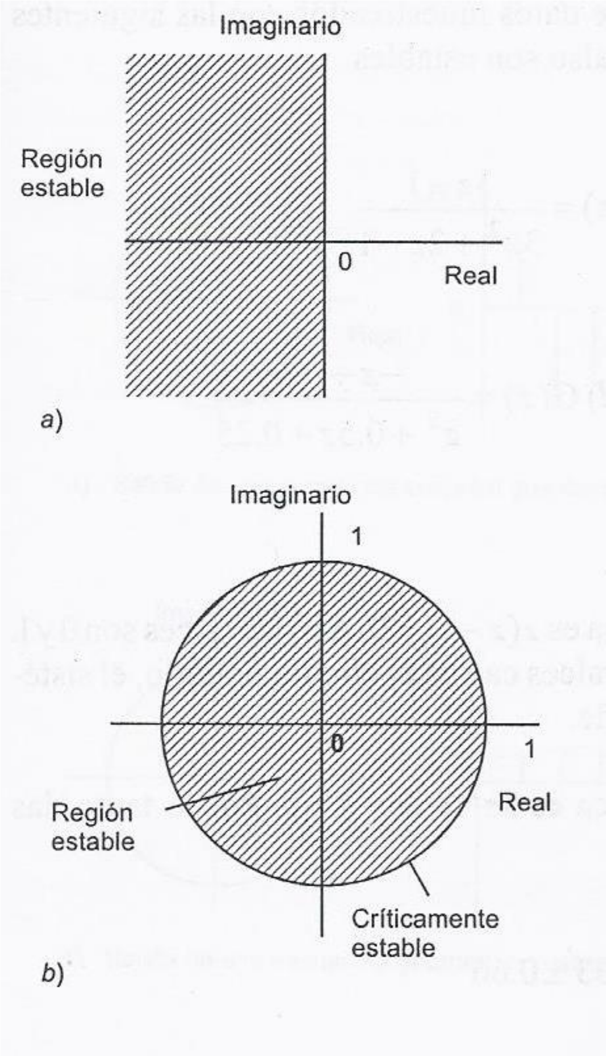
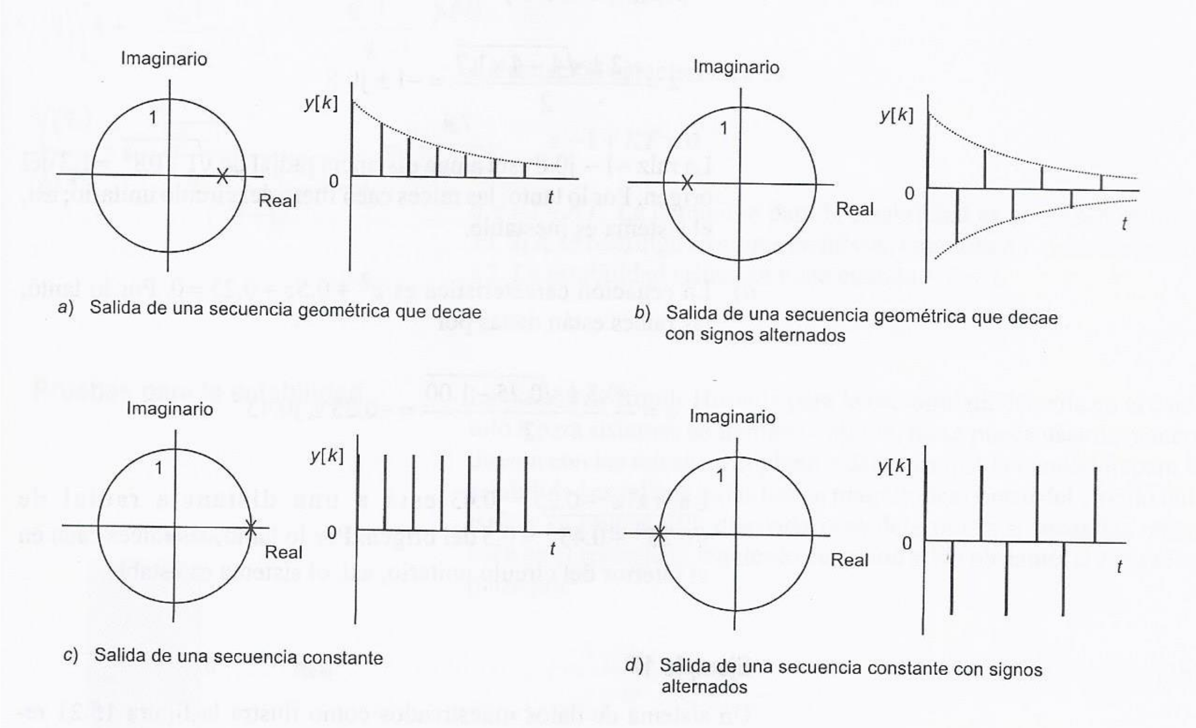



**Figura 15.25** Regiones de estabilidad para los polos: *a*) plano *s*, *b*) plano *z*

# Estabilidad

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

Para el caso de señales **continuas**, el sistema será estable si todos los polos de la Función de Transferencia en lazo cerrado caen en el semiplano izquierdo del plano *s*, por lo que *s* debe tener $\sigma$<0 .
Debido a que $e^{\sigma T}$ es la magnitud de *z,* es decir |z|, la condición de estabilidad en un **sistema de datos muestreados**, los polos de la Función de Transferencia pulso en lazo cerrado, deben caer dentro del círculo unitario (radio 1 y centro en el origen). Se dice que un sistema es críticamente estable si tiene un polo en el círculo.

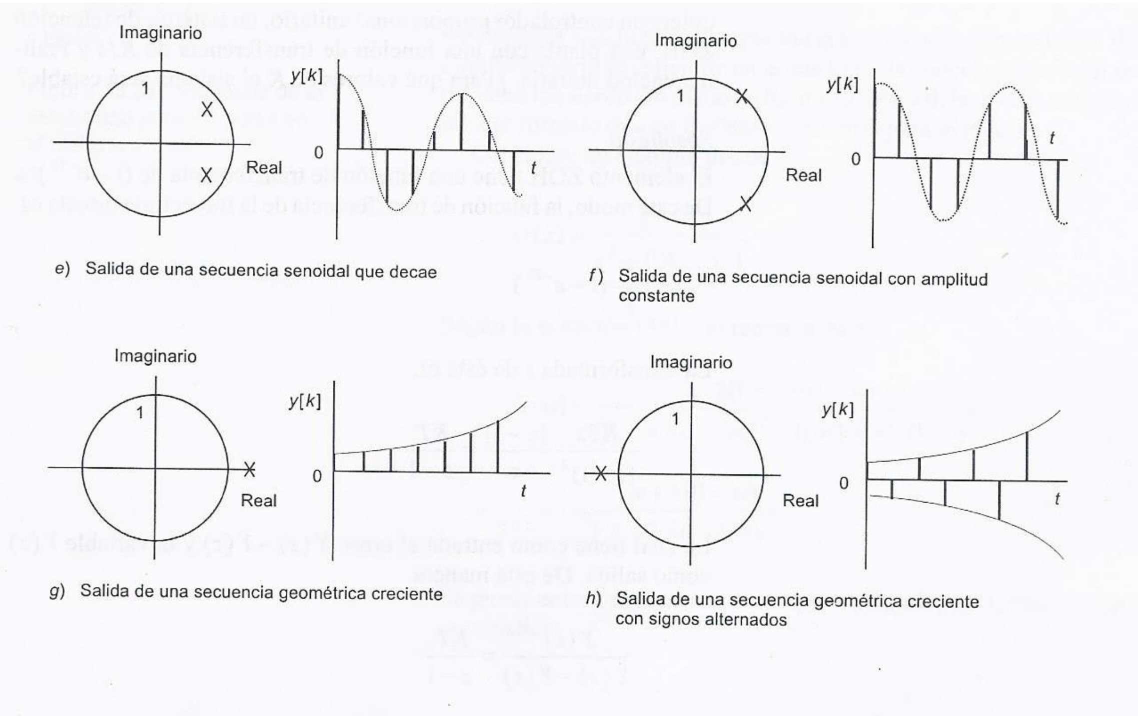



*a)* Salida de una secuencia geométrica que decae

*b)* Salida de una secuencia geométrica que decae con signos alternados

*c)* Salida de una secuencia constante

*d)* Salida de una secuencia constante con signos alternados




*e)* Salida de una secuencia senoidal que decae

*f)* Salida de una secuencia senoidal con amplitud constante

*g)* Salida de una secuencia geométrica creciente

*h)* Salida de una secuencia geométrica creciente con signos alternados

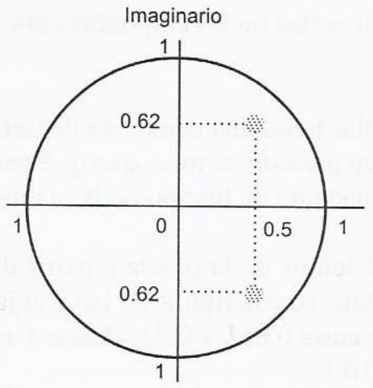
**Figura 15.27** Efecto de la localización de las raíces en respuesta a una entrada impulso

$$G(z)=\frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63}$$

Ésta tiene la ecuación característica

$$z^2-z+0.63=0$$

$$z=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4\times 0.63}}{2}=0.50\pm j0.6$$



# Prueba de Routh-Hurwitz

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(z) = \frac{2.z+1}{z^2+0{,}4.z-0{,}1}$$

$$G(w) = \frac{2.\frac{(1+w)}{(1-w)}+1}{\left(\frac{(1+w)}{(1-w)}\right)^2+0{,}4.\frac{(1+w)}{(1-w)}-0{,}1} = \frac{(w+3)(1-w)}{0{,}5w^2+2{,}2.w+1{,}3}$$

| | | |
|---|---|---|
| $w^2$ | 0.5 | 1.3 |
| $w^1$ | 2.2 | |
| $w^0$ | 1.3 | |

Como en el arreglo de Routh no *hay cambios* de signo en la primera columna, el sistema es estable