Sistemas de Automatización
AÑO 2021

UNIDAD 5
Análisis en Frecuencia

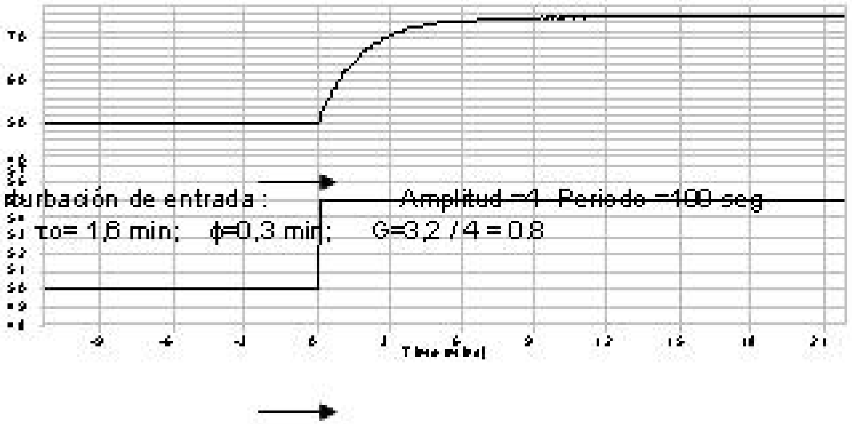
Profesores:
Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com

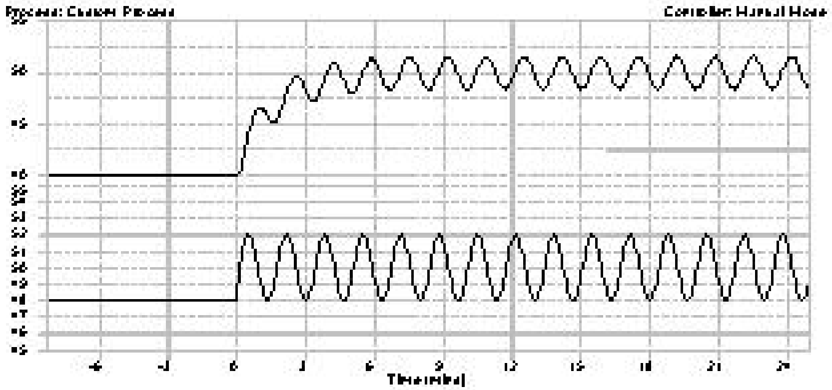
Bibliografía:
Ingeniería de Control- W. BOLTON
Ingeniería de Control Moderna-K.OGATA
Control Automático de Procesos- C.SMITH, A. CORRIPIO

Primer orden $\tau 1 = 100$ seg K=5

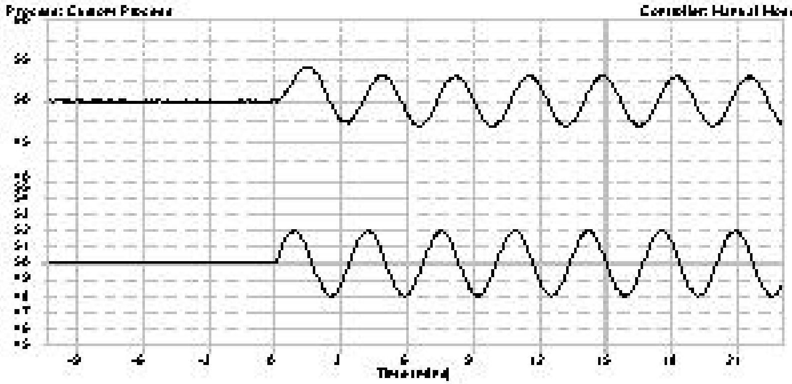
Perturbación de entrada : Amplitud =4 Periodo =100 seg
τo= 1,6 min; ϕ=0,3 min; G=3,2 / 4 = 0.8



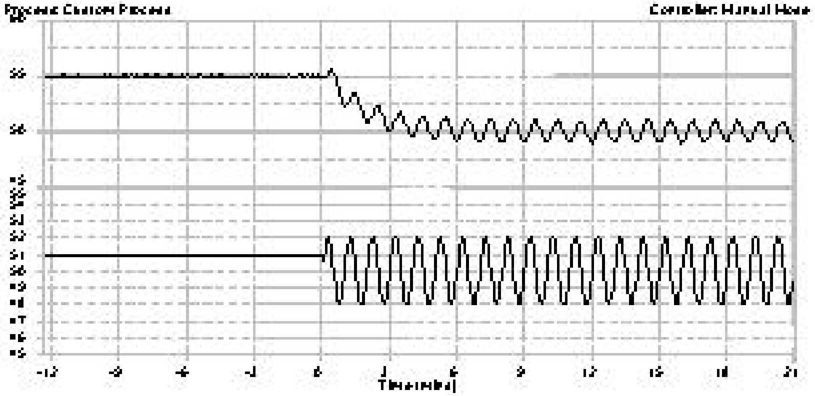
Perturbación de entrada : Amplitud =4 Periodo =100 seg
τo= 1,6 min; ϕ=0,3 min; G=3,2 / 4 = 0.8



Perturbación de entrada : Amplitud =4 Periodo =200 seg
τo= 3,2min; ϕ=0,6 min; G=4 / 4 = 1

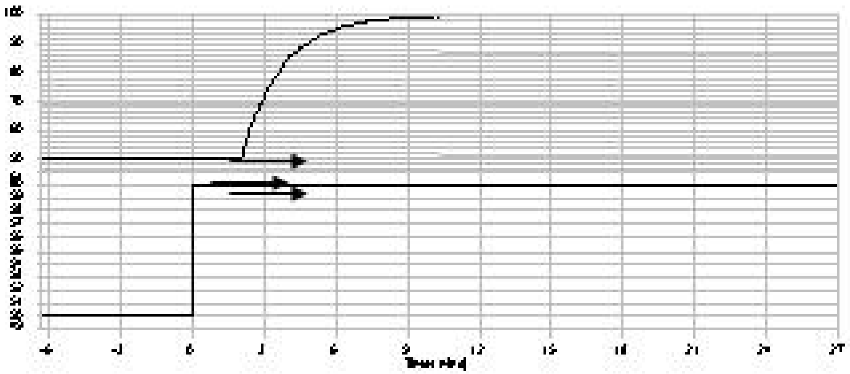


Perturbación de entrada : Amplitud =4 Periodo =60 seg
τo= 1 min; ϕ=0,2min; G=1,1 / 4 = 0.275



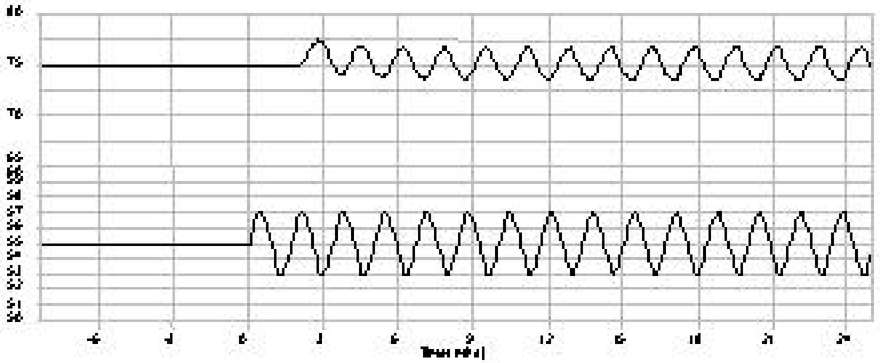
Primer orden + tiempo muerto

τd= 120 seg τ1= 100 seg   K=5



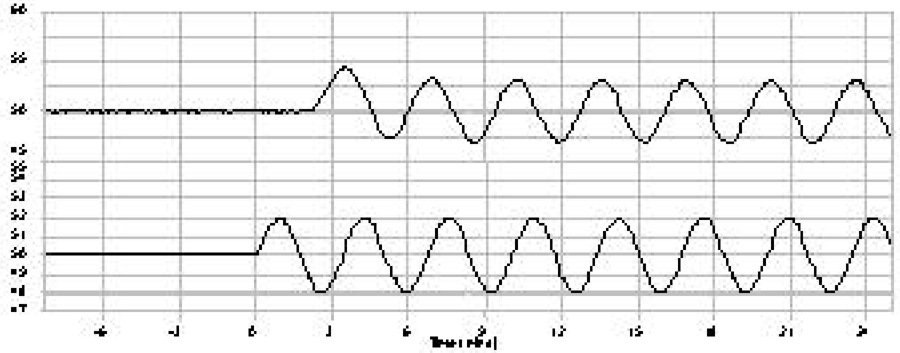
Perturbación de entrada : Amplitud =4   Periodo =100 seg

τo= 1,7 min; ϕ=2,1min   G=3,5 / 4 = 0.875



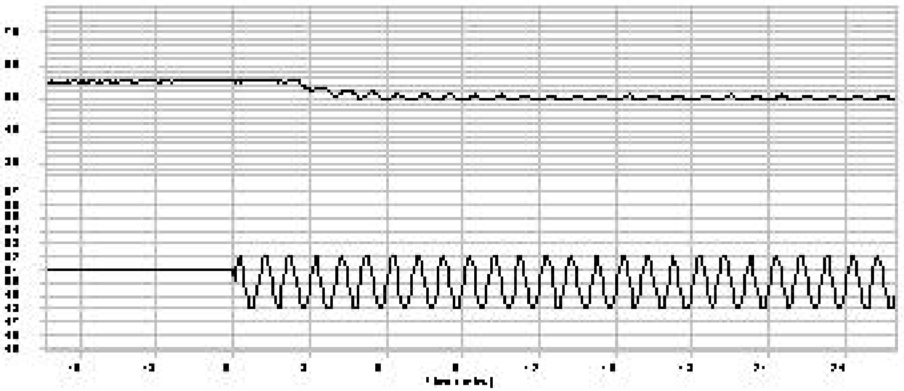
Perturbación de entrada: Amplitud: 4   Período=200 seg

τo= 3,4 min; ϕ=2,2min   G=6,1 / 4 = 1,5



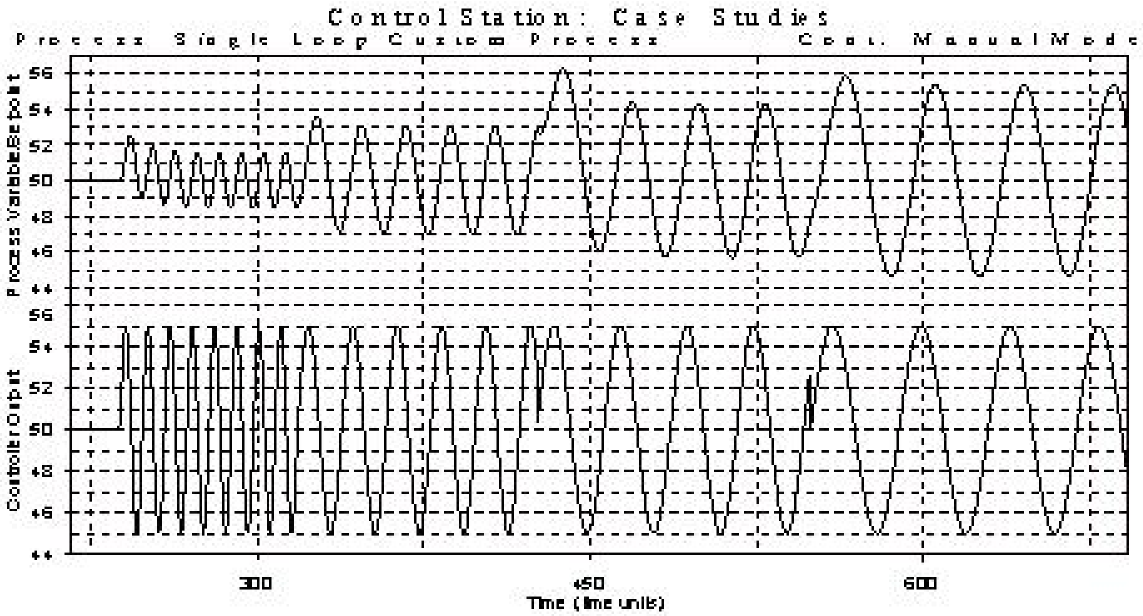
Perturbación de entrada : Amplitud =4   Periodo =60 seg

τo= 1 min; ϕ=2,2min ;   G=1,9 / 4 = 0.475



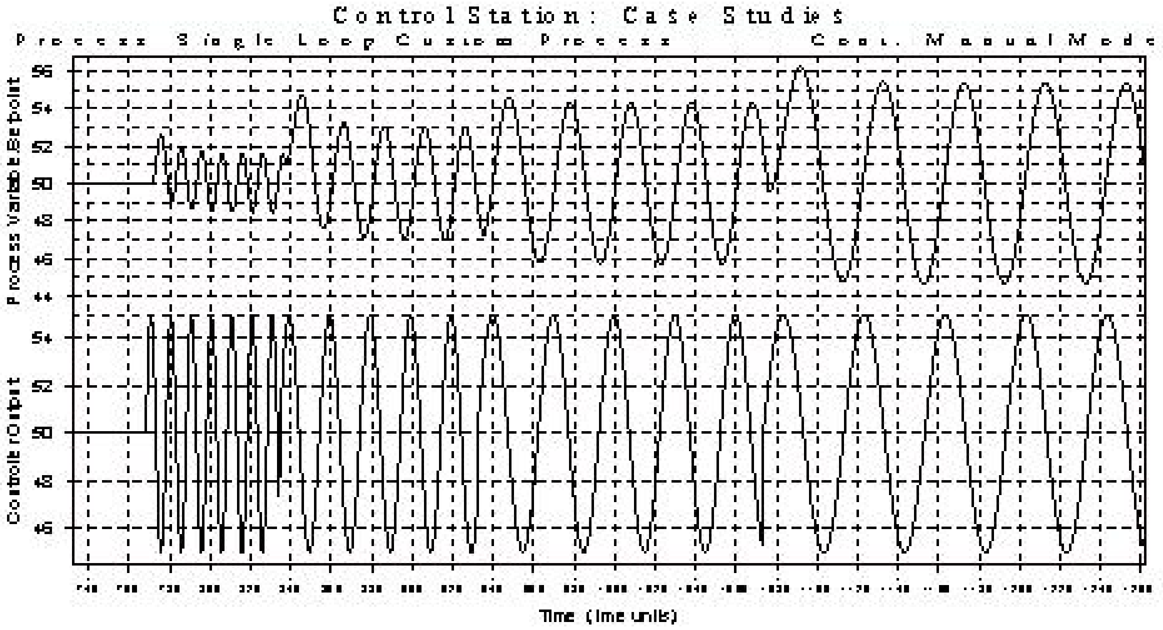
Proceso capacitivo de pimer orden:

$$G(s) = \frac{k}{\tau.s + 1}$$



Proceso capacitivo de pimer orden + tiempo muerto:

$$G(s) = \frac{k.e^{-to.s}}{\tau.s + 1}$$



En capítulos unidades se consideró la salida de sistemas sujetos a una entrada impulso, escalón o rampa. Este capítulo amplía dicha consideración al caso cuando la entrada es senoidal.

El término ***respuesta en frecuencia*** se define como la respuesta en estado estable de un sistema a una entrada senoidal; la respuesta se monitorea sobre un intervalo de frecuencias.

La respuesta en estado estable es la que permanece después de que todos los transitorios han decaído a cero. Existen varias técnicas para analizar los datos de la respuesta en frecuencia. Estudiaremos 2 de ellas: la de Bode y la de Nyquist.

Si a un sistema lineal se le aplica una entrada senoidal, la salida es también una señal senoidal y de la misma frecuencia. La salida puede diferir de la entrada en ***amplitud*** y en ***fase***.

El cociente de la amplitud de la salida entre la amplitud de la entrada en general se conoce como <u>magnitud</u> (o razón de amplitud o ganancia).

El corrimiento de fase de la senoidal de salida en relación con la de la entrada se denomina <u>fase</u>.

La variación de la magnitud y la fase con la frecuencia se denomina respuesta en frecuencia del sistema.

La ***función de transferencia $G(s)$*** de un sistema en general es:

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - z_n)}$$

La salida será:

$$\boxed{\theta_0(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - z_n)} * \theta_i(s)}$$

Si la entrada es senoidal: $\theta_i = a \operatorname{sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad \theta_i(s) = \dfrac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$\boxed{\theta_0(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - z_n)} * \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

La solución será: $\theta_0(t) = \textit{términos transitorios} + \textit{términos en estado estable}$

Los términos transitorios desaparecen con el tiempo. Si sólo se tiene interés en el estado estable, la solución que se obtiene es:

$$\boxed{\theta_0(t) = a|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \emptyset)}$$

La salida en estado estable es senoidal con la misma frecuencia angular ω que la entrada.
$|G(j\omega)|$ es la magnitud de la función de transferencia $G(s)$ cuando s se reemplaza por $j\omega$.
La función $G(j\omega)$, se denomina ***función de respuesta en frecuencia***.

Generalizando:

$$G(s)=\frac{\theta o}{\theta i} \qquad \theta i=\frac{a\omega}{(s^2+\omega^2)} \longrightarrow \theta o = G(s)*\frac{a\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

$$G(s)*\frac{a\omega}{(s^2+\omega^2)}=\frac{A}{(s+j\omega)}+\frac{B}{(s-j\omega)}$$ + (Términos para los polos de G(s))

$$A=\lim_{s\to -j\omega}\left[(s+j\omega)G(s)*\frac{a\omega}{(s^2+\omega^2)}\right]=\frac{G(-j\omega)a\omega}{(-2j\omega)}$$

$$B=\lim_{s\to +j\omega}\left[(s-j\omega)G(s)*\frac{a\omega}{(s^2+\omega^2)}\right]=\frac{G(j\omega)a\omega}{(2j\omega)}$$

$$r=a+jb$$
$$a=|r|*\cos\phi$$
$$b=|r|*sen\phi$$
$$r=|r|(\cos\phi+jsen\phi)$$
$$r=|r|*e^{j\phi}$$

$$\theta o=\frac{a|G(j\omega)|}{2j}\left[\frac{-e^{-j\varphi}}{(s+j\omega)}+\frac{e^{j\varphi}}{(s-j\omega)}\right]$$ + (Términos de G(s))

$$\theta o(s) = \frac{a|G(j\omega)|}{2j}\left[\frac{-e^{-j\varphi}}{(s+j\omega)} + \frac{e^{j\varphi}}{(s-j\omega)}\right]$$ + Términos de G(s)

Al antitransformar, podemos encontrar θo(t)

$$\theta o(t) = \frac{a|G(j\omega)|}{2j}\left[(-e^{-j\varphi}) * (e^{-j\omega t}) + (e^{j\varphi}) * (e^{j\omega t})\right]$$ + Términos transitorios

$$\theta o(t) = a|G(j\omega)|\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}\right]$$ + Términos transitorios

$$sen(\omega t) = \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$

Pasado el transitorio:

$$\boxed{\theta o(t) = a|G(j\omega)|[sen(\omega t + \varphi)]}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{\tau.s+1}$$

$$x(t)=X_0.sen\omega t$$

$$X(s)=\frac{X_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s)=\frac{K.X_0\omega}{(\tau.s+1).(s^2+\omega^2)} \longrightarrow$$ Aplicando transformada de Laplace

$$\downarrow$$

$$y(t)=\frac{K.X_0\omega.\tau}{(1+\omega^2\tau^2)}.e^{-t/\tau}+\frac{K.X_0}{(1+\omega^2\tau^2)}\left[-\omega\tau.\cos\omega t+sen\omega t\right]$$

Teniendo en cuenta que: A cos at + B sen at = r sen (at + θ) $\longrightarrow r=\sqrt{A^2+B^2} \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$

$$y(t)=\frac{K.X_0\omega.\tau}{(1+\omega^2\tau^2)}.e^{-t/\tau}+\frac{K.X_0}{(1+\omega^2\tau^2)}.sen(\omega t+\theta) \quad \left\{ \theta=\tan^{-1}(-\omega t) \quad =-\tan^{-1}(\omega t) \right.$$

De la misma manera que se habló de $G(s)$ en el dominio de s se puede hablar de $G(j\omega)$ siendo la función de transferencia $G(s)$ en el dominio de la frecuencia.

$G(j\omega)$ se puede encontrar al reemplazar todos los valores de s por $j\omega$ y, así, reordenar la expresión para obtenerla en la forma que permite separar las partes real e imaginaria y, por lo tanto identificar la magnitud y la fase.

Ejemplo:

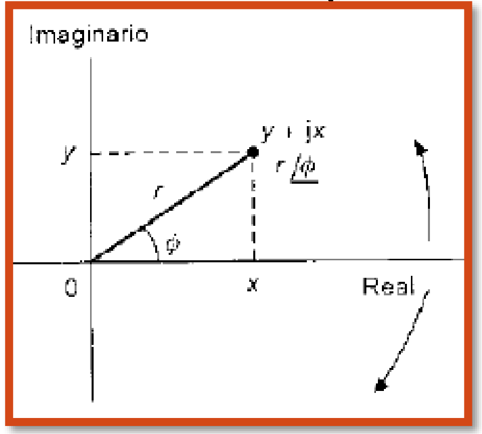
$$G(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} * \frac{-j\omega+2}{-j\omega+2} = \frac{-j\omega+2}{\omega^2+4} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{2}{\omega^2+4} - \frac{j\omega}{\omega^2+4}$$

La <u>magnitud</u> está dada por:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega^2+4}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega^2+4}\right)^2} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}$$

La <u>fase</u> está dada por:

$$\tan \emptyset = \frac{-\frac{\omega}{\omega^2+4}}{\frac{2}{\omega^2+4}} = -\frac{\omega}{2}$$



Otra manera de representar lo anterior es en forma polar como $r(cos\emptyset + jsen\emptyset)$, donde sobre la gráfica de la componente imaginaria contra la componente real, r es la longitud de la línea que une el origen con el punto que representa en número complejo y $\emptyset$ es el ángulo entre la línea y el eje x.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan \emptyset = \frac{y}{x}$$

RESPUESTA EN FRECUENCIA – SISTEMA DE PRIMER ORDEN

Un sistema de primer orden tiene una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} * \frac{1-\tau j\omega}{1-\tau j\omega} = \frac{1-\tau j\omega}{1+\omega^2\tau^2} \Rightarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - \frac{\tau j\omega}{1+\omega^2\tau^2}$$

La magnitud está dada por:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau\omega}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

La fase está dada por:

$$\tan\emptyset = -\frac{y}{x} = -\omega t$$

El ángulo de fase es la cantidad por la cual la salida se atrasa respecto a la entrada dado que el término y es negativo y el x, positivo:

RESPUESTA EN FRECUENCIA – SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Un sistema de segundo orden tiene una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\varepsilon\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\varepsilon\omega_n\omega}$$

Dividiendo ambos miembros por ω_n^2:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} * \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} = \underbrace{\frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}_{x} - \underbrace{\frac{j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}_{jy}$$

La <u>magnitud</u> está dada por:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

La <u>fase</u> está dada por:

$$\tan \emptyset = -\frac{y}{x} = -\frac{2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

El signo menos indica que la salida está atrasada respecto a la entrada.

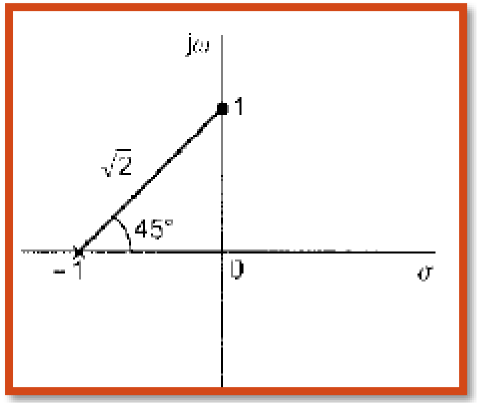
RESPUESTA EN FRECUENCIA A PARTIR DEL PATRÓN DE POLOS Y CEROS

La magnitud y la fase de $G(j\omega)$ se pueden encontrar a partir del patrón de polos y ceros para un sistema. Suponga que se tiene un sistema con una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Este sistema tiene un polo en $s = -1$. Si la entrada es una senoidal, entonces $s = j\omega$. Esto define un punto sobre el eje $j\omega$ de acuerdo con el valor de la frecuencia angular de entrada, ω. En la siguiente figura, se ha elegido que $\omega = 1 rad/s$. La función de transferencia se convierte en:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\angle 45°}$$



Pero $\sqrt{2}$ es la longitud de la línea que corre del polo al punto $s = j\omega$ y $\angle 45°$ es el ángulo que forma la línea con el eje real. De esta manera, $G(j\omega)$ es su recíproco: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\angle -45°$.

En general, para una función de transferencia con varios ceros y polos, es decir,:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+z_n)}$$

El procedimiento a seguir es:

I. Graficar las posiciones de cada polo y cada cero.
II. Marcar la posición $s = j\omega$.
III. Dibujar líneas de cada polo y cada cero al punto $s = j\omega$.
IV. Medir las longitudes y los ángulos de cada línea.
V. La función de respuesta en frecuencia es, entonces:

$$G(j\omega) = \frac{K * producto\ de\ las\ longitudes\ de\ las\ líneas\ de\ los\ ceros}{producto\ de\ las\ longitudes\ de\ las\ líneas\ de\ los\ polos}$$

$$\angle G(j\omega) = suma\ de\ los\ ángulos\ de\ las\ líneas\ de\ los\ ceros\ - suma\ de\ los\ ángulos\ de\ las\ líneas\ de\ los\ polos$$

Diagrama de BODE

El diagrama de Bode consisten en 2 gráficas: una de la magnitud (en DB) en función de la frecuencia y una del ángulo de fase graficada también en función de la frecuencia. La frecuencia se grafica usando escala logarítmica.

$$\boxed{Magnitud\ en\ dB = 20log|G(j\omega)|}$$

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)|\,|G_2(j\omega)|\,|G_3(j\omega)|\ldots$$

$$20log|G(j\omega)| = 20log|G_1(j\omega)| + 20log\,|G_2(j\omega)| + 20log\,|G_3(j\omega)|\ldots$$

De esta manera, al trazar la gráfica de $|G(j\omega)|$ en dB en función de la frecuencia se pueden sumar las contribuciones debidas a los términos de magnitud individual. Por ejemplo, si se quisiera obtener la traza de Bode para:

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j\omega)}{2 + j\omega}$$

Entonces se pueden graficar por separado las gráficas logarítmicas para las magnitudes de los elementos 5, $(1 + j\omega)$ y $\frac{1}{2+j\omega}$ y luego sumarlas para obtener la traza para $|G(j\omega)|$.

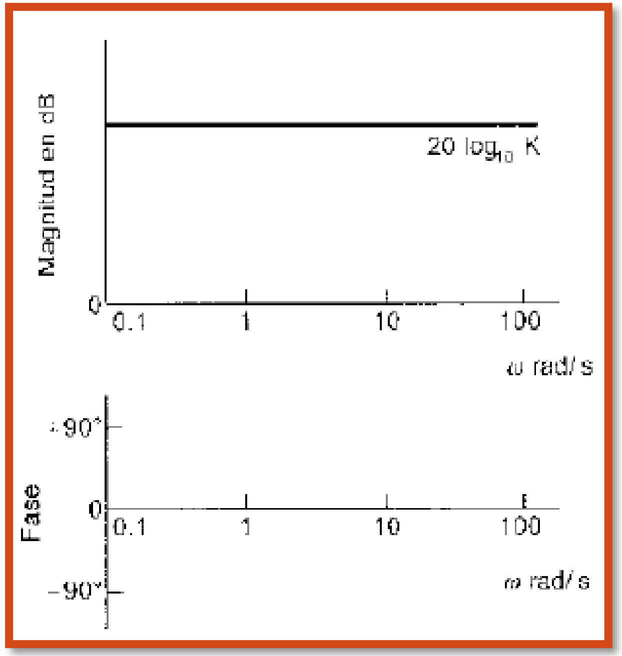
Cuando existen varios elementos, la traza de fase es sólo la suma de las fases de los elementos por separado. La escala de frecuencia que se usa para ambas trazas (magnitud y fase) es logarítmica. Esto permite a la gráfica cubrir un gran intervalo de frecuencias y también conduce a gráficas asintóticas mediante líneas rectas.

Debido a que las trazas de Bode para un sistema se pueden formar a partir de las trazas para los elementos individuales, dentro de la función de transferencia para ese sistema, es útil considerar las trazas para los elementos que por lo común se encuentran en las funciones de transferencia. Con estos elementos se pueden formar con rapidez las trazas de Bode para una amplia variedad de sistemas. Los elementos básicos que se consideran son:

- ***Ganancia constante***

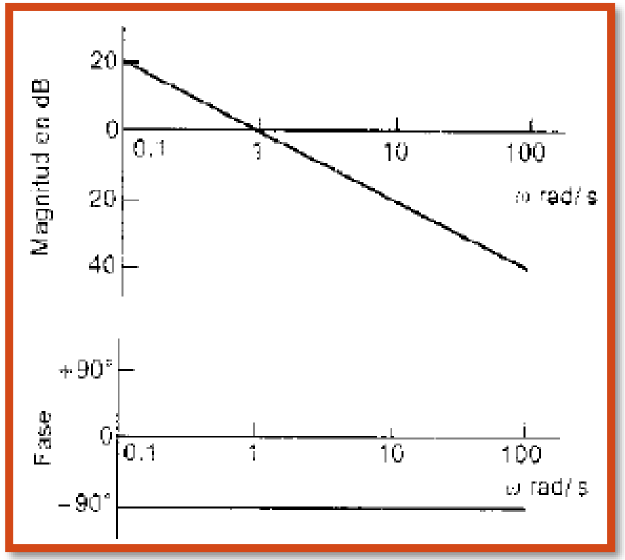
$$G(s) = K \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = 20logK$$

y la fase es cero. Las trazas de Bode son, entonces de la forma que ilustra la figura. La traza de magnitud es una línea recta de magnitud constante. Al cambiar la ganancia K, la traza de magnitud sólo se mueve hacia arriba o hacia abajo ciertos número de decibeles.



❑ *Un polo en el origen*

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = 20log\frac{1}{\omega} = -20log\omega$$



Cuando $\omega = 1\,rad/s$, entonces $|G(j\omega)| = 0$, y cuando $\omega = 10\,rad/s$, entonces $|G(j\omega)| = -20dB$.
Por lo tanto la pendiente es $-20dB/decada$ y pasa por $0dB$ en $\omega = 1\,rad/s$. .

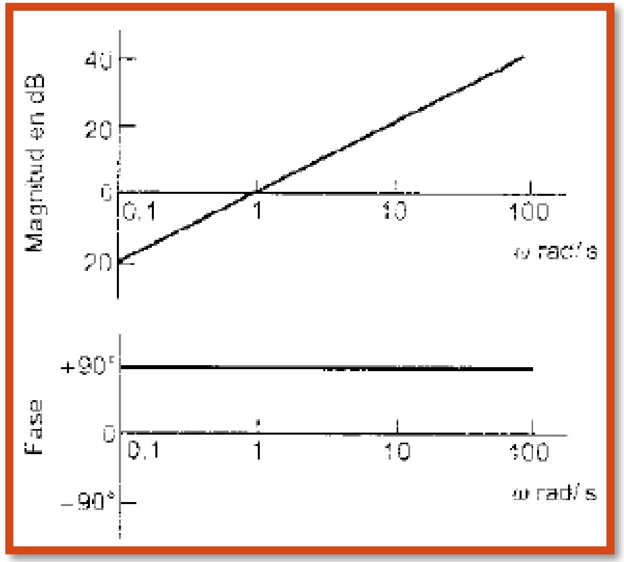
La fase de dicho sistema está dada por:

$$\tan\emptyset = \frac{(-1/\omega)}{0} = -\infty$$

La fase es constante en $-90°$ para todas las frecuencias.

❑ *Un cero en el origen*

$$G(s) = s \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = j\omega \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = 20log\omega$$



Así, cuando $\omega = 1\,rad/s$, entonces $|G(j\omega)| = 0$, y cuando $\omega = 10\,rad/s$, entonces $|G(j\omega)| = 20dB$. La traza de bode en magnitud es así, una línea recta de pendiente $+20dB$ por década de frecuencia, la cual pasa por $0dB$ en $\omega = 1\,rad/s$. La fase de dicho sistema está dada por:

$$\tan\emptyset = \frac{\omega}{0} = +\infty$$

la fase es constante en $+90°$ para todas las frecuencias.

❑ *Un polo real*

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - \frac{\tau j\omega}{1+\omega^2\tau^2} \Rightarrow |G(j\omega)| = -20log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right)$$

$$\tan\emptyset = -\omega\tau$$

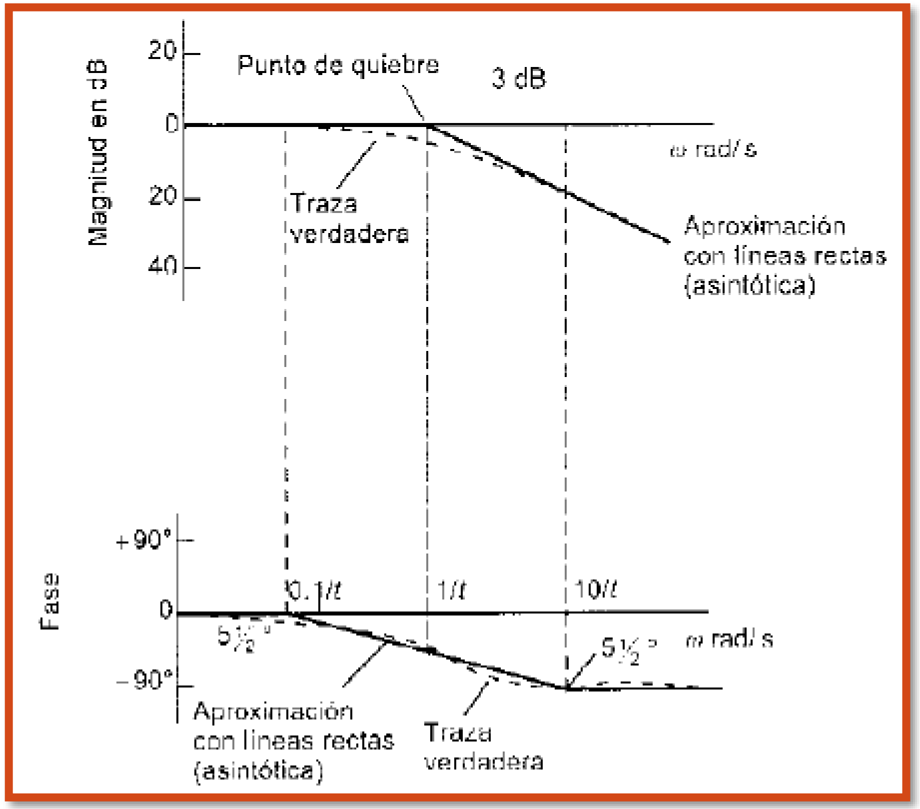
Cuando $\omega \ll 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es despreciable respecto a 1 y, de este modo, la magnitud es $|G(j\omega)| = 0$. Por lo tanto, en frecuencias bajas la traza de magnitud es una línea recta constante de valor $0dB$. Para frecuencias altas, cuando $\omega \gg 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es mucho mayor que 1 y, de esta manera, la magnitud se convierte en:

$$|G(j\omega)| = -20log\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) = -20log\omega\tau$$

Ésta es una línea recta de pendiente $-20dB$ por década de frecuencia, la cual intercepta la recta de cero decibeles cuando $\omega\tau = 1$, es decir, cuando $\omega = 1/\tau$. Para la ***frecuencia de corte*** $\omega = 1/\tau$, se tiene el ***punto de quiebre***.

Las 2 líneas rectas se conocen como aproximación asintótica a la traza verdadera. La traza verdadera se curva en la intersección de ambas líneas.

El máximo error es de $3dB$ en el punto de quiebre.



Un cero real

$$G(s) = 1 + \tau s \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = 1 + \tau j\omega \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = 20log\left(\sqrt{1 - \omega^2\tau^2}\right)$$

$$\tan \emptyset = \omega\tau$$

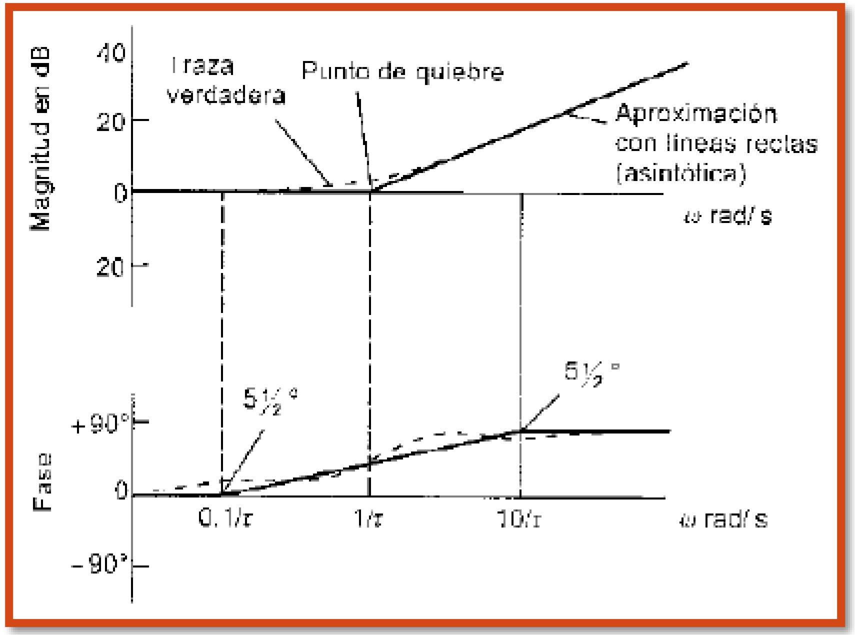
En frecuencias bajas, cuando $\omega \ll 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es insignificante respecto a 1 y, así, la magnitud es $|G(j\omega)| = 0$. En frecuencias altas, cuando $\omega \gg 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es mucho mayor que 1 y, de esta manera, la magnitud se convierte en:

$$|G(j\omega)| = -20log(\omega\tau\,)$$

Ésta es una línea recta de pendiente $20dB$ por década de frecuencia con un punto de quiebre en $\omega = 1/\tau$.

El máximo error es de $3dB$ en el punto de quiebre. La tabla anterior presenta los errores entre los valores verdaderos y los valores asintóticos.

El ángulo de fase es $\tan^{-1}\omega\tau$. En frecuencias bajas, cuando ω es menor que $0{,}1/\tau$, entonces la fase es virtualmente $0°$. En frecuencias altas, cuando ω es más de $10/\tau$, entonces la fase es virtualmente $+90°$. En $\omega = 1/\tau$ (el punto de quiebre), la fase es $+45°$.



- *Un par de polos complejos*

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\varepsilon\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \Rightarrow$$

$$|G(j\omega)| = 20log\left(\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}\right) \Rightarrow |G(j\omega)| = -20log\left(\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}\right)$$

La <u>fase</u> está dada por: $$\tan \emptyset = -\frac{2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, entonces la magnitud se aproxima a $0db$.

Para $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, entonces la magnitud se aproxima a $|G(j\omega)| = -20log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$.

A frecuencias bajas la traza de magnitud es una línea recta en $0db$, mientras que a frecuencias altas es una línea recta de pendiente $-40db$ por década de frecuencia. La intersección o punto de quiebre de estas 2 líneas está en $\omega = \omega_n$. El valor verdadero depende del valor del factor de amortiguamiento relativo ε

Para $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, es decir, $\frac{\omega}{\omega_n} = 0{,}2$ o menor, la fase se aproxima a $\emptyset = -\tan^{-1} 0 = 0°$.

Para $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, es decir, $\frac{\omega}{\omega_n} = 5$ o mayor, la fase se aproxima a $\emptyset = -\tan^{-1}(-\infty) = -180°$.

Para $\omega = \omega_n$, es decir, entonces $\emptyset = -\tan^{-1} \infty = -90°$.

La forma de la curva de fase depende del factor de amortiguamiento relativo; sin embargo, todas las gráficas pasan por $-90°$ en $\omega = \omega_n$.

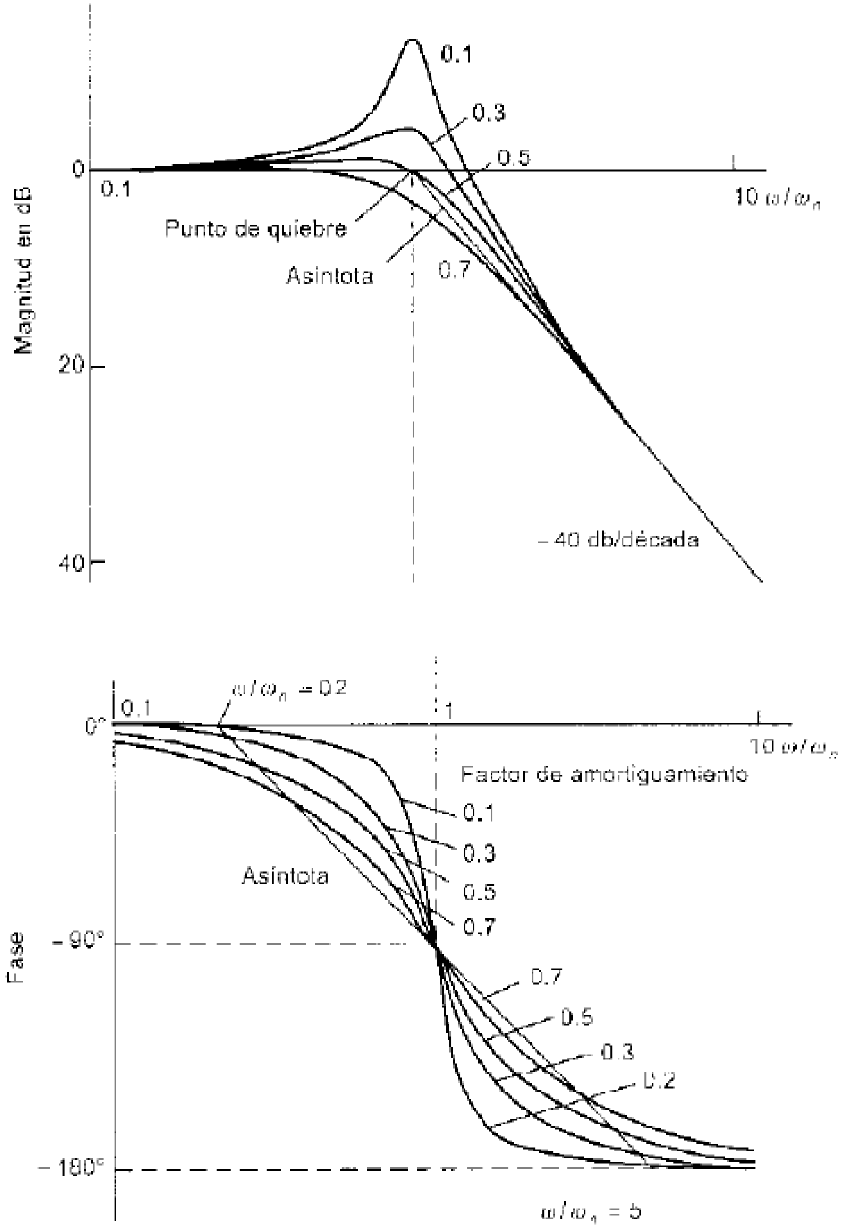
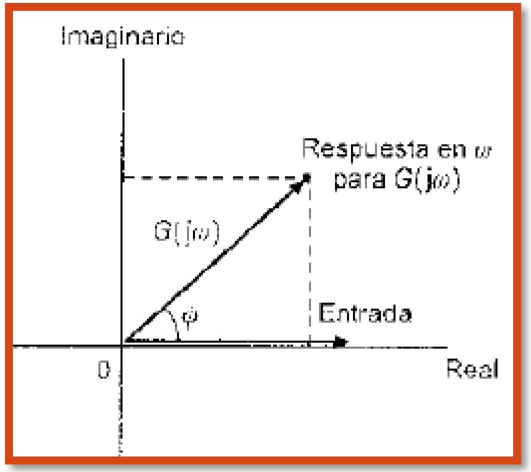


DIAGRAMA DE NYQUIST



El diagrama de Nyquist es una traza polar de la respuesta en frecuencia del sistema.

En el diagrama de Nyquist la función $G(j\omega)$, se puede graficar como un vector de magnitud $|G(j\omega)|$ y un ángulo de fase $\emptyset$ con el eje real.

Para un sistema de primer orden, o un sistema de atraso sencillo, la función de transferencia es:

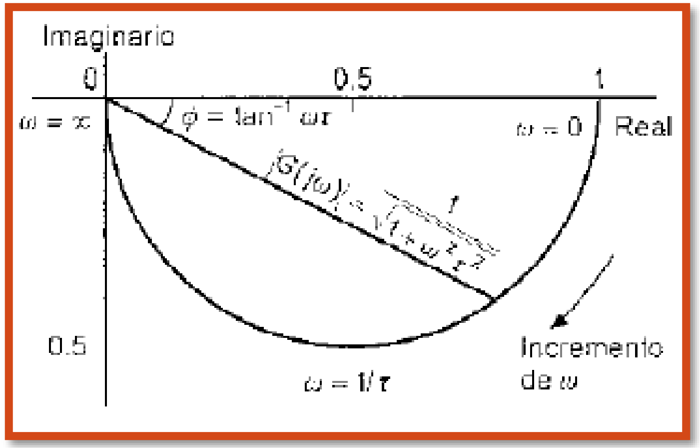
$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - \frac{\tau j\omega}{1+\omega^2\tau^2} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\emptyset = -\,tan^{-1}\omega\tau$$

Cuando $\omega = 0$, las ecuaciones anteriores dan como resultado $|G(j\omega)| = 1$ y $\emptyset = 0°$. Es el punto en donde se cruza el eje real.

Cuando $\omega = \infty$, $|G(j\omega)| = 0$ y $\emptyset = -90°$.

Cuando $\omega = 1/\tau$, $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ y $\emptyset = -45°$.

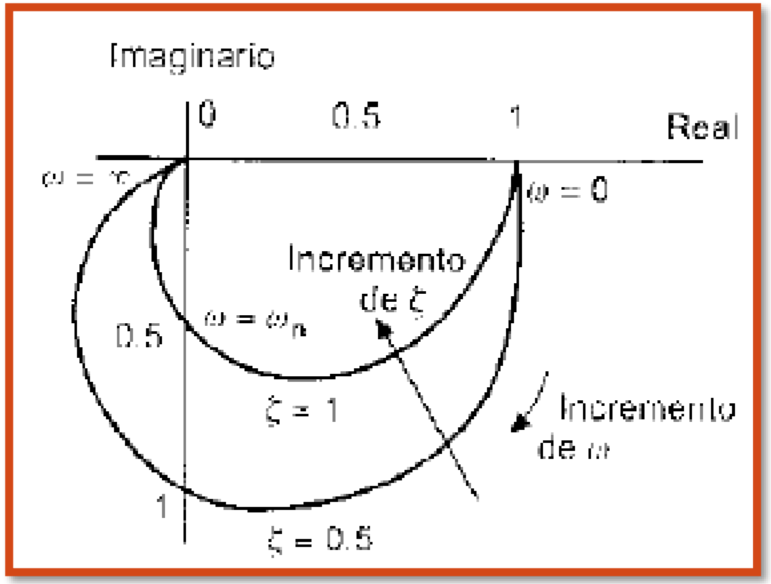


Para un sistema de segundo orden con una función de transferencia dada por:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varepsilon\omega_n s+\omega_n^2} \qquad G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+j2\varepsilon\omega_n\omega+\omega_n^2}=\frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]-j2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

$$\tan\emptyset=-\frac{2\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Cuando $\omega=0,\ |G(j\omega)|=1$ y $\emptyset=0°$.

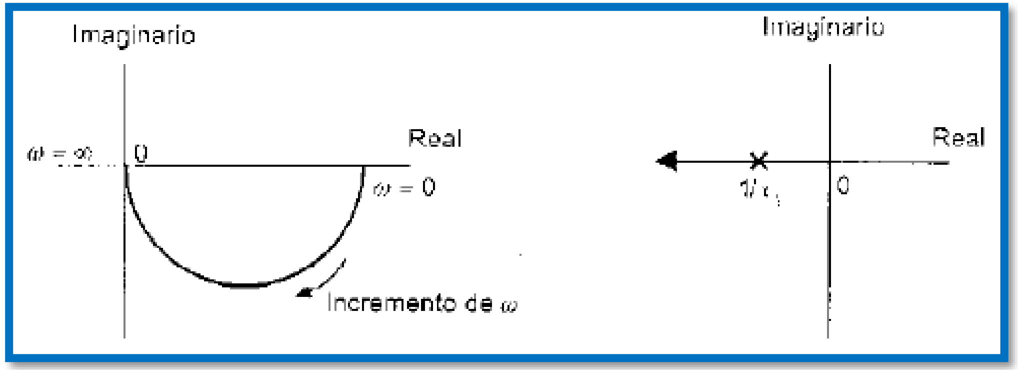
Cuando $\omega=\infty,\ |G(j\omega)|=0$ y $\emptyset=-180°$.

Cuando $\omega=\omega_n,\ |G(j\omega)|=1/2$ y $\emptyset=-90°$.

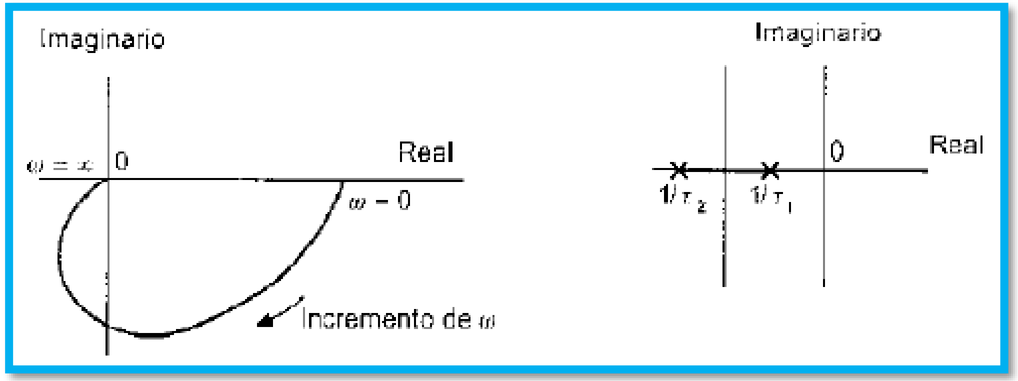
La figura muestra también cómo cambia la traza de Nyquist si se incrementa el factor de amortiguamiento relativo ε.

Curvas de Nyquist y su correlación con Lugar de Raices:

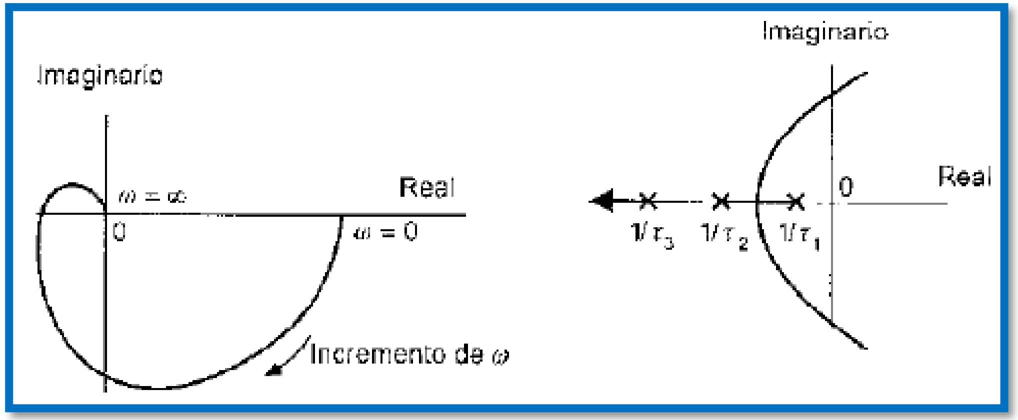
$$G(s) = \frac{1}{1+\tau_1 s}$$



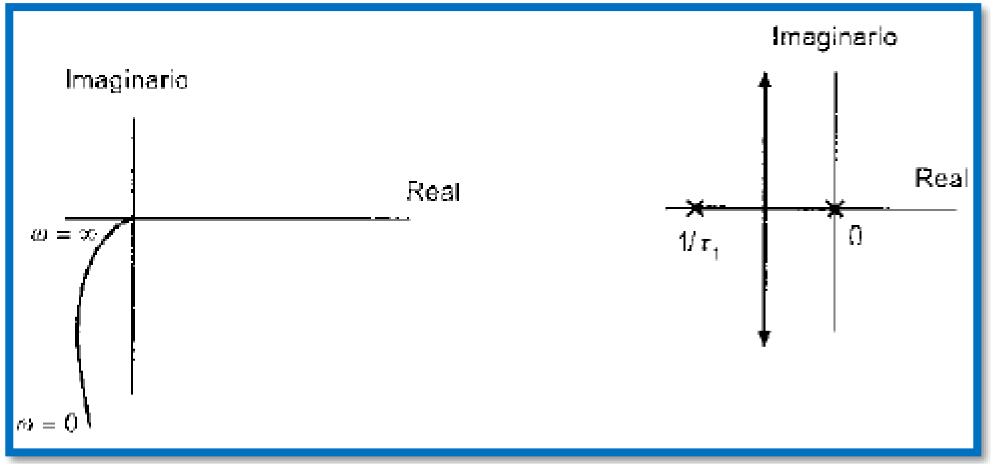
$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$



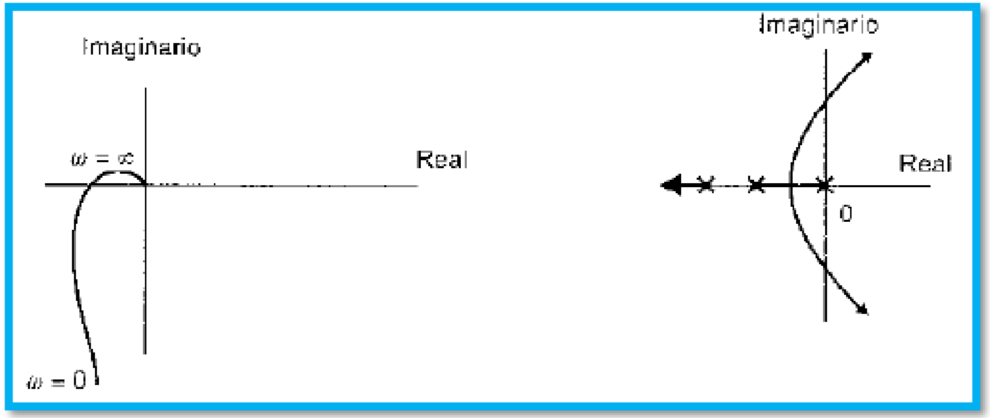
$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$$



$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)s}$$



$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)s}$$

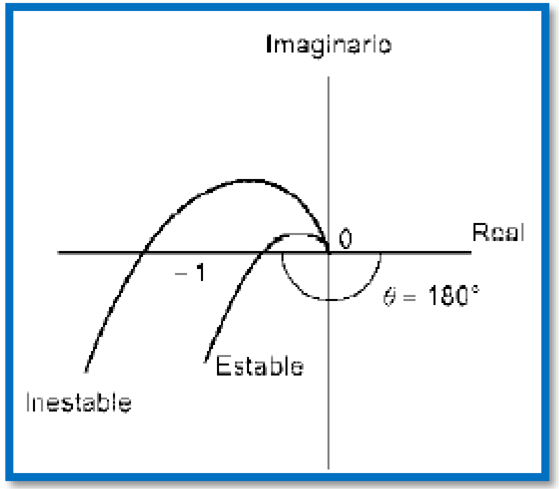


CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Cuando a un sistema se aplica una entrada senoidal la salida de ese sistema es senoidal con la misma frecuencia angular, pero puede tener una amplitud que difiere de la de la entrada y mostrar una diferencia de fase. El cociente de las amplitudes de salida y de entrada es la magnitud $|G(j\omega)|$.

Para que la *inestabilidad se presente* cuando la entrada al sistema es sonoidal, la magnitud en lazo abierto debe ser mayor que 1 si el atraso de fase en lazo abierto es $180°$. Si el sistema causa un cambio de fase de $180°$, entonces la señal de realimentación estará en fase con la señal de entrada y, de esta manera, se adicionará a ésta en vez de sustraerse.

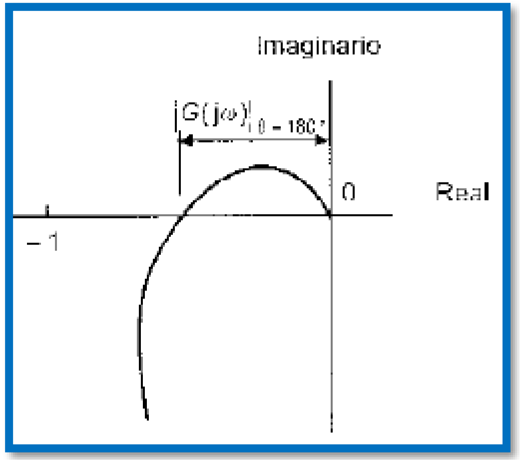
Si la amplitud es menor que la de la señal de entrada, se puede alcanzar una condición estable, pero si la amplitud es mayor, la señal a través del sistema crecerá de manera continua. ***Si el sistema en lazo abierto es estable, el sistema en lazo cerrado también será estable.***



Cuando el ángulo de fase es $180°$ para que exista margen de ganancia la magnitud NO debe exceder de 1, entonces la traza polar no debe encerrar al punto -1 sobre el eje real y el sistema va a ser estable.

MARGEN DE GANANCIA Y MARGEN DE FASE

El ***margen de ganancia*** se define como el factor mediante el cual la ganancia del sistema (es decir, la magnitud) se puede incrementar antes de que se presente la inestabilidad. Éste es, entonces, la cantidad mediante la cual la magnitud en $180°$ debe incrementarse para alcanzar el valor crítico de 1



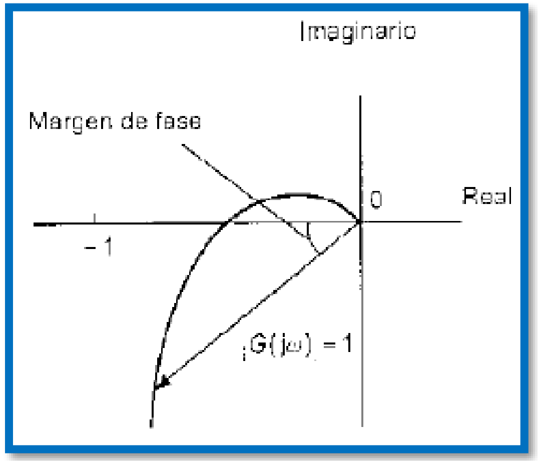
Luego:

$$1 = Margen\ de\ ganancia * |G(j\omega)|_{\emptyset=180°}$$

Éste en general se cuantifica en decibeles y de esta forma en decibeles es:

$$Margen\ de\ ganancia = 20\log 1 - 20\log|G(j\omega)|_{\emptyset=180°}$$

$$Margen\ de\ ganancia = -20\log|G(j\omega)|_{\emptyset=180°}$$



Si la traza de Nyquist jamás cruza la parte negativa del eje real, el margen de ganancia es infinito. Si la traza pasa a través del eje en un valor menor que 1, el margen de ganancia es positivo. Si pasa a través del eje en 1, el margen de ganancia es cero y si pasa a través del eje en un valor mayor que 1 (es decir, la traza encierra el punto -1, el margen de ganancia es negativo.

El ***margen de fase*** se define como el ángulo a través del cual la traza de Nyquist debe girar para que el punto de magnitud unitaria pase a través del punto -1 en el eje real. Esta es, por lo tanto, la cantidad mediante la cual la fase del sistema en lazo abierto cae cerca de $180°$cuando su magnitud tiene el valor de 1, es decir, la amplitud de la salida es la misma que la de la entrada (ver figura de la derecha).

La siguiente figura muestra los márgenes de ganancia y fase en las trazas de Bode para un sistema: