

# **I FUNDAMENTOS DE LA SIMULACION NUMERICA DE RESERVORIOS**

---

**RESERVORIOS III**

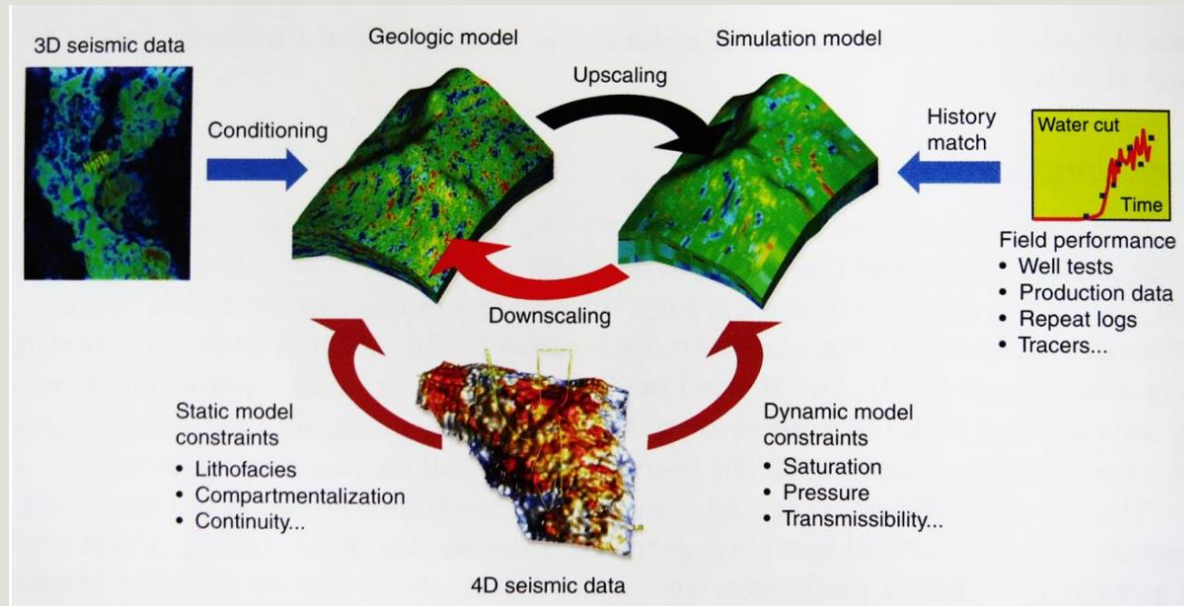
**2024**

# Agenda

---

- ✓ Gestión del reservorio (Reservoir Management)
- ✓ Simulación de reservorios
- ✓ Modelo numérico
- ✓ Modelo estático
- ✓ Modelo dinámico
- ✓ Ajuste histórico (history matching)
- ✓ Predicciones
- ✓ Modelo matemático-Modelo numérico

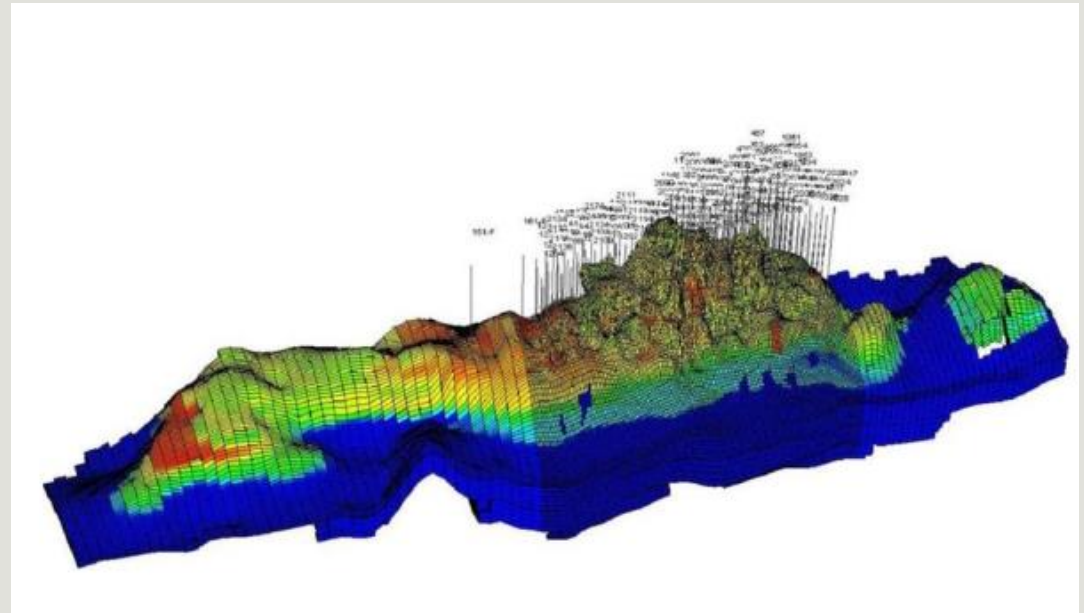
# Gestión de reservorios (Reservoir Management)



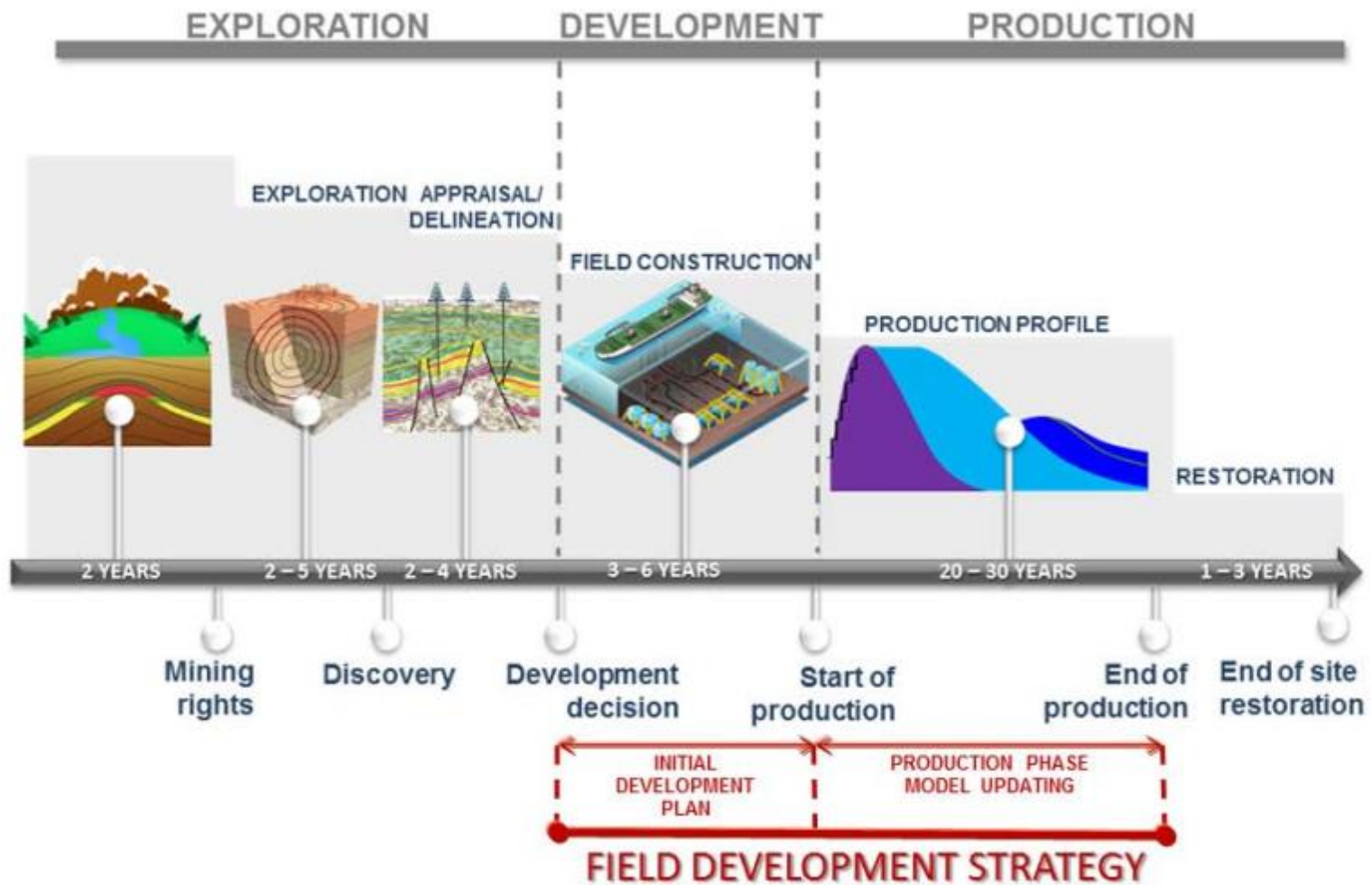
- ✓ Determinar las condiciones óptimas para maximizar la recuperación económica de los hidrocarburos mediante una operación racional del reservorio.
- ✓ La modelización de reservorios es una de las herramientas más sofisticadas para alcanzar este objetivo principal.

# Simulación de reservorios

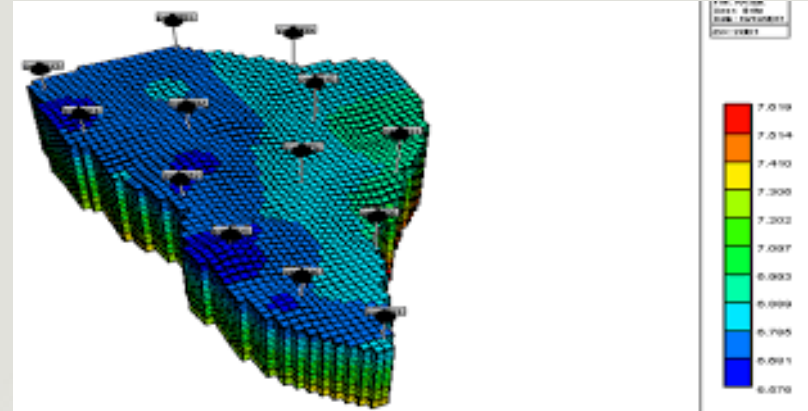
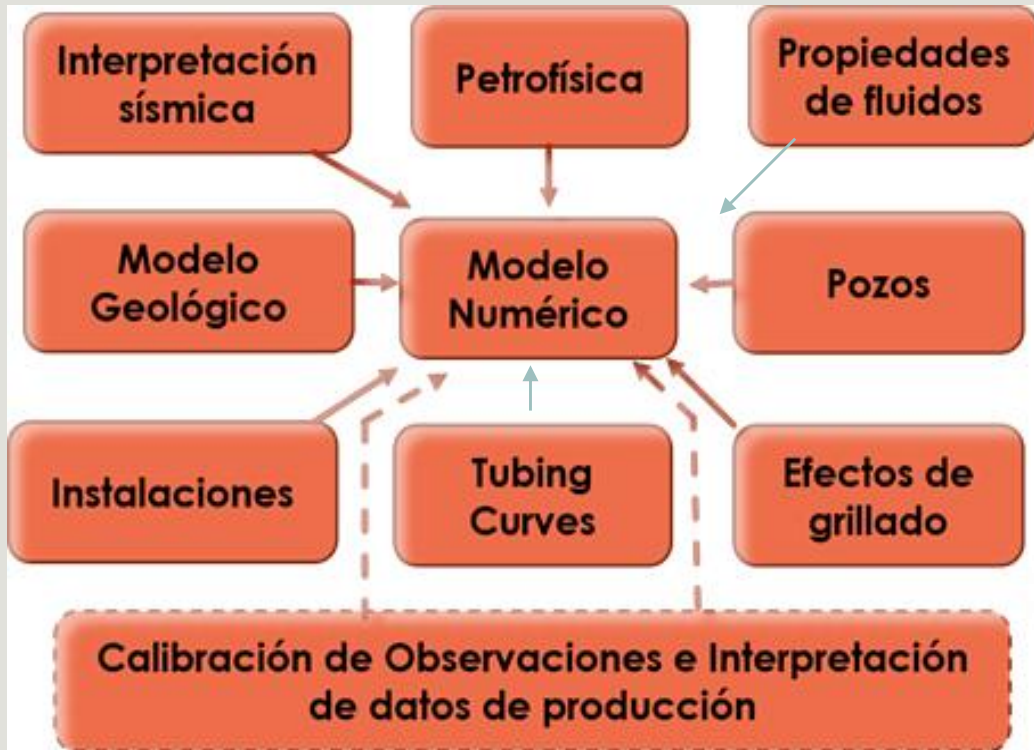
- Coordinar actividades de gestión del reservorio.
- Evaluar Performance del proyecto.  
(Interpretar/Entender el comportamiento del reservorio)
- Análisis de sensibilidad de los datos estimados  
(Determinar necesidad de datos adicionales)
- Estimar la vida del proyecto.
- Predecir Recuperación vs tiempo.
- Comparar diferentes procesos de recuperación.
- Planificar desarrollos o cambios operacionales.
- Seleccionar y optimizar el diseño del proyecto.  
(Maximizar la recuperación económica).



# Estrategia de desarrollo

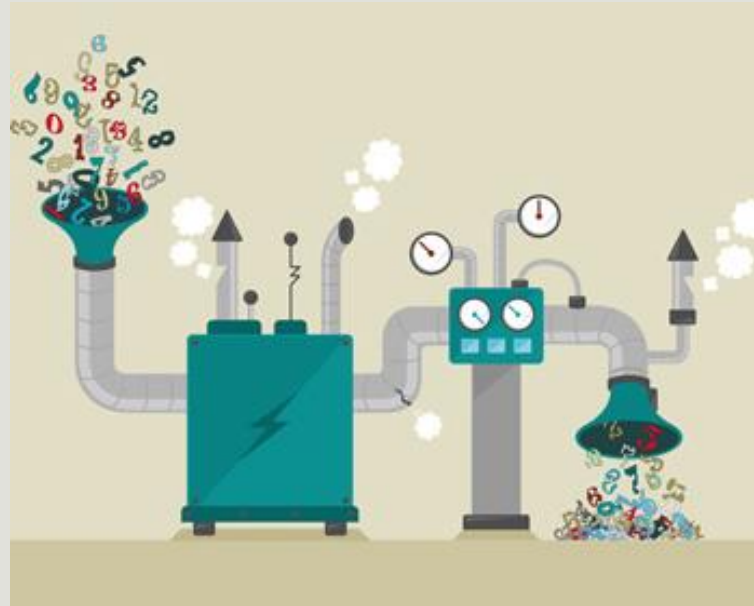


# Modelo de simulación numérica



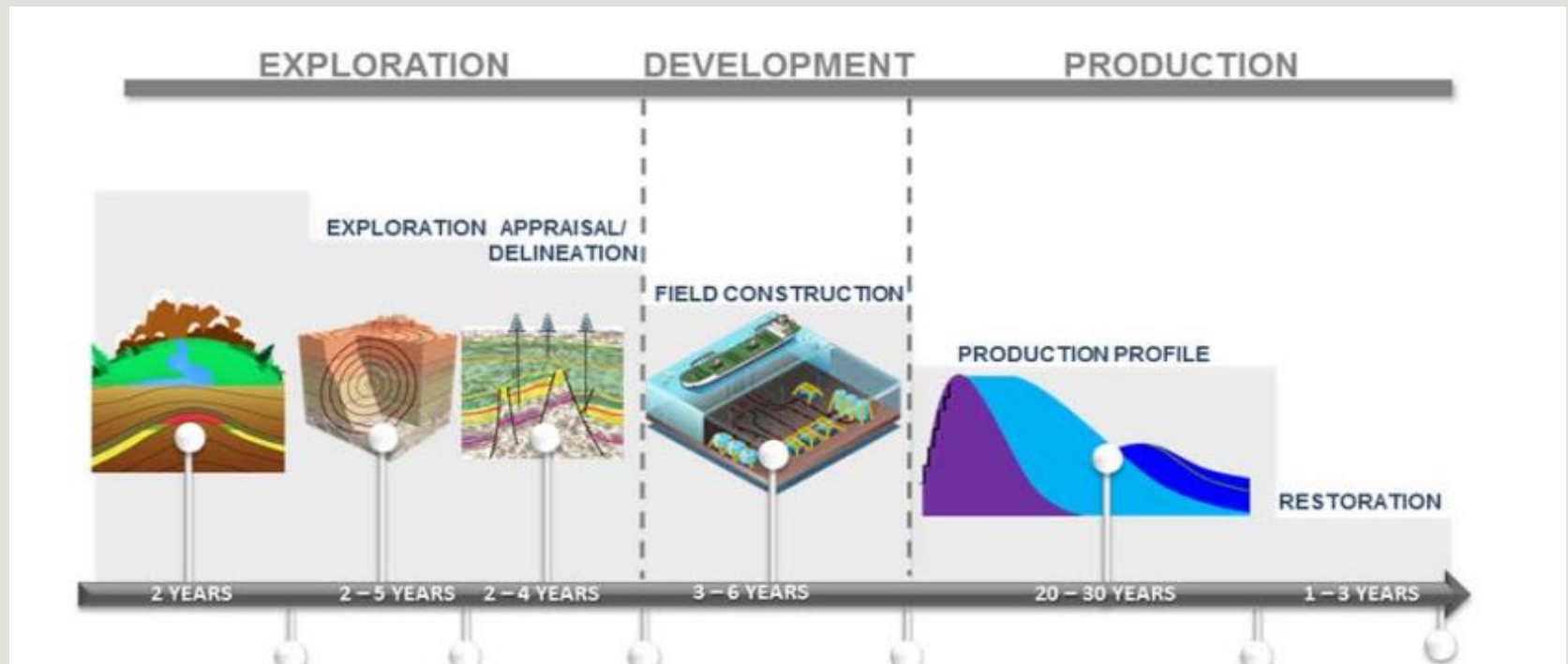
# Datos de entrada

---



**Un programa de computación basado en modelos matemáticos necesita datos. Se requieren datos confiables.**  
**Garbage in Garbage out (GIGO)**

# Fuente de datos





# Modelo estático y Modelo dinámico

## Modelo estático

Comprende datos geológicos, geofísicos, petrofísicos, geomecánicos, geoquímicos y de fluidos

## Modelo dinámico

Está constituido por datos de inyección-producción, modelo roca-fluido, análisis PVT y modelo de presiones.

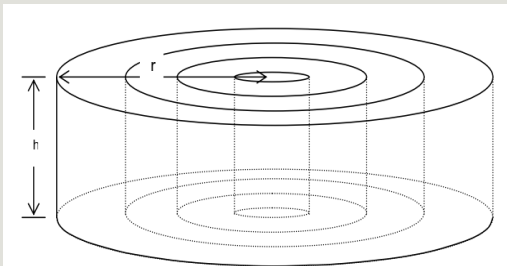
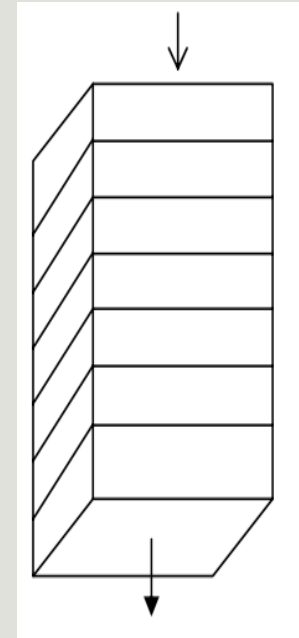
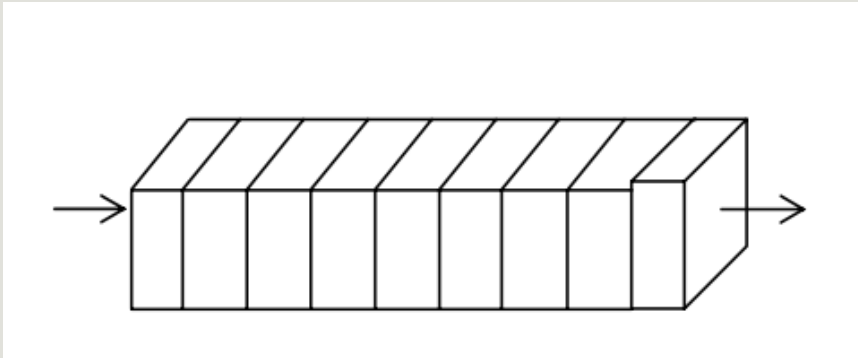
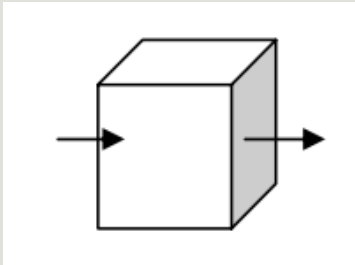
Los modelos estáticos y dinámicos son elementos claves para evaluar y seleccionar opciones futuras de recuperación (pozos infill, IOR, EOR)

# Tipo de simuladores numéricos

---

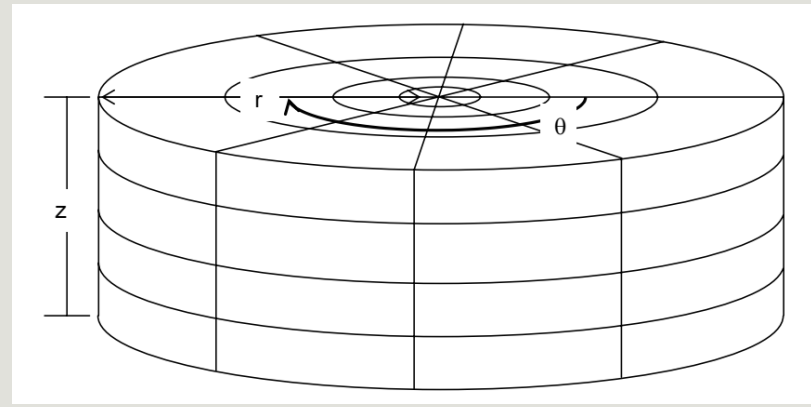
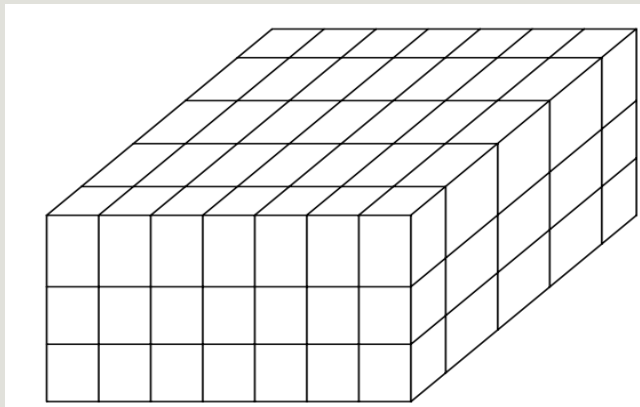
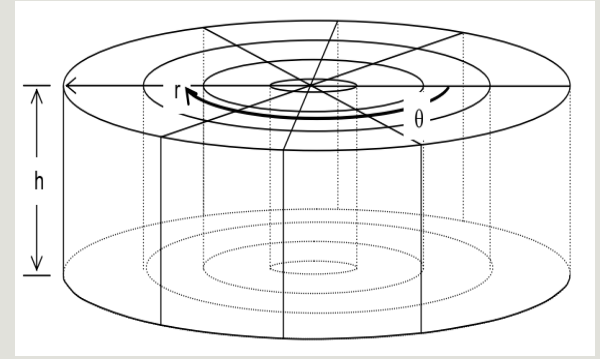
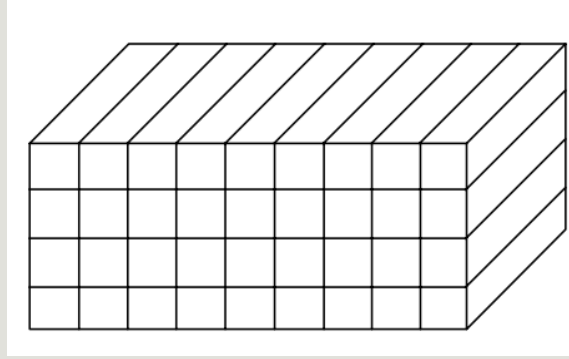
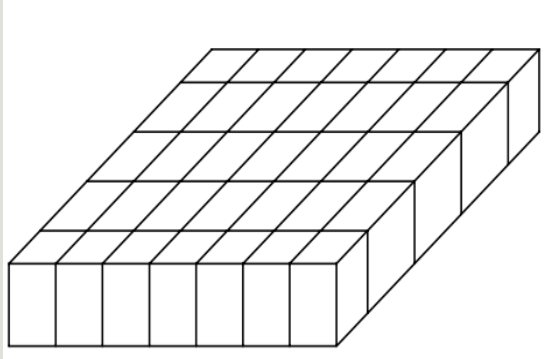
- ✓ Número de dimensiones
- ✓ Tipo de yacimiento
- ✓ Proceso de recuperación

# Malla y número de dimensiones



- ✓ Modelo tanque 0 dimensiones
- ✓ Modelo 1D horizontal-vertical-radial

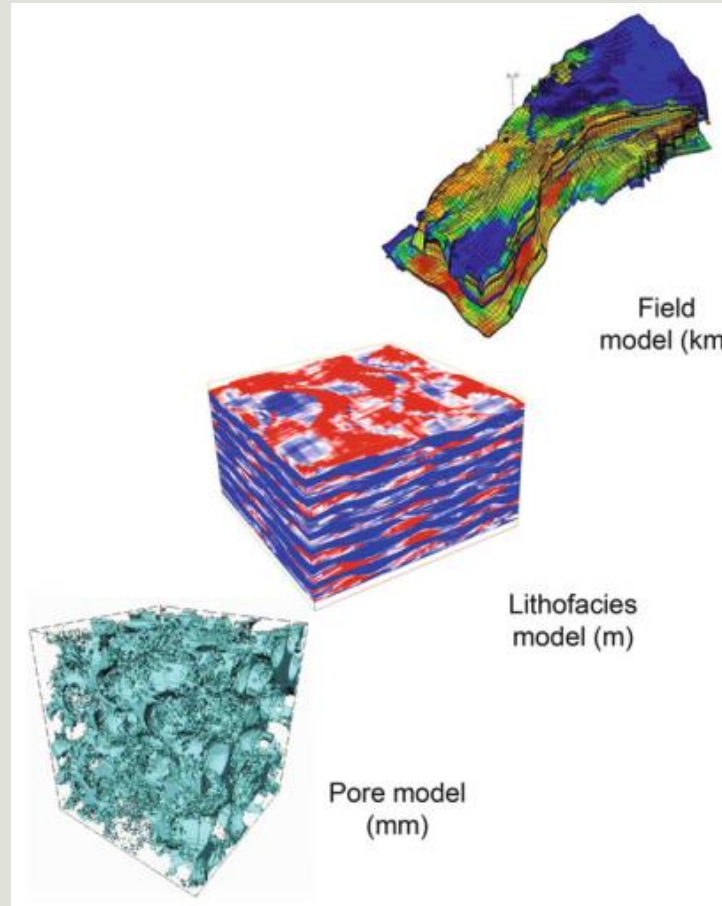
# Malla y número de dimensiones



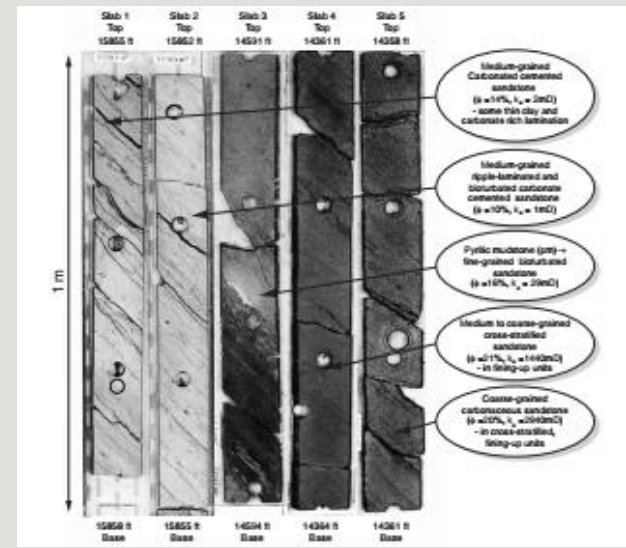
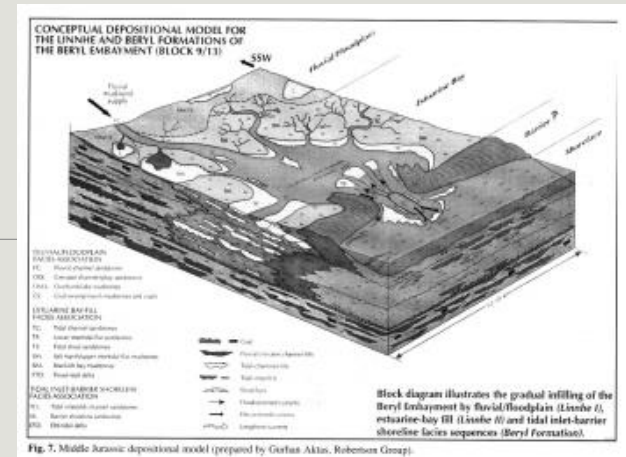
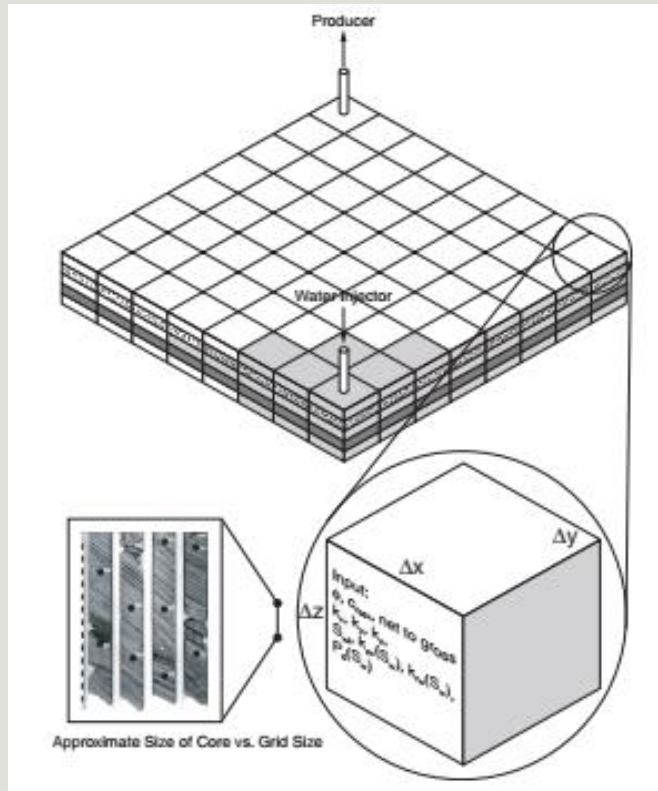
✓ Modelos 2D lineales radiales-3D cartesianos-cilíndricos

# Modelo de reservorio en diferentes escalas

---



# Esquema de simulación waterflooding 3D



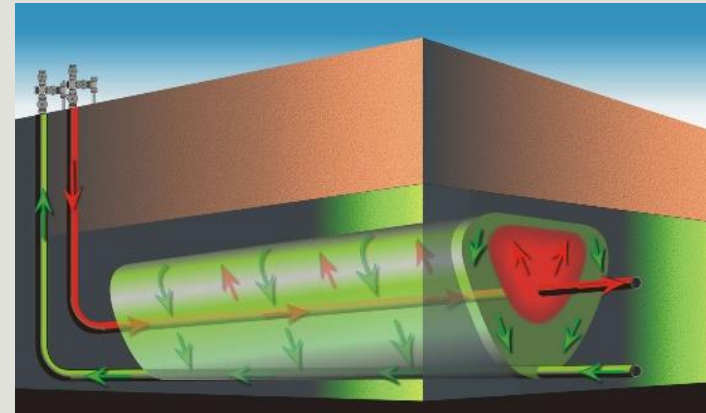
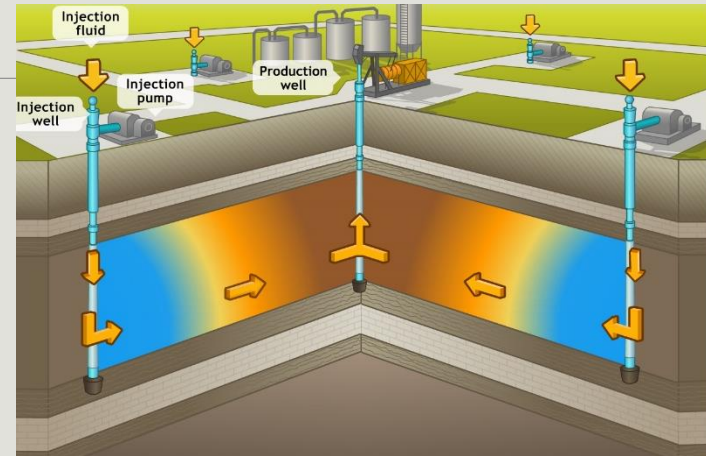
# Tipo de yacimiento

---

- ✓ Yacimiento petróleo negro (Black oil).
- ✓ Yacimiento de gas.
- ✓ Yacimiento petróleo volátil y gas condensado (composicional).

# Proceso de recuperación

- ✓ Recuperación primaria
- ✓ Recuperación secundaria
- ✓ Recuperación mejorada
- ✓ No convencionales





# Datos de entrada: reservorio

---

- ✓ Distribución de Porosidad y Permeabilidad.  
Espesores.
- ✓ Profundidad.
- ✓ Distribución de presión y saturación inicial.
- ✓ Número y tamaño de grillas.
- ✓ Compresibilidad de la roca.



# Datos de entrada: fluidos

---

✓  $B_o, B_w, B_g$

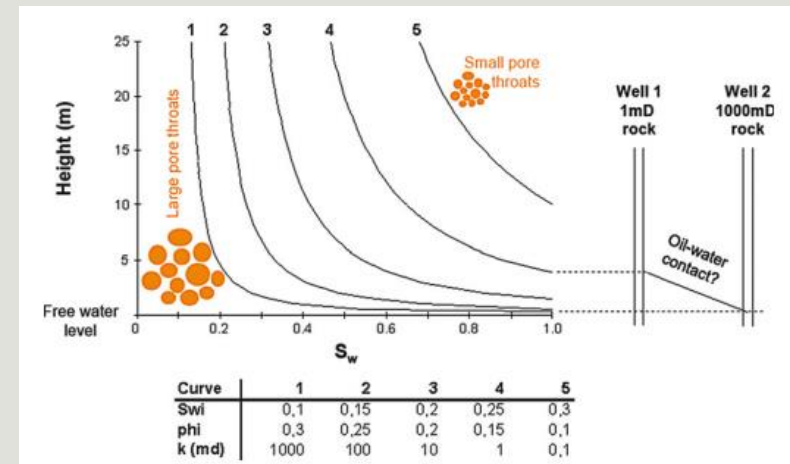
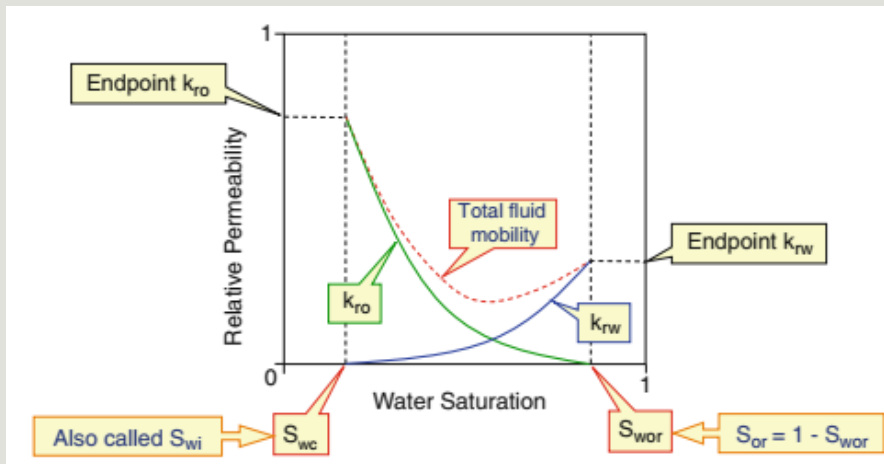
✓  $\mu_o, \mu_g, \mu_w$

✓  $\rho_o, \rho_g, \rho_w$



# Datos de entrada: roca -fluido

- ✓ Curvas de permeabilidades relativas
- ✓ Curvas de Presión capilar



# Datos de entrada: pozos

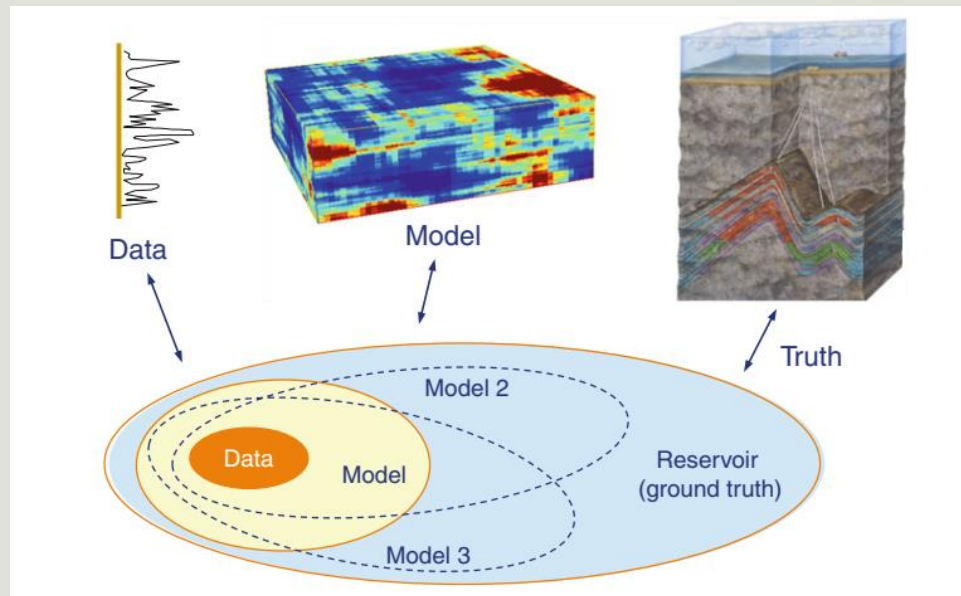
---

- ✓ Localización y estado del pozo
- ✓ Historia de completación
- ✓ Historia de producción



# Limitaciones

- ✓ Soluciones aproximadas
- ✓ Calidad y cantidad de datos



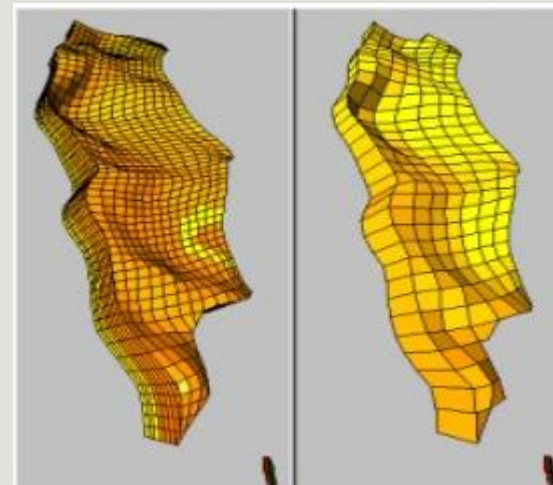
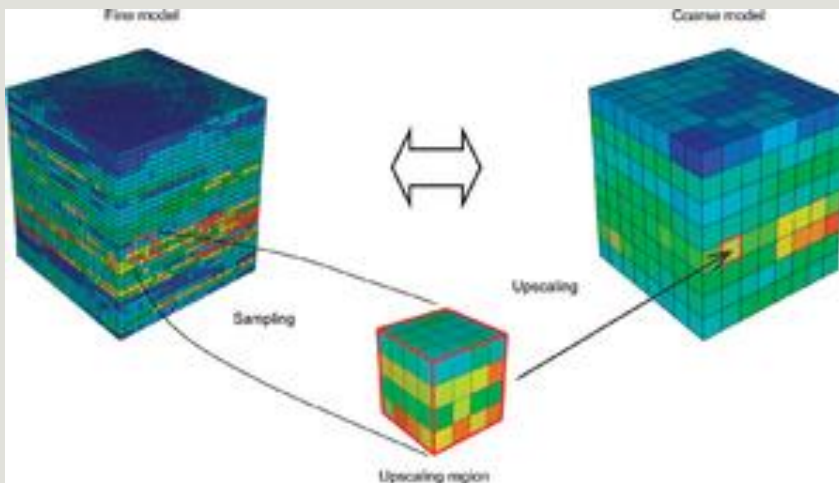
# Etapas del modelo de simulación

---

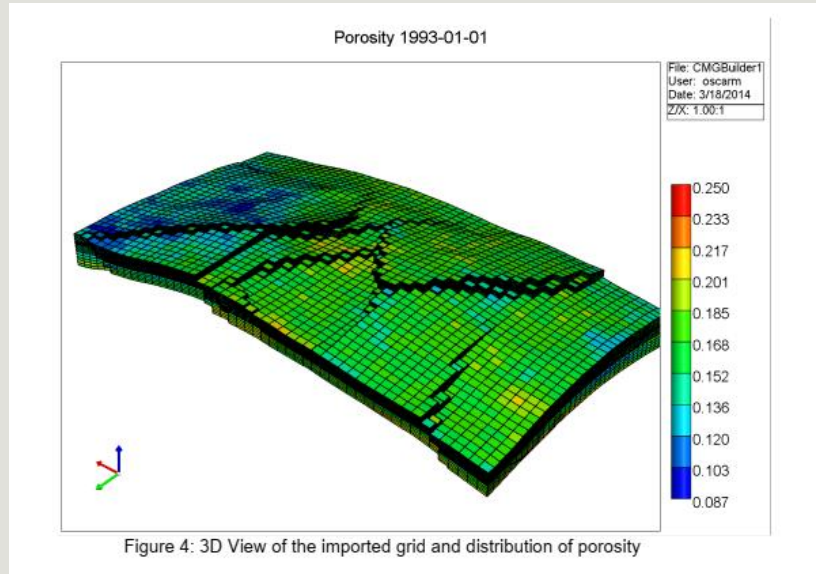
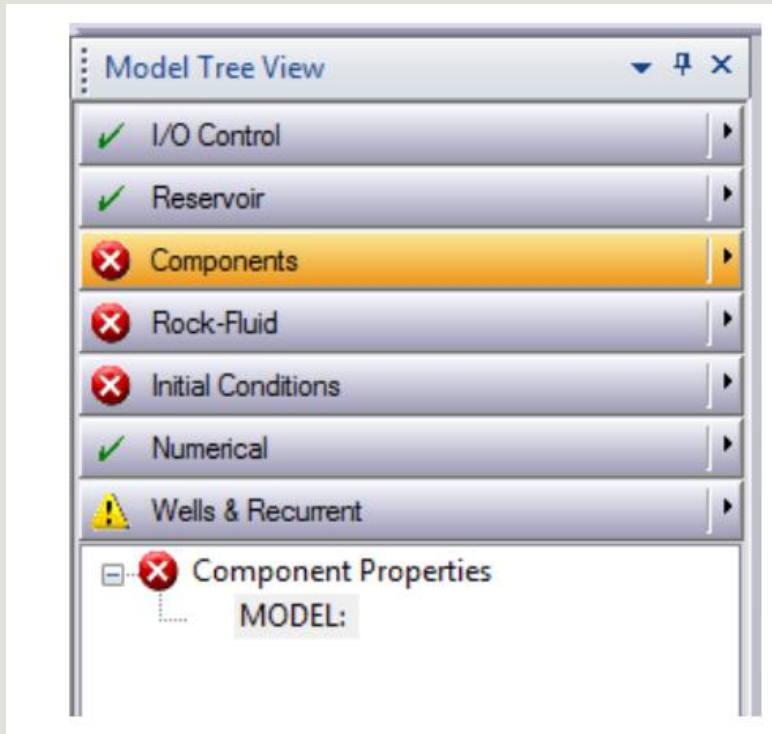
- ✓ Revisión del modelo estático
- ✓ Escalamiento
- ✓ Modelo de producción-modelo de presiones
- ✓ Modelo de fluidos-modelo roca-fluidos
- ✓ Inicialización
- ✓ Ajuste histórico (History matching)
- ✓ Predicciones

# Etapas del modelo de simulación

## ✓ Escalamiento



# Modelo estático

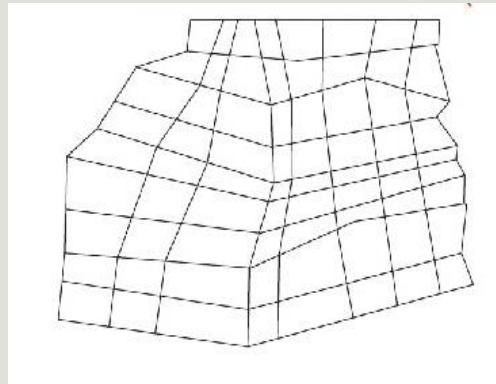
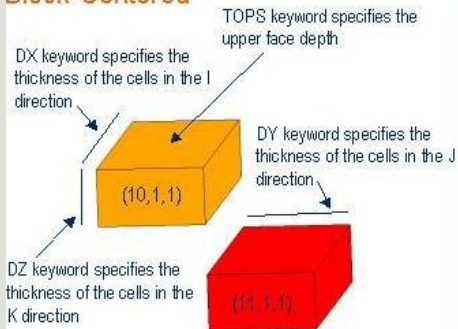


- ✓ Grillado
- ✓ Fallas
- ✓ Porosidad-Permeabilidad

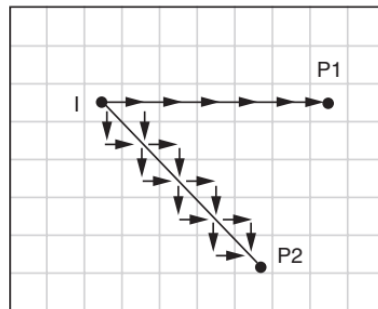
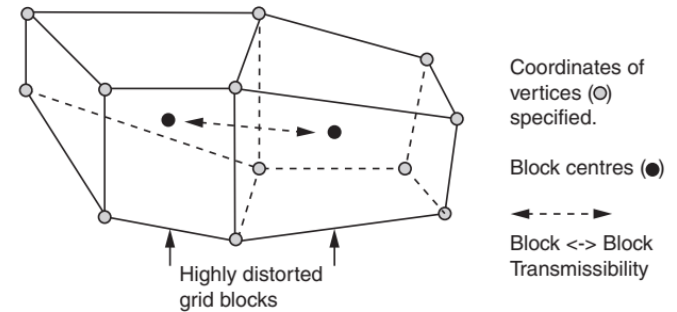


# Tipos de mallas

## Block-Centered

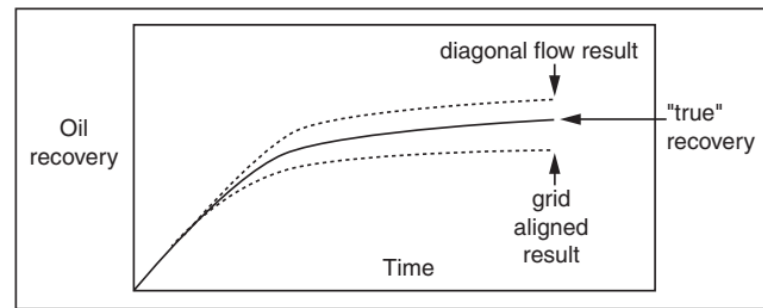


## Corner Point Geometry



I = Injector  
P = Producer

Flow arrows show the fluid paths in oriented grid and diagonal flow leading to grid orientation errors



# Modelo estático

General Property Specification

Edit Specification

Go To Property:

	Grid Top	Grid Thickness	Porosity	Permeability I	Permeability J
UNITS:	ft	ft		md	
SPECIFIED:					
HAS VALUES:					
Whole Grid					
Layer 1					
Layer 2					
Layer 3					
Layer 4					

# Modelo de fluido

Type	Typical Form	Source	Usage
Density	$\rho = \rho (P)$	PVT Data	Hydrostatic Gradient Formation Volume Factor
Viscosity	$\mu = \mu (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms
Compressibility	$c = c (P)$	PVT Data	Storage Terms Formation Volume Factor
Formation Volume Factor	$B = B (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms Source/sink Terms
Solution Gas Ratio	$R_s = R_s (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms in Gas Equation
Compressibility Factor	$Z = Z (P)$	PVT Data	Gas Formation Volume Factor

# Modelo de fluidos

Imex PVT Regions

PVT Region: 1

PVT Table: General | Undersaturated Data

PVT Table Type: Oil and gas (PVT) | Table Uses: Gas expansion factor (EG)

Include Oil Compressibility in PVT Table  
 Include Gas-oil Interfacial Tension in PVT Table

Tools

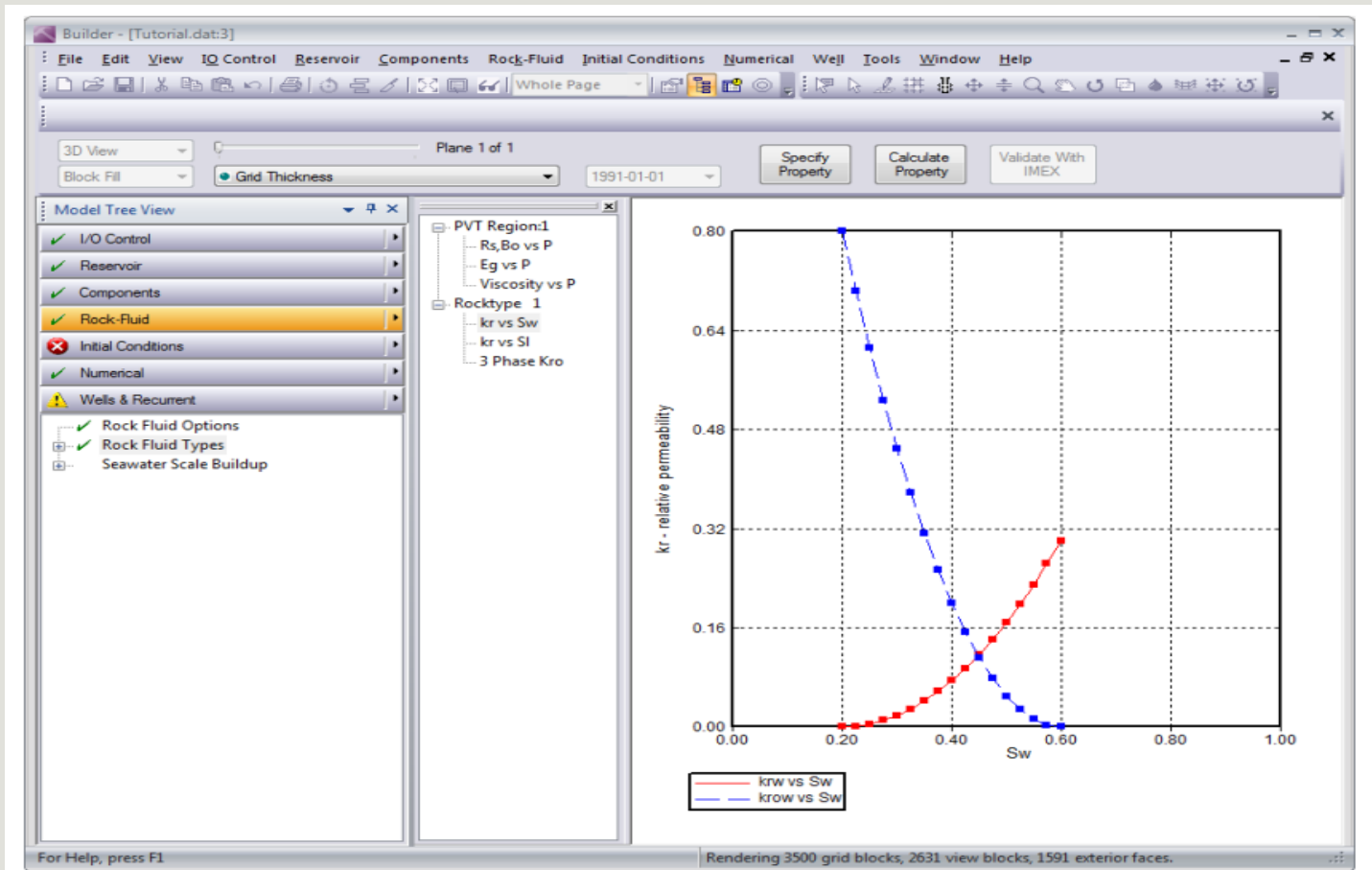
Differential liberation table parameters

Bubble point pressure:   
Oil formation vol. factor:   
Solution gas-oil ratio:

#	p psi	Rs ft3/bbl	Bo	Eg ft3/bbl	viso cp	visg cp	co 1/psi
1	14.696	3.81175	1.0455	4.74719	2.54115	0.0124995	3e-005
2	76.5829	11.7208	1.04838	24.906	2.40802	0.0125406	3e-005
3	138.47	20.7473	1.0517	45.3375	2.27452	0.0125947	3e-005
4	200.357	30.5163	1.05532	66.0431	2.1481	0.0126575	3e-005
5	262.244	40.856	1.05918	87.0239	2.03095	0.0127276	3e-005
6	324.131	51.6648	1.06324	108.28	1.92341	0.0128041	3e-005
7	386.018	62.8745	1.06749	129.812	1.82511	0.0128867	3e-005
8	447.905	74.4362	1.07191	151.617	1.73535	0.0129748	3e-005
9	509.791	86.3124	1.07649	173.695	1.65337	0.0130685	3e-005
10	571.678	98.4738	1.08121	196.042	1.57839	0.0131676	3e-005

OK Cancel Apply Help

# Modelo roca-fluido



# Condiciones iniciales

**Initial Conditions** ✕

Perform Gravity-Capillary Equilibrium of A Reservoir Initially Containing

- Water, Oil, Gas (VERTICAL DEPTH\_AVE WATER\_OIL\_GAS EQUIL)
- Water, Oil (VERTICAL DEPTH\_AVE WATER\_OIL EQUIL)
- Water, Gas (VERTICAL DEPTH\_AVE WATER\_GAS EQUIL NOTRANZONE)

There will be no residual saturation in Gas Cap (GASZONE NOOIL)

<p>Reference Pressure and Depth</p> <p>Pressure (REFPRES) <input type="text" value="4000 psi"/></p> <p>Depth (REFDEPTH) <input type="text" value="10007 ft"/></p>	<p>Phase Contact Depths</p> <p>Water-Oil Contact (DWOC) <input type="text" value="10105 ft"/></p> <p>Gas-Oil Contact (DGO) <input type="text" value="6496 ft"/></p> <p>Water-Gas Contact (DWGC) <input type="text"/></p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Datum Depth for Output Pressure

Note: This item is optional.

Depth (DATUMDEPTH depth)

Pressure will be corrected using the initial equilibrium pressure distribution (DATUMDEPTH depth INITIAL)

For more options use the Advanced Interface

Bubble Point Input Format

- Reservoir initially saturated (PB = P)
- Constant Bubble Point Pressure (PB)

# Modelo dinámico-Modelo de pozo

**Trajectory Perforation Intervals**

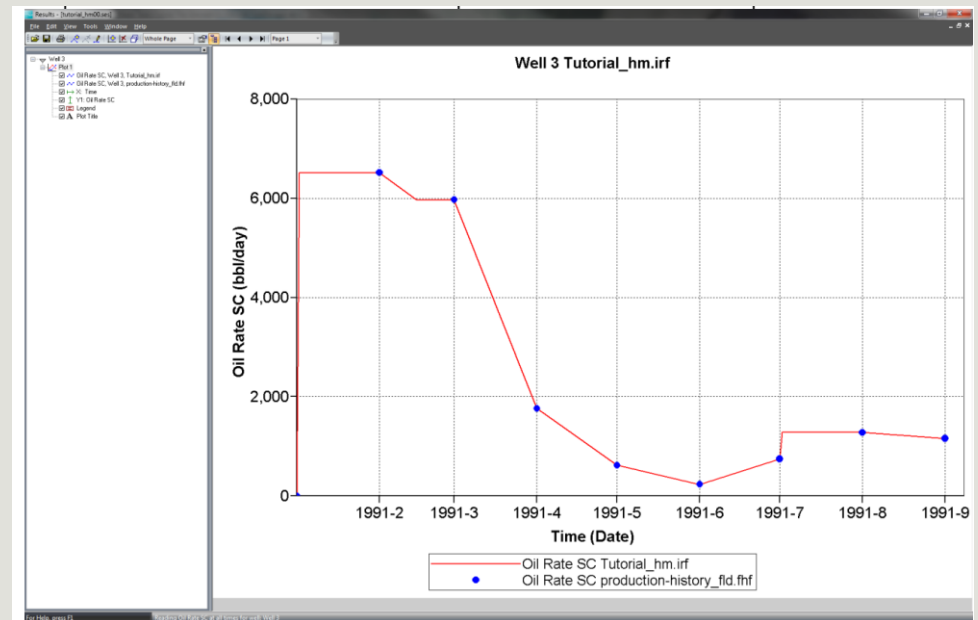
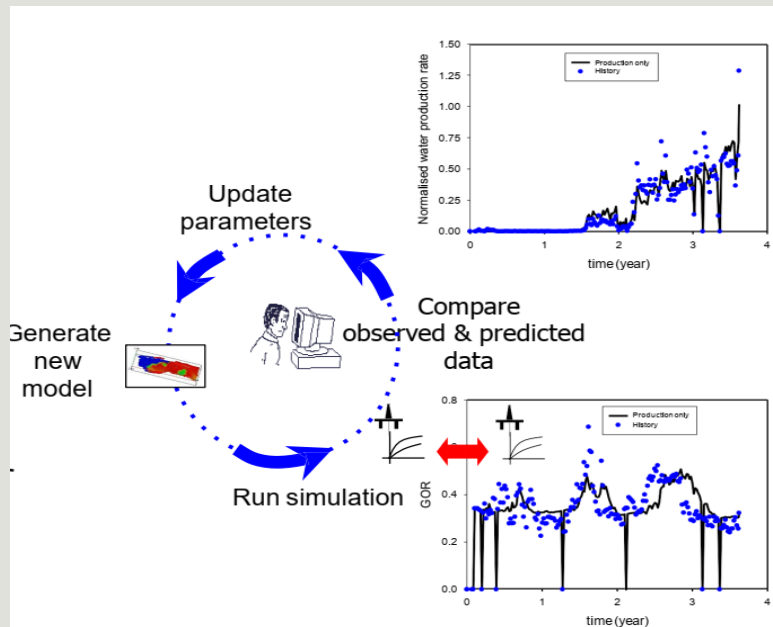
for selected wells  
 export perforations for selected wells  
 perforation options for selected wells  
 MD values from existing model perforations

Create well completions from trajectory data

Do not create  
 Clear existing & create new for selected wells  
 Preserve existing & create new for selected wells

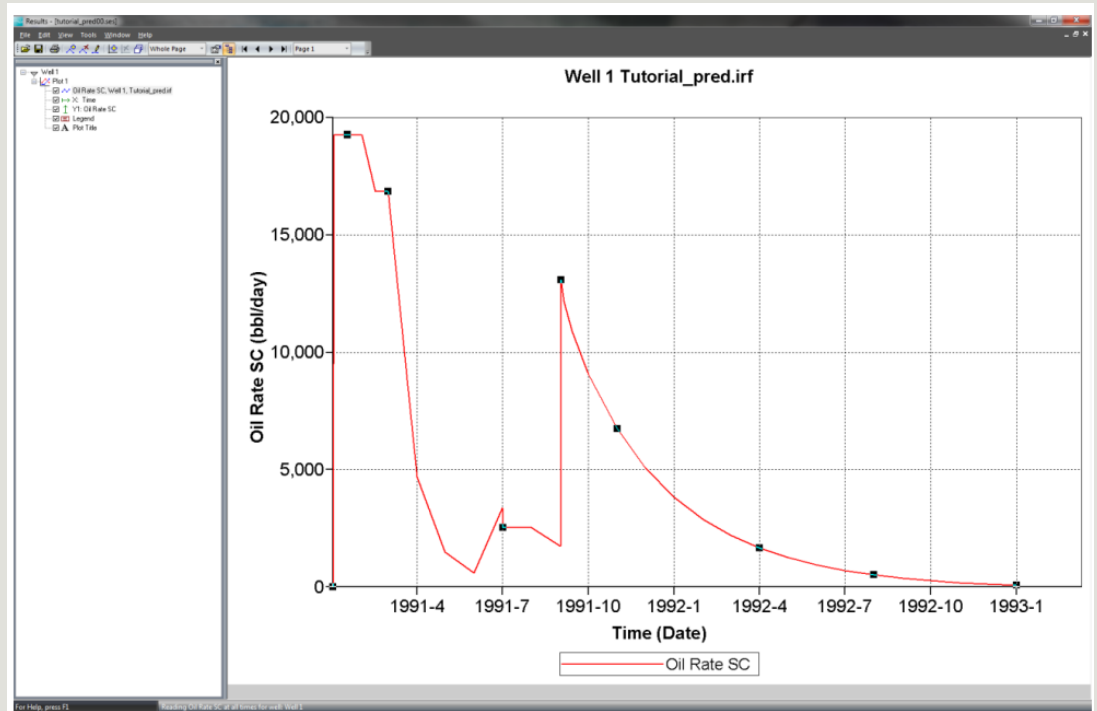
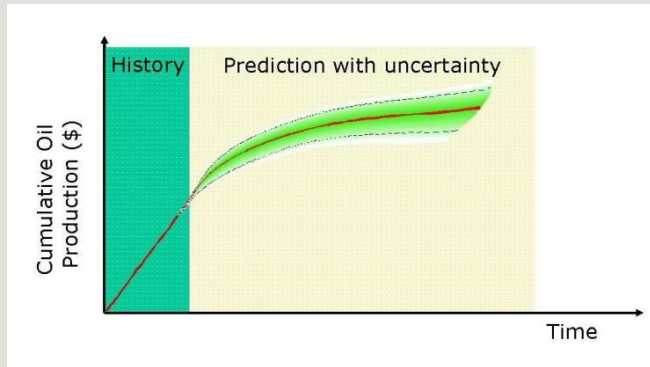
	Trajectory	Select	Date	MD Start (ft)	MD End (ft)	Status	MD Correctio...	MD Length (ft)	TVD Start (ft)	TVD End (ft)
* 1	Well 1	<input checked="" type="checkbox"/>	1991-01-01	9839.377	9922.376	Perforated	0.0	82.999	9839.377	9922.376
				9922.822	10006.66	Perforated	0.0	83.839	9922.822	10006.66
				10008.36	10088.845	Perforated	0.0	80.486	10008.36	10088.845
				1991-07-01	9990.971	10088.845	Cement Sque...	0.0	97.874	9990.971
3	Well 10	<input checked="" type="checkbox"/>	1991-01-01	9826.378	9911.057	Perforated	0.0	84.678	9826.378	9911.057
				9934.902	9998.327	Perforated	0.0	63.425	9934.902	9998.327
4	Well 2	<input checked="" type="checkbox"/>	1991-01-01	9806.624	9895.21	Perforated	0.0	88.586	9806.624	9895.21
				9896.588	9987.894	Perforated	0.0	91.306	9896.588	9987.894
				9990.663	10076.51	Perforated	0.0	85.846	9990.663	10076.51
				1991-07-01	9990.663	10076.51	Cement Sque...	0.0	85.846	9990.663
6	Well 3	<input checked="" type="checkbox"/>	1991-01-01	9846.687	9912.172	Perforated	0.0	65.486	9846.687	9912.172
				9936.122	9983.596	Perforated	0.0	47.474	9936.122	9983.596
7	Well 4	<input checked="" type="checkbox"/>	1991-01-01	9967.061	10012.041	Perforated	0.0	44.98	9967.061	10012.041
				10012.277	10057.71	Perforated	0.0	45.433	10012.277	10057.71
				10069.082	10091.798	Perforated	0.0	22.717	10069.082	10091.798

# History matching





# Predicciones

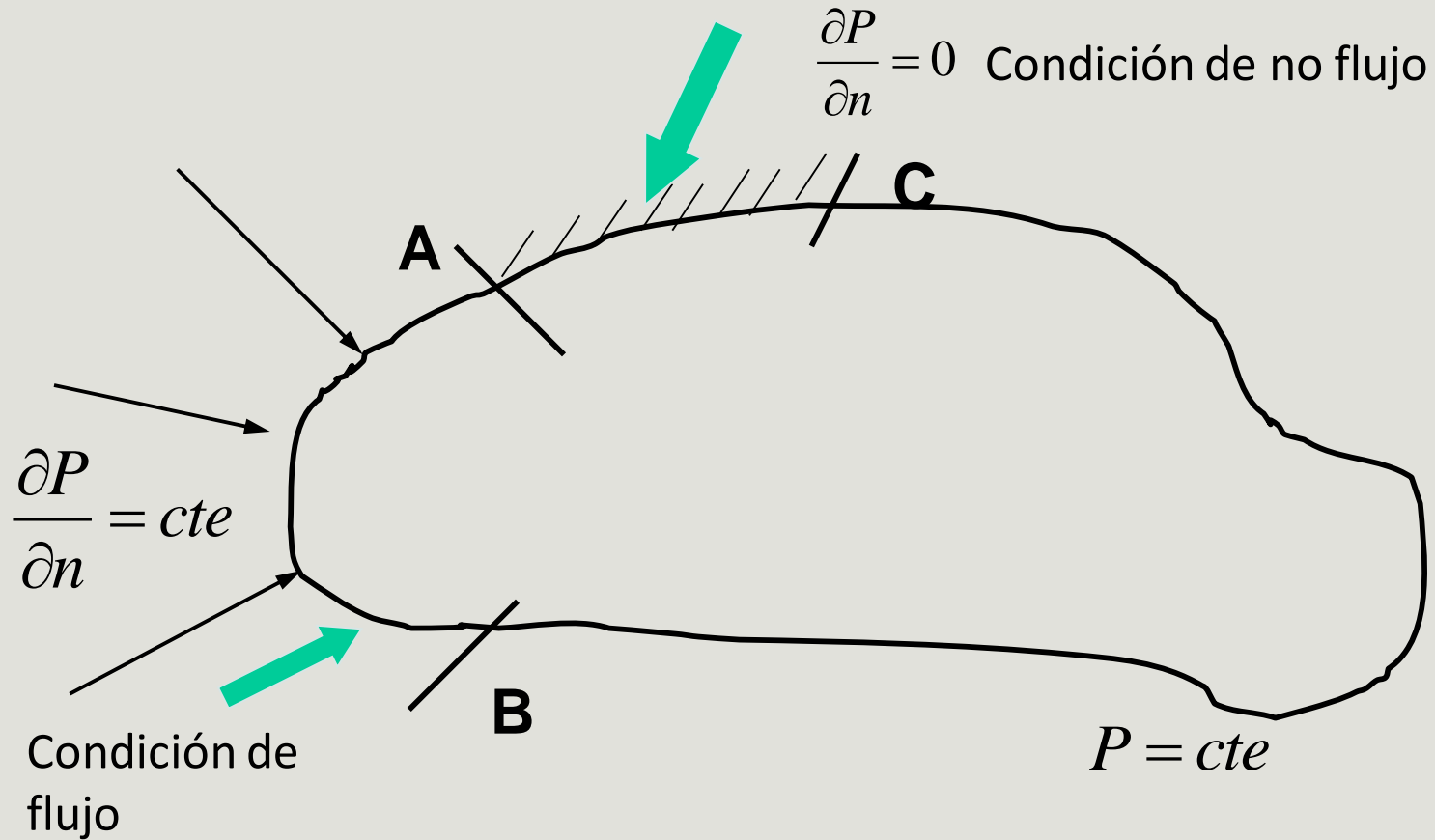


---

# **Modelo matemático**

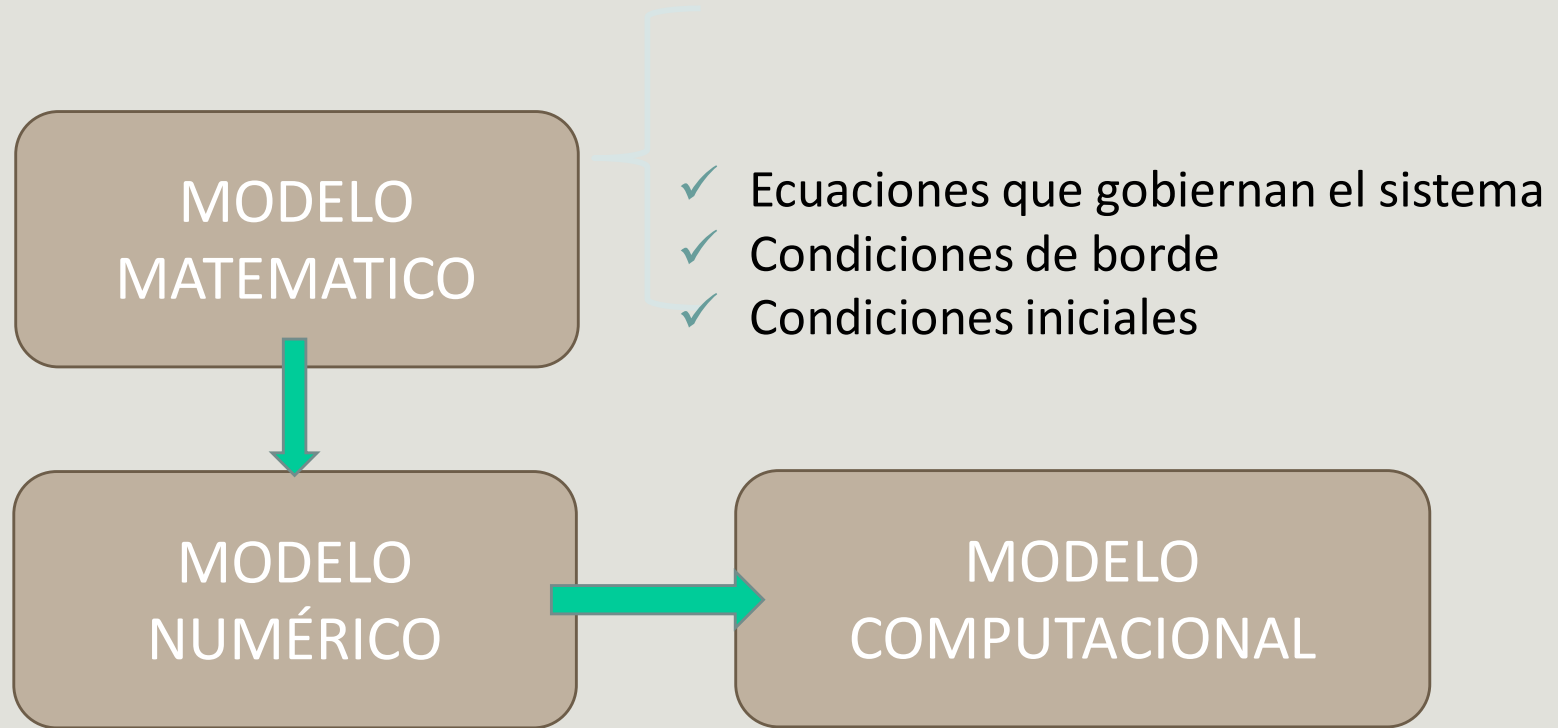
## **Ecuaciones de flujo en medios porosos**

# Modelo matemático



# Modelo matemático

---



# Modelo matemático

Descripción del  
reservorio

Estrategias de  
inyección/producción

EDP  
CI  
CB

Ecuaciones en  
diferencias finitas

Ecuaciones  
algebraicas

Presión,  
Saturación,  
Temperatura,  
Composición,  
etc

Discretización

Linealización

Solución lineal

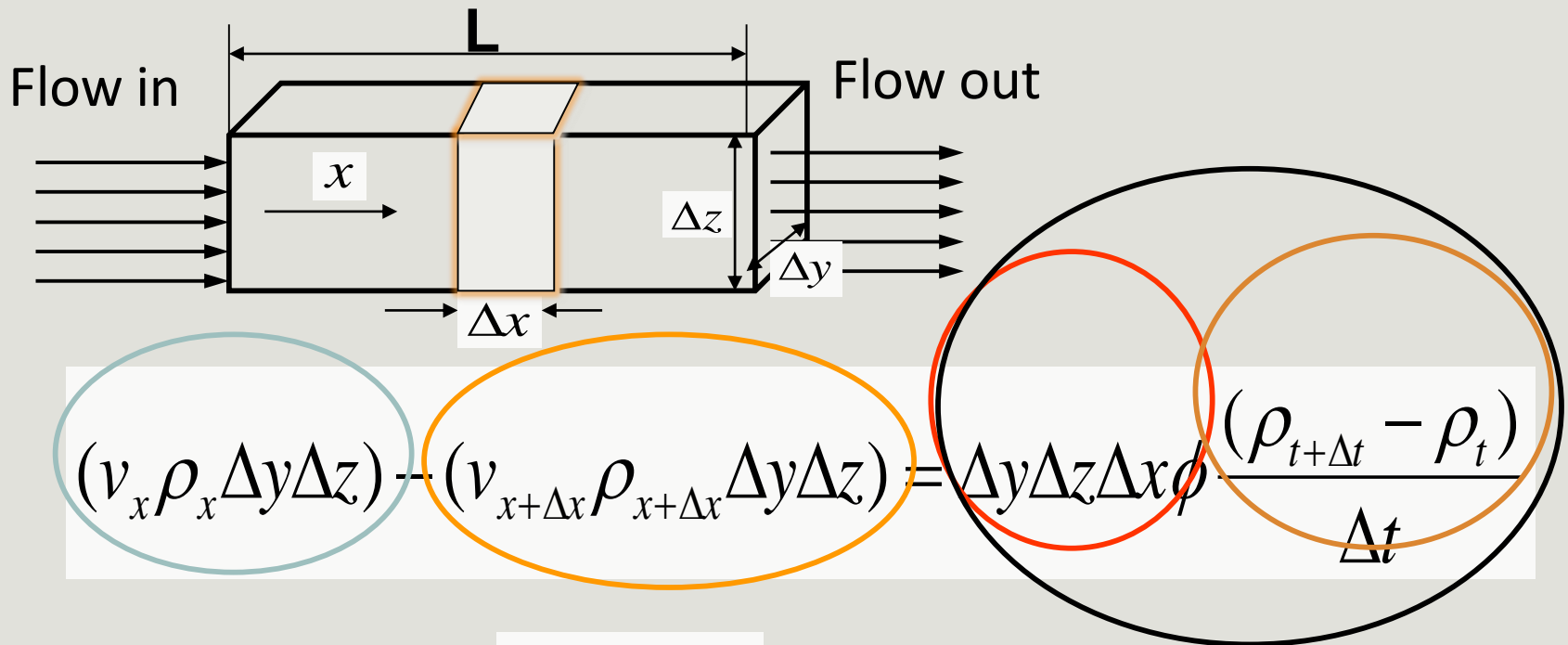
# Ecuaciones diferenciales de flujo en medios porosos

---

- ✓ Ley de conservación de masa.
- ✓ Ley de conservación del momento.
- ✓ Ley de conservación de la energía.
- ✓ Ley de Darcy.
- ✓ Ecuaciones de estado.

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico



Dividiendo por

$$\Delta y \Delta z \Delta x$$

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

$$\frac{(v_x \rho_x \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} - \frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} = \frac{\Delta y \Delta z \Delta x \phi}{\Delta y \Delta z \Delta x} \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

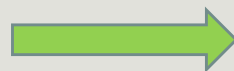
$$-\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

✓ Tomando el límite para

$$\Delta x \text{ y } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

Ecuación de continuidad en un sistema lineal



$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

---

✓ Para un sistema tridimensional

$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} = -\phi \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- ✓ Recordando la ley de Darcy

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

---

$$\frac{\partial \left[ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right]}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de estado

$$\rightarrow \rho = f(P)$$

$$\rho = \rho_0 e^{c(P-P_0)}$$

Fluido poco compresible

$$c = -\frac{1}{V} \left[ \frac{dV}{dP} \right]_T$$

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

$$\frac{\partial \left[ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right]}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$-\left[ \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$-\left[ \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]^2 \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Dividiendo ambos miembros por  $\rho$  y diferenciando la ecuación de la compresibilidad

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

---

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$



Ecuación de difusividad

# Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- ✓ En coordenadas radiales

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

- ✓ En tres dimensiones

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

---

- ✓ Para el petróleo
  - ✓ Ecuación de continuidad
  - ✓ Ecuación de estado
  - ✓ Ley de Darcy

# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

---

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico

$$\left( -\left( A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x \right) - \left( -\left( A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right) = V \left[ \frac{\left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n}{\Delta t} \right]$$



# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

---

- ✓ Para el gas
  - ✓ Libre
  - ✓ Disuelto en el petróleo
  - ✓ Disuelto en el agua

# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico

✓ Gas que entra

$$\left( -A \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x$$

✓ Gas que sale

$$\left( -A \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

- ✓ Acumulación másica de gas

$$V \left[ \frac{\phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^{n+1} - \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^n}{\Delta t} \right]$$

- ✓ Al aplicar el balance y pasando al límite

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

- ✓ En coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

# Ecuaciones básicas de flujo multifásico

---

✓ Para el agua

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

✓ Para coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

# Ecuación general de flujo multifásico

---

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w + S_g) = 0$$

$$Pc_{ow} = P_o - P_w$$

$$Pc_{og} = P_g - P_o$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 \approx 0$$

# Ecuación general de flujo multifásico

$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_g \frac{\partial P_{cg}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cw}}{\partial x} \right) +$$
$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_g \frac{(\rho_g gh)}{\partial x} + \lambda_o \frac{(\rho_o gh)}{\partial x} + \lambda_w \frac{(\rho_w gh)}{\partial x} \right) = \beta_1 \frac{\partial P_o}{\partial t} - \beta_2$$

Propiedades PVT

Producción

---

# **Modelo numérico**

## **Ecuaciones de flujo en medios porosos**

# Discretización en espacio y tiempo

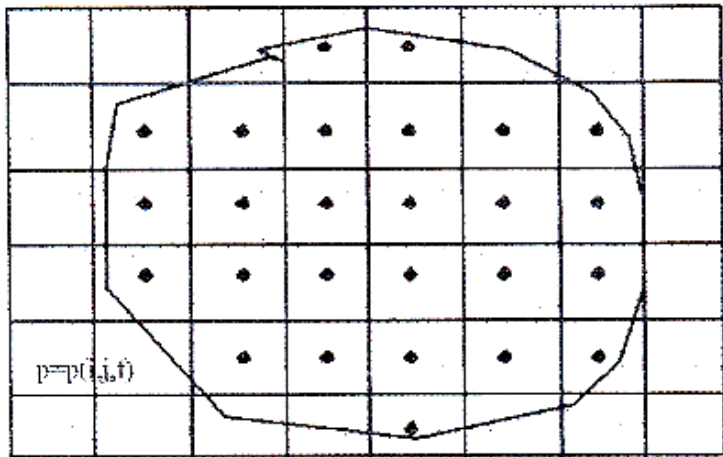


Fig. 1: Sistema discreto

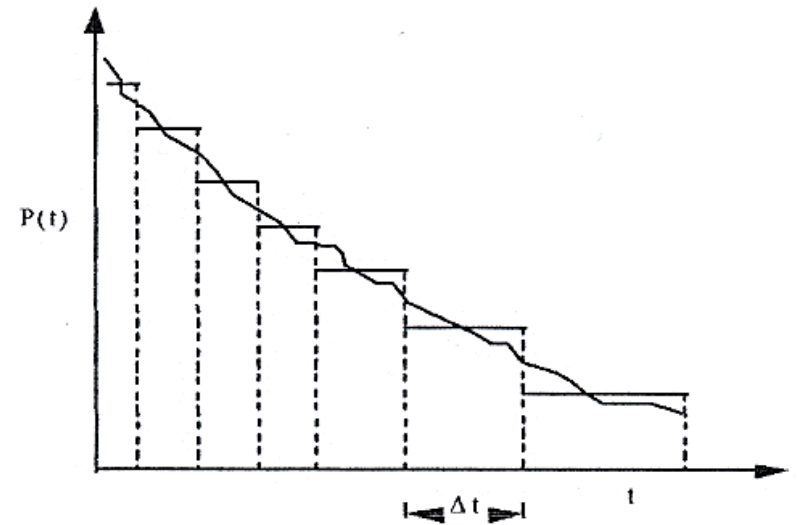


Fig. 2: Discretización en el tiempo

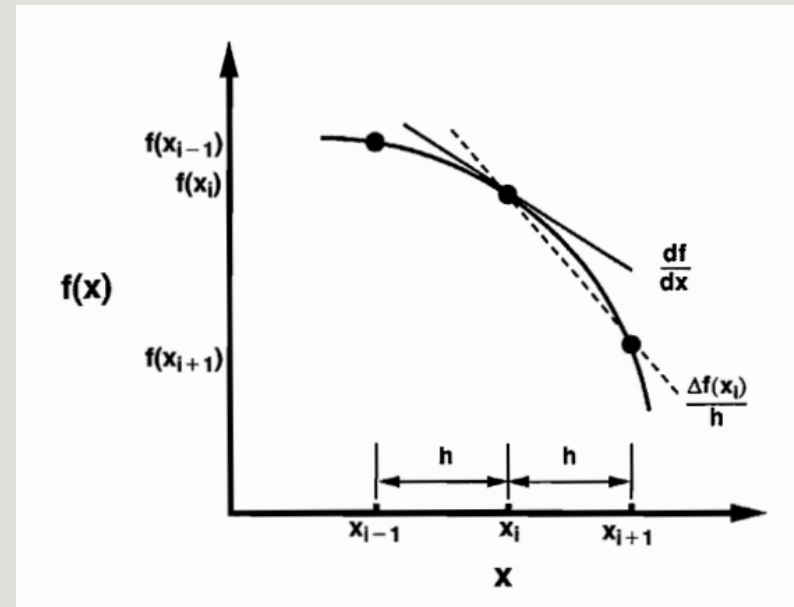


# Cociente de diferencias de primer orden

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$

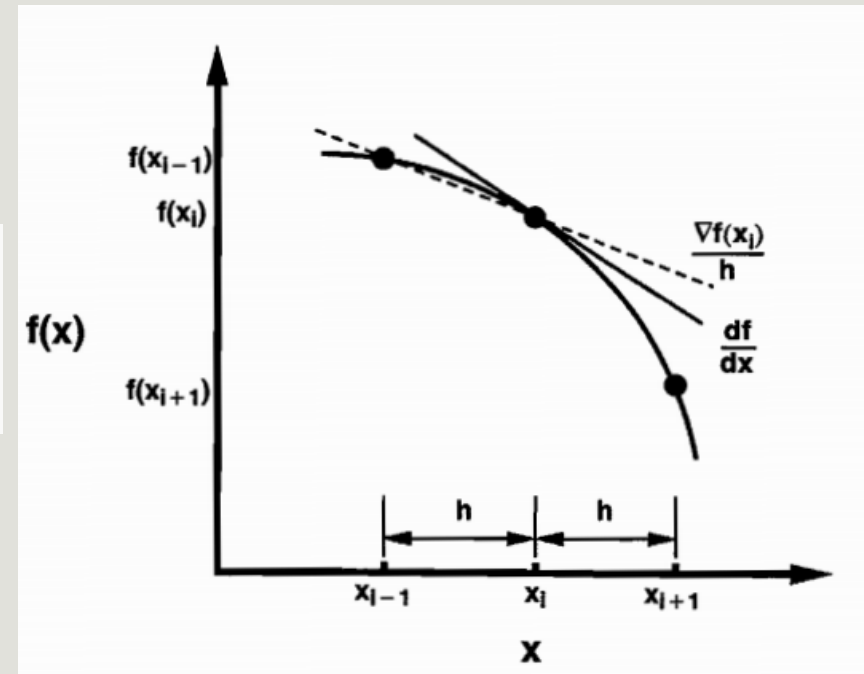


# Cociente de diferencias de primer orden

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x) - P(x - \Delta x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$

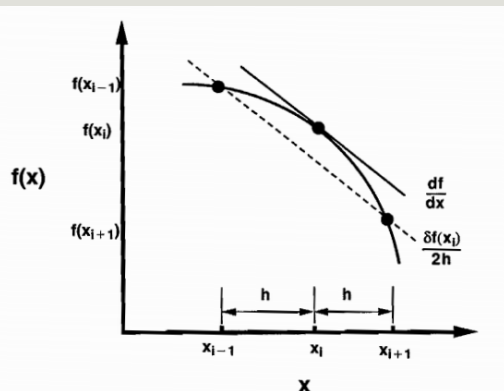


# Diferencias centrales

✓ Restando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2\Delta x} + r(\Delta x^2)$$

# Cociente de diferencias de segundo orden

---

✓ Sumando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P'' = \frac{P(x + \Delta x) - 2P(x) + P(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + r(\Delta x^2)$$

# Ejemplo

$$\frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx}$$

$i$	$x_i$	(deg)	$\operatorname{sen}$	$\operatorname{cos}$
1	0	0	0	
2	$\pi / 12$	15	0.2588	
3	$\pi / 6$	30	0.5000	
4	$\pi / 4$	45	0.7071	0.7071
5	$\pi / 3$	60	0.8660	
6	$5\pi / 12$	75	0.9654	
7	$\pi / 2$	90	1.0000	

# EJEMPLO

---

Diferencia hacia adelante

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.7071}{\pi / 3 - \pi / 4} = 0.6070 \quad \varepsilon = 14.2\%$$

Diferencia hacia atrás

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.7071 - 0.5000}{\pi / 4 - \pi / 6} = 0.7911 \quad \varepsilon = 11.9\%$$

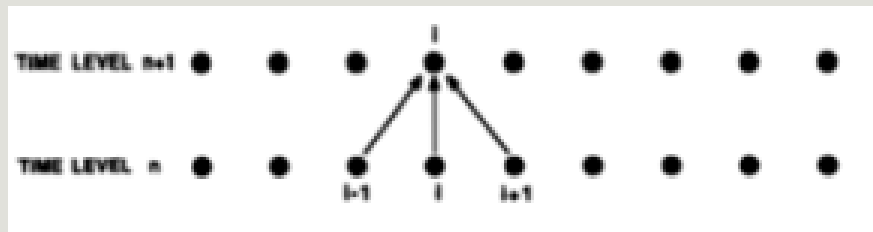
Diferencia central

$$\left. \frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.5000}{\pi / 3 - \pi / 6} = 0.6990 \quad \varepsilon = 1.15\%$$

# Soluciones explícitas e implícitas

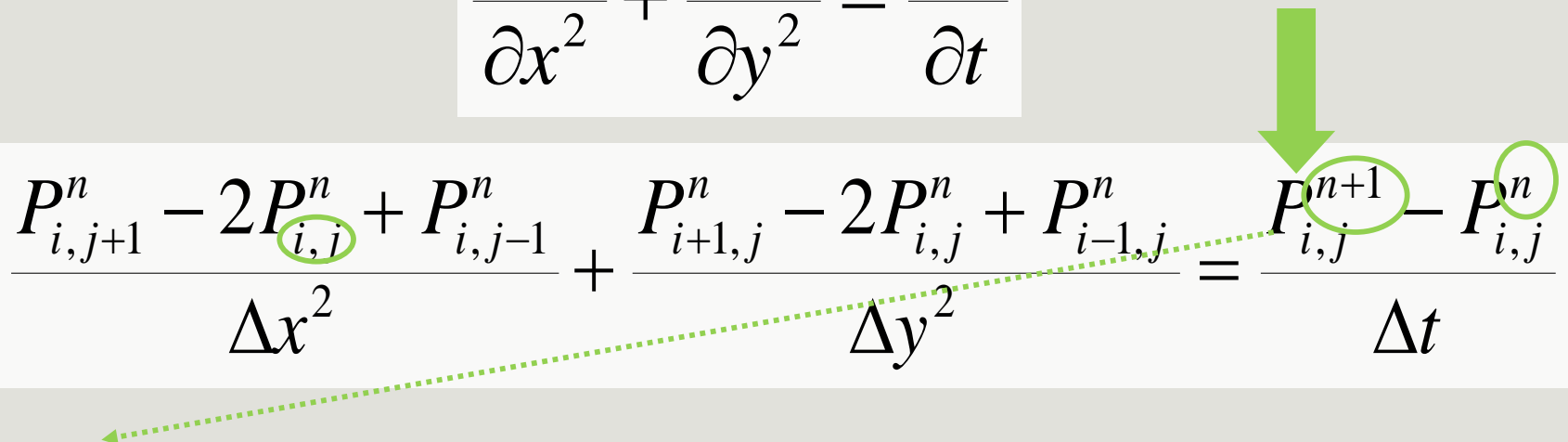
$$t_1 \longrightarrow t_2$$

- ✓ Esquema explícito: los nuevos valores pueden calcularse “individualmente” para cada  $x$ .
- ✓ Esquema implícito: Se calculan simultáneamente todos los valores de  $x$ .



# Método explícito

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$


$$\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} = \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[ \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$



# Método explícito

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[ \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \alpha [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] + \beta [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n]$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

# Método implícito

---

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}$$

# Método implícito

---

$$P_{i-1}^{n+1} - \left( 2 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} P_i^n$$

$$a_i P_{i-1} + b_i P_i + c_i P_{i+1} = d_i$$

# Método implícito

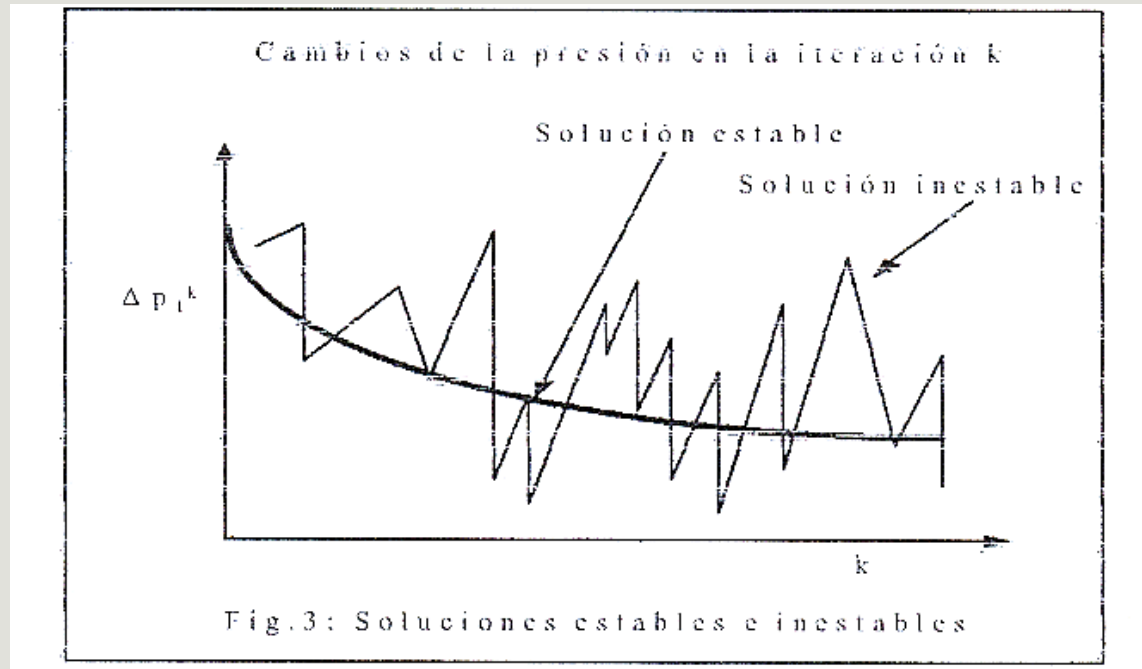
---

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & a_1 P_0 & -b_1 P_1 & +c_1 P_2 & & = d_1 \\ 2 & & a_2 P_1 & -b_2 P_2 & +c_2 P_3 & = d_2 \\ 3 & & & a_3 P_2 & -b_3 P_3 & +c_3 P_4 & = d_3 \\ \dots & & & & & & \\ N & & & & a_N P_{N-1} & -b_N P_N & +c_N P_{N+1} & = d_N \end{array}$$

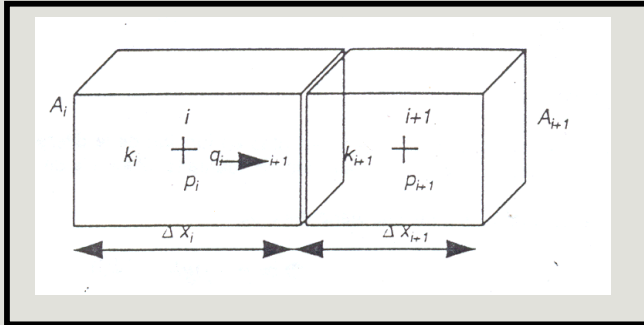
# Estabilidad

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \leq 1 \Rightarrow \text{sol. estable}$$

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \geq 1 \Rightarrow \text{sol. inestable}$$



# Flujo entre dos bloques contiguos



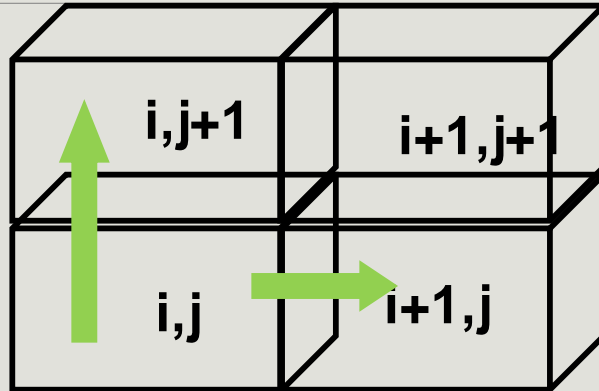
$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_i k_i (p_i - p_{i+1/2})}{\mu_i \Delta x_i / 2}$$

$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_{i+1} k_{i+1} (p_{i+1/2} - p_{i+1})}{\mu_{i+1} \Delta x_{i+1} / 2}$$

$$q_i \rightarrow_{i+1} = T_{i+1/2} (p_i - p_{i+1})$$

$$T_{i+1/2} = \frac{2A_i A_{i+1} k_i k_{i+1}}{A_i k_i \Delta x_{i+1} + A_{i+1} k_{i+1} \Delta x_i} \cdot \frac{1}{\mu}$$

# Flujo entre dos bloques contiguos



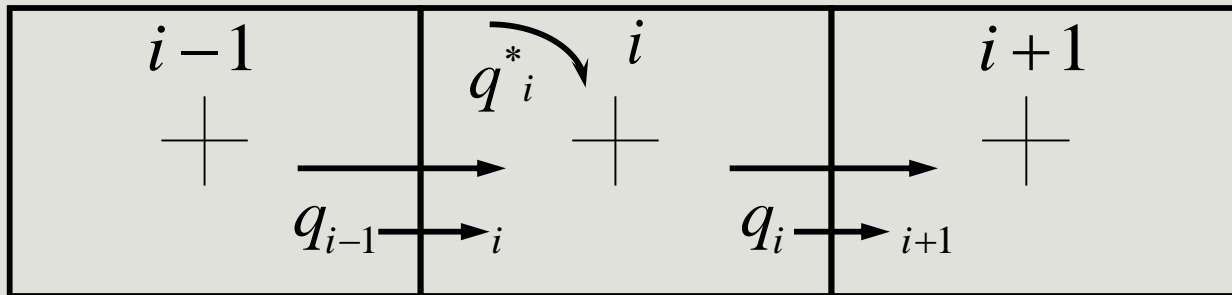
$$T_{i+1/2, j} = \frac{2A_{i, j} A_{i+1, j} k_{i, j} k_{i+1, j}}{A_{i, j} k_{i, j} \Delta x_{i+1, j} + A_{i+1, j} k_{i+1, j} \Delta x_{i, j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$q_{i, j} \rightarrow_{i, j+1} = T_{i, j+1/2} (p_{i, j} - p_{i, j+1})$$

$$T_{i, j+1/2} = \frac{2A_{i, j} A_{i, j+1} k_{i, j} k_{i, j+1}}{A_{i, j} k_{i, j} \Delta x_{i, j+1} + A_{i, j+1} k_{i, j+1} \Delta x_{i, j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

# Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico



Por ser un fluido incompresible no hay cambio neto de masa en el tiempo

➡ Caudal másico que entra -caudal másico que sale=0



# Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

---

$$\rho_{sc} q_{i \rightarrow i+1} - \rho_{sc} (q_{i-1 \rightarrow i} + q_i^*) = 0$$

$$\Phi = p - \rho g h$$

$$T_{i+1/2} (\Phi_i - \Phi_{i+1}) - T_{i-1/2} (\Phi_{i-1} - \Phi_i) - q_i^* = 0$$

$$T_{i+1/2} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) - T_{i-1/2} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) + q_i^* = 0$$

# Ecuación de flujo en medios porosos en sistema discreto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_c k_x A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_c k_y A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left( \beta_c k_z A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \Delta z + \mu q_{sc} = 0$$

$$\left( \beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)$$

$$T_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) - T_{i-1/2} (p_i - p_{i-1}) + q^*_i = 0$$

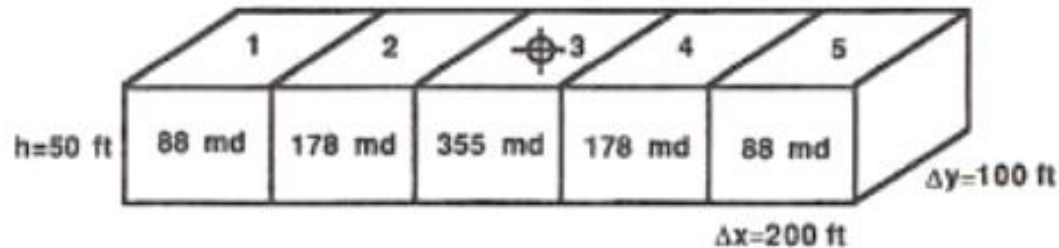
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{B_l^o \mu_l q_{lsc}}{\beta_c k_x V_b} = \frac{\phi \mu_l c_l}{\beta_c \alpha_c k_x} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $l = o, w$

$$T_{l_{xi-1/2}}^n p_{i-1}^{n+1} - \left[ \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_i + T_{l_{xi+1/2}}^n + T_{l_{xi-1/2}}^n \right] p_i^{n+1} + T_{l_{xi+1/2}}^n p_{i+1}^{n+1} = - \left[ q_{lsci} + \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_i p_i^n \right]$$

# Ejemplo 1

**4-2** Considere el flujo 1D, monofásico, incompresible en el reservorio horizontal de la figura. Los bloques 1 y 5 están localizados en los bordes del reservorio y se mantienen a 3000 psia. Un pozo productor está situado en el centro de la celda 3 y produce a un caudal de 2000 STB/D. Como muestra la figura todos los bloques tienen dimensiones uniformes. La distribución de permeabilidades presenta simetría. La viscosidad del fluido es 1 cP. Calcule la distribución de presiones.



$$\left( \beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)$$

$$T_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - T_{i-1/2}(p_i - p_{i-1}) + q^*_i = 0$$

Quantity	Symbol	System of Units		Conversion Factor*
		Customary Unit	Metric Unit	
Transmissibility conversion factor	$\beta_c$	1.127	$86.4 \times 10^{-6}$	-
Gravity conversion factor	$\gamma_c$	$0.21584 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	-
Volume conversion factor	$\alpha_c$	5.614583	1	-

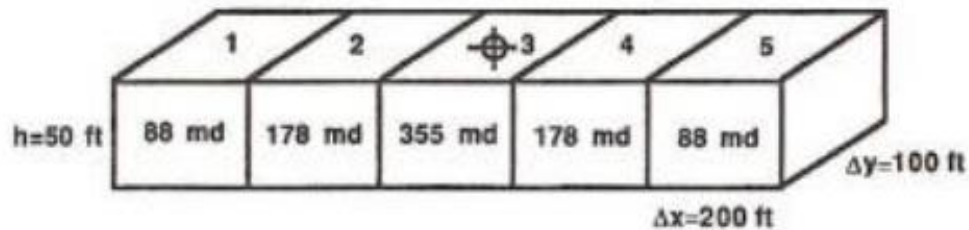
$$T_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - T_{i-1/2}(p_i - p_{i-1}) + q^*_i = 0$$

$$T_{23}(p_3 - p_2) - T_{12}(p_2 - p_1) = 0$$

$$T_{34}(p_4 - p_3) - T_{23}(p_3 - p_2) + q_3 = 0$$

$$T_{45}(p_5 - p_4) - T_{34}(p_4 - p_3) = 0$$

---



**FIN**

---