

# UNIDAD 2: integrales dobles y triples

## Integrales triples

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## Ejemplo 5.15

Integrar  $e^{x+y+z}$  en la caja  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

## Ejemplo 5.15

Integrar  $e^{x+y+z}$  en la caja  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left( e^{x+y+z} \Big|_{x=0}^1 \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) dy dz \\ &= \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) \Big|_{y=0}^1 dz \\ &= \int_0^1 (e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z) dz \\ &= (e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z) \Big|_0^1 \\ &= e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e - 1)^3\end{aligned}$$

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Describimos la bola por

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Describimos la bola por

$$1 \leq x \leq 1,$$

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Describimos la bola por

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx \, dy \, dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Describimos la bola por

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.17

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Describamos la bola por

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$$V = \iiint_W dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx.$$

## Ejemplo 5.17

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx$$

## Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy \, dx \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \, dx \end{aligned}$$

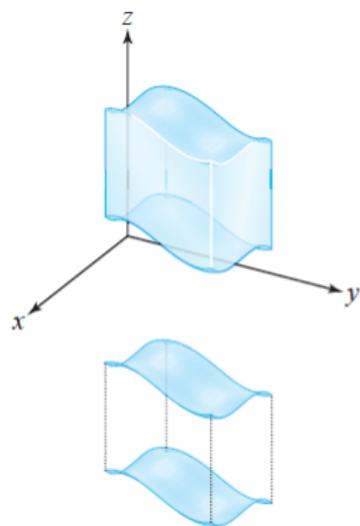
## Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \underbrace{\left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \right)}_{\int_{-a}^a (a^2-y^2)^{1/2} dy = \frac{a^2}{2}\pi = \frac{1-x^2}{2}\pi} dx \end{aligned}$$

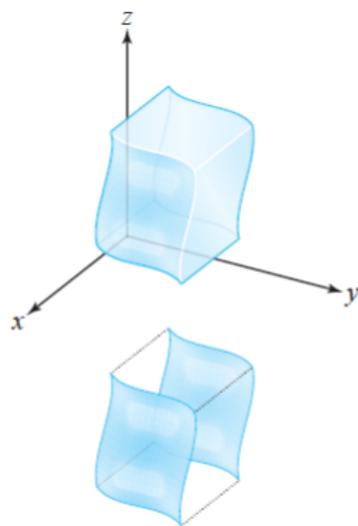
## Ejemplo 5.17

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \underbrace{\left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \right)}_{\int_{-a}^a (a^2-y^2)^{1/2} dy = \frac{a^2}{2}\pi = \frac{1-x^2}{2}\pi} dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

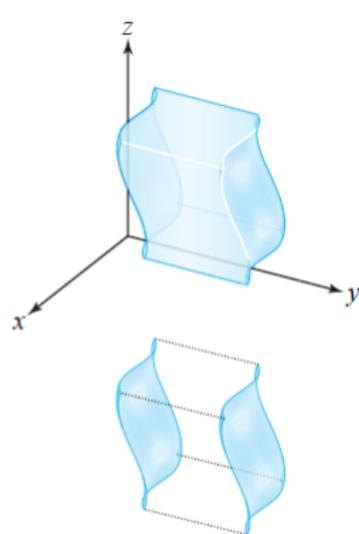
# Regiones elementales



Top and bottom are  
surfaces  $z = \gamma(x, y)$

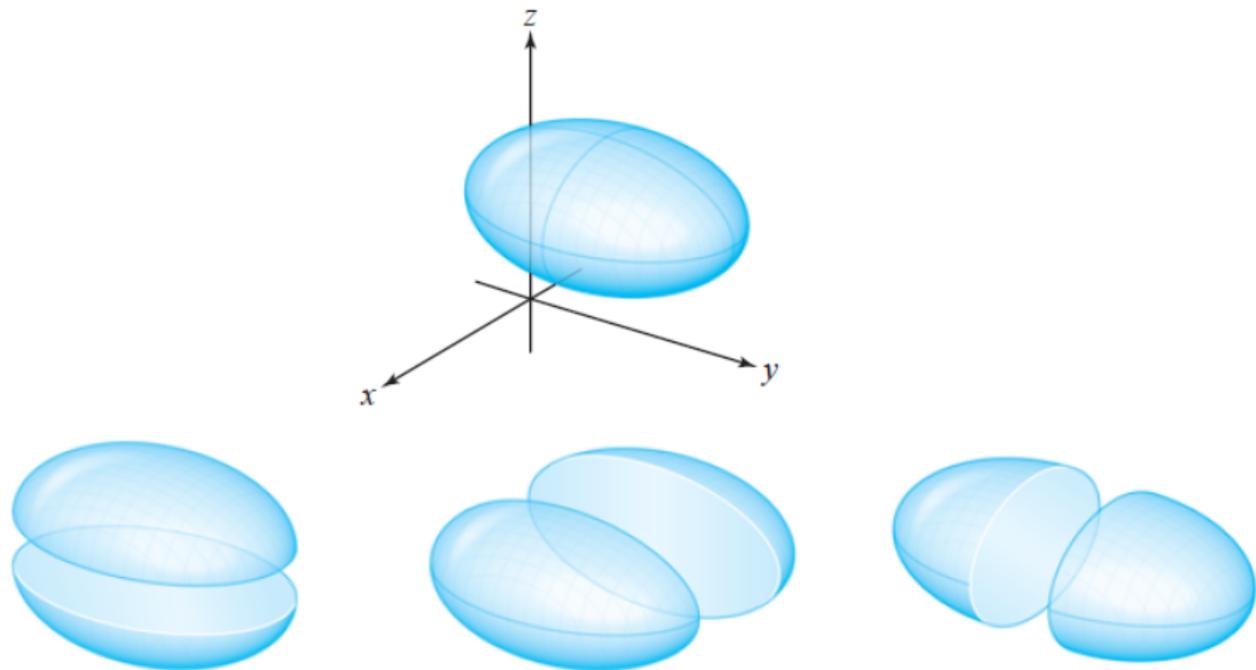


Front and rear are  
surfaces  $x = \rho(y, z)$



Left and side are  
surfaces  $y = \delta(x, z)$

# Regiones elementales simétricas



## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

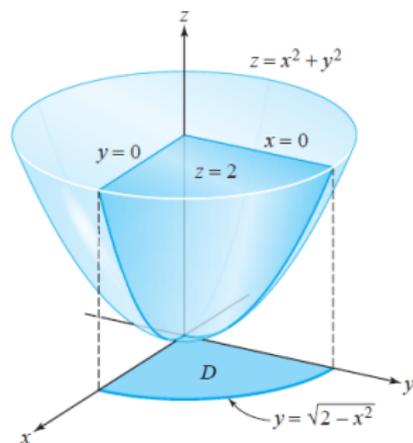
$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq \sqrt{2}, \\0 &\leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \\x^2 + y^2 &\leq z \leq 2.\end{aligned}$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq 2. \end{aligned}$$

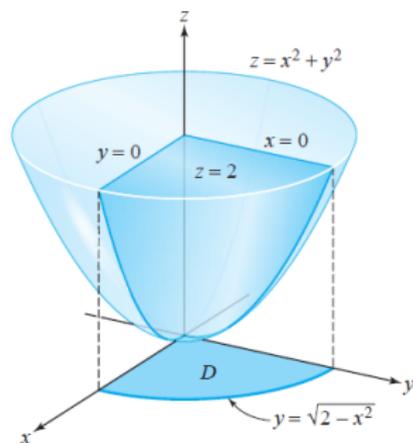


## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq 2. \end{aligned}$$



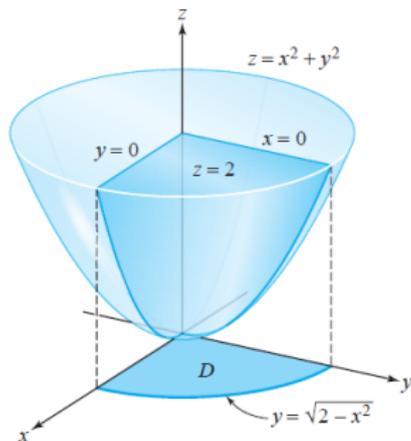
$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx =$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 1:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq 2. \end{aligned}$$



$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 2:

$$0 \leq z \leq 2,$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 2:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 2, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{z}, \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 2:

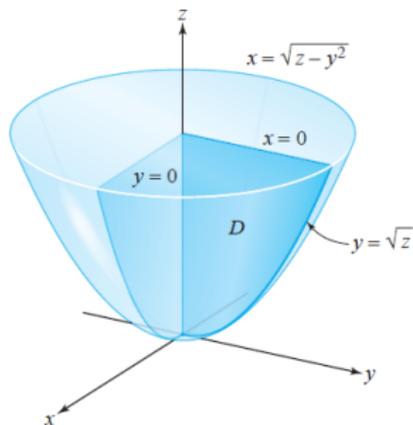
$$\begin{aligned}0 &\leq z \leq 2, \\0 &\leq y \leq \sqrt{z}, \\0 &\leq x \leq \sqrt{z - y^2}.\end{aligned}$$

## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 2:

$$\begin{aligned}0 &\leq z \leq 2, \\0 &\leq y \leq \sqrt{z}, \\0 &\leq x \leq \sqrt{z - y^2}.\end{aligned}$$



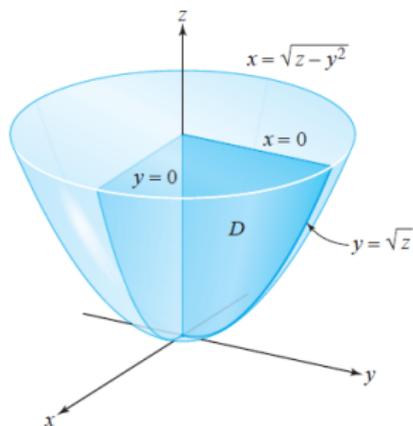


## Ejemplo 5.18

Sea  $W$  la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante. Calcular  $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$  y esbozar la región.

Método 2:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 2, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{z}, \\ 0 &\leq x \leq \sqrt{z - y^2}. \end{aligned}$$



$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \, dy \, dz = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 dy dx$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( 2y - x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( 2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left( 2x - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( 2x - \frac{4x^3}{3} \right) dx \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.19

a) Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x z \Big|_{x^2+y^2}^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( 2y - x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left( 2x - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( 2x - \frac{4x^3}{3} \right) dx \\ &= \left( x^2 - \frac{x^4}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

## Ejemplo 5.19

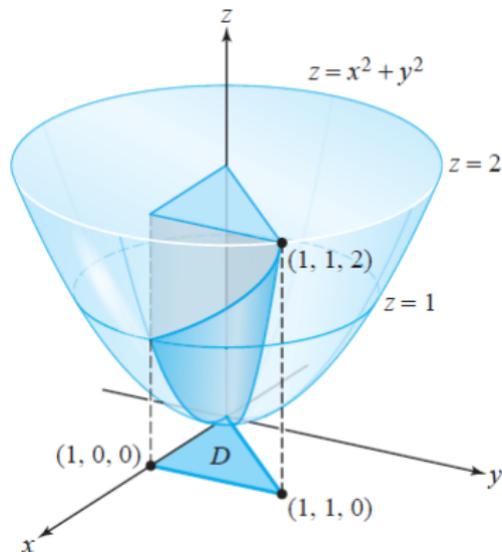
a) Hemos calculado  $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \frac{2}{3}$ .

## Ejemplo 5.19

- a) Hemos calculado  $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \frac{2}{3}$ .
- b) Dibujar la región de integración.

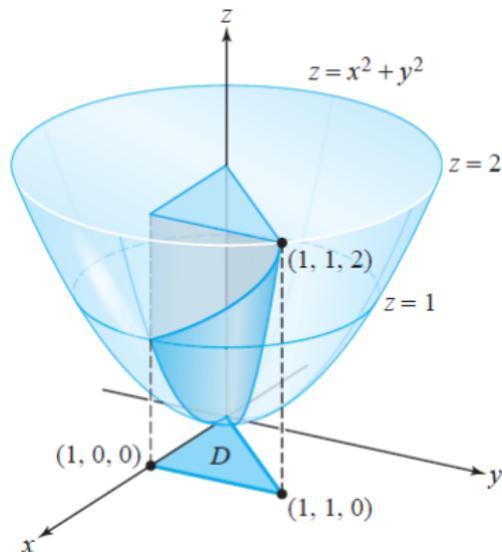
## Ejemplo 5.19

- a) Hemos calculado  $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \frac{2}{3}$ .
- b) Dibujar la región de integración.



## Ejemplo 5.19

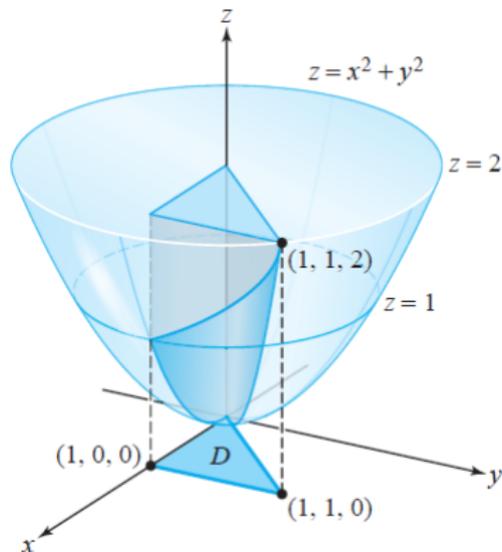
- a) Hemos calculado  $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \frac{2}{3}$ .
- b) Dibujar la región de integración.



- c) Interpretar la integral.

## Ejemplo 5.19

- a) Hemos calculado  $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx = \frac{2}{3}$ .
- b) Dibujar la región de integración.



- c) Interpretar la integral. La integral es el volumen de la región de integración.

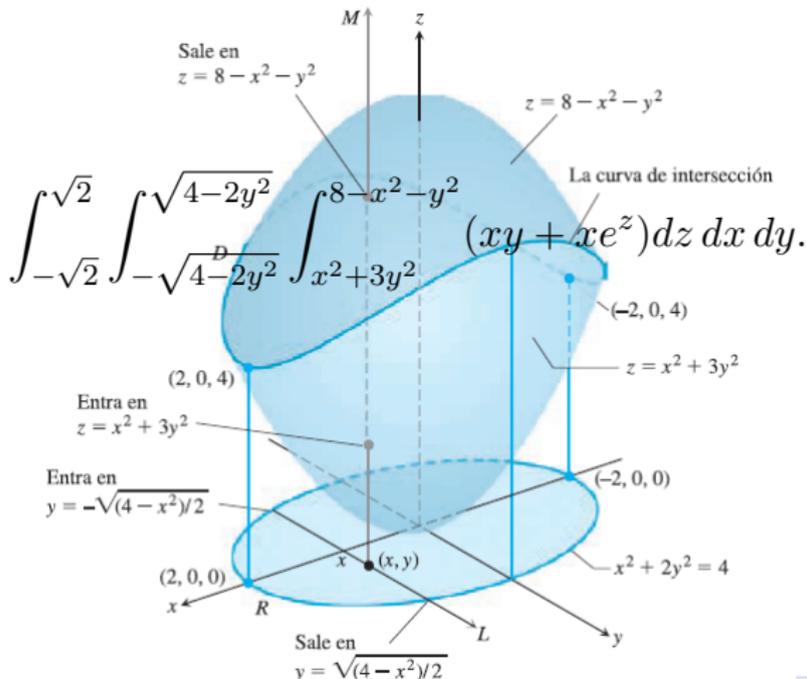
## Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$ . SOL Thomas, pag.862.



# Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$ . SOL Thomas, pag.862.



## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## Ejercicios capítulo 5

En los ejercicios del 1 al 4, efectuar la integración indicada en la caja dada.

2. 
$$\iiint_B e^{-xy} dx dy dz, B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

3. 
$$\iiint_B (2x + 3y + z) dx dy dz, B = [0, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1].$$

En los ejercicios del 5 al 8, describir la región dada como una región elemental.

5. La región que está entre el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el paraboloido  $z = x^2 + y^2$ .

6. La región cortada por el cilindro  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  en la bola  $2x^2 + z^2 = 1$ , esto es, la región dentro del cilindro y de la bola.

En los ejercicios del 9 al 12 hallar el volumen de la región correspondiente.

9. La región limitada por  $z = x^2 + y^2$ , y  $z = 10 - x^2 - 2y^2$ .

11. El sólido limitado por  $x = y$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ , y  $x + y + z = 0$ .

# Ejercicio

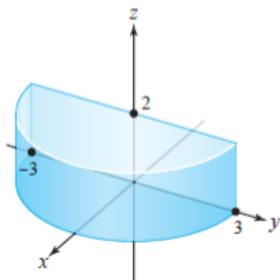
1. Cada integral iterada (a) a (d) es una integral sobre una región D. Aparee cada integral con la correspondiente región de integración.

(a)  $\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x}}^{\sqrt{9-x}} dy dz dx$

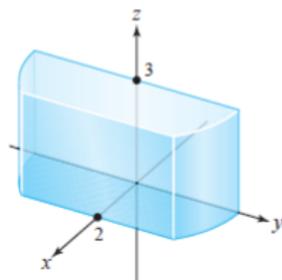
(b)  $\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy dx dz$

(c)  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y dz dy dx$

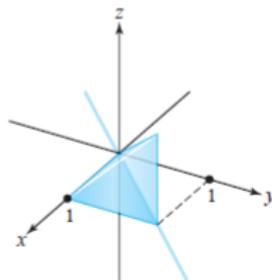
(d)  $\int_0^1 \int_0^y \int_0^x dz dx dy$



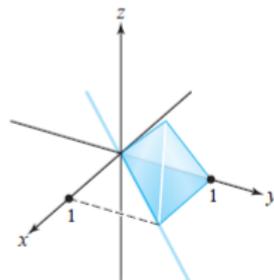
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

## Ejercicios capítulo 5

Calcular las integrales en los ejercicios del 13 al 21.

14. 
$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz) dz dy dx.$$

19. 
$$\iiint_W (1 - z^2) dx dy dz;$$
  $W$  es la pirámide con vértice superior en  $(0, 0, 1)$  y cuyos vértices en la base son  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(1, 1, 0)$ .

21. 
$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx.$$

22. a) Dibujar la región de integración de la integral 
$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx.$$
- b) Escribir la integral con el siguiente orden de integración:  $dx dy dz$ .

## Ejercicios capítulo 5

Para las regiones de los ejercicios del 23 al 26, encontrar los límites de integración apropiados  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ ,  $\gamma_1(x, y)$ , y  $\gamma_2(x, y)$ , y escribir la integral triple en la región  $W$  como una integral iterada de la forma:

$$\iiint_W f dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[ \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

23.  $W = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## Aplicaciones de una región en otra

Sean  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación **diferenciable**; llamamos  $D = T(D^*)$ .

## Aplicaciones de una región en otra

Sean  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación **diferenciable**; llamamos  $D = T(D^*)$ .

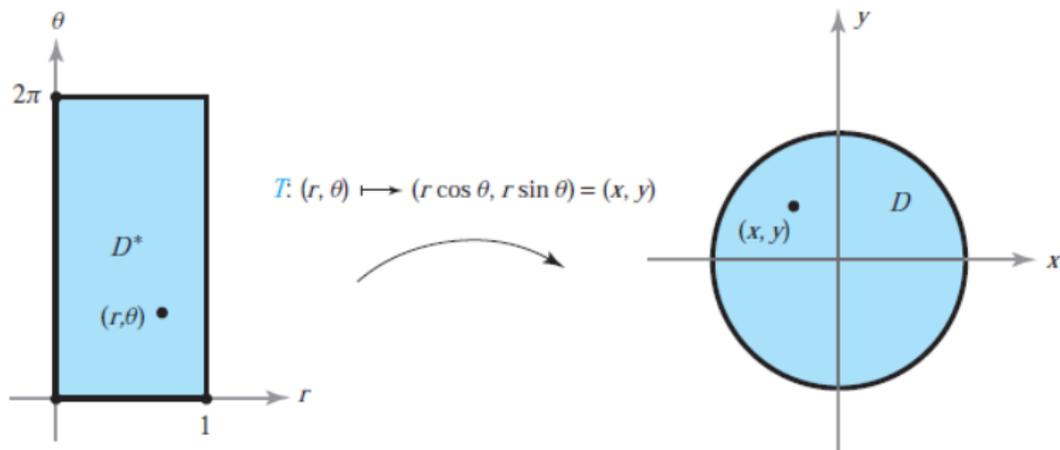
Una forma de comprender la geometría de una aplicación  $T$  es ver cómo **deforma** a  $D^*$ .

# Aplicaciones de una región en otra

Sean  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación **diferenciable**; llamamos  $D = T(D^*)$ .

Una forma de comprender la geometría de una aplicación  $T$  es ver cómo **deforma** a  $D^*$ .

Ej 6.1: Sean  $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$  y  
 $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .



## Definición

Una aplicación  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  es inyectiva en  $D^*$  si para  $(u, v)$  y  $(u', v')$  en  $D^*$ ,  $T(u, v) = T(u', v')$  implica  $u = u'$  y  $v = v'$ .

## Definición

Una aplicación  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  es inyectiva en  $D^*$  si para  $(u, v)$  y  $(u', v')$  en  $D^*$ ,  $T(u, v) = T(u', v')$  implica  $u = u'$  y  $v = v'$ .

Ej 6.3: la aplicación de cambio a coordenadas polares  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  no es inyectiva si su dominio es  $\mathbb{R}^2$ .

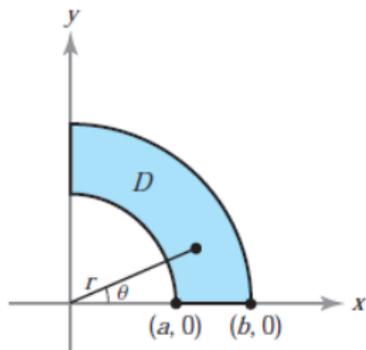
## Definición

Una aplicación  $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  es inyectiva en  $D^*$  si para  $(u, v)$  y  $(u', v')$  en  $D^*$ ,  $T(u, v) = T(u', v')$  implica  $u = u'$  y  $v = v'$ .

Ej 6.3: la aplicación de cambio a coordenadas polares  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  no es inyectiva si su dominio es  $\mathbb{R}^2$ .  
(Analizar  $T(0, \theta_1)$  y  $T(0, \theta_2)$ .)

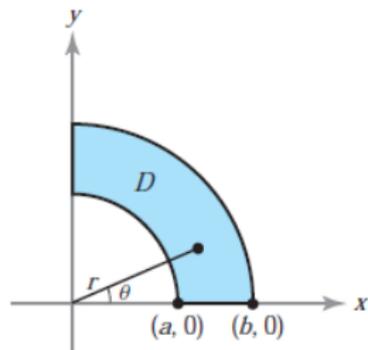
## Ejemplo 6.7

Sea  $D$  la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = b^2$ ,  $0 < a < b$ . Sea  $T$  la transformación a coordenadas polares,  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Hallar  $D^*$  tal que  $T(D^*) = D$ .



## Ejemplo 6.7

Sea  $D$  la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = b^2$ ,  $0 < a < b$ . Sea  $T$  la transformación a coordenadas polares,  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Hallar  $D^*$  tal que  $T(D^*) = D$ .



Rta:  $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$ .

## Propiedad (sin demostración)

Si  $D^*$  y  $D$  son regiones elementales y  $T : D^* \rightarrow D$  tiene la propiedad de que el determinante de  $\mathbf{DT}(u, v)$  no se anula en ningún  $(u, v) \in D^*$ , y si  $T$  transforma la frontera de  $D^*$  de forma inyectiva y sobreyectiva en la frontera de  $D$ , entonces  $T$  es inyectiva y sobreyectiva de  $D^*$  en  $D$ .

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

Dados  $D$  y  $D^*$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow D$  (diferenciable),  
 $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in D^*$ , buscamos calcular

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Dados  $D$  y  $D^*$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow D$  (diferenciable),  
 $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in D^*$ , buscamos calcular

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Si fuera cierto que  $\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) du dv$ ,

Dados  $D$  y  $D^*$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow D$  (diferenciable),  
 $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in D^*$ , buscamos calcular

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Si fuera cierto que  $\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) du dv$ ,  
en particular tendríamos que

$$\underbrace{\iint_D dx dy}_{A(D)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\iint_{D^*} du dv}_{A(D^*)}$$

que es falso.

## Definición (Determinante jacobiano)

Sea  $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación de clase  $C^1$  dada por  $x = x(u, v)$  y  $y = y(u, v)$ . El **determinante jacobiano** de  $T$ , que se escribe  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ , es el determinante de  $\mathbf{DT}(u, v)$ , la matriz derivada de  $T$ :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

## Definición (Determinante jacobiano)

Sea  $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación de clase  $C^1$  dada por  $x = x(u, v)$  y  $y = y(u, v)$ . El **determinante jacobiano** de  $T$ , que se escribe  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ , es el determinante de  $\mathbf{DT}(u, v)$ , la matriz derivada de  $T$ :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ej. 6.8: para la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas, el determinante jacobiano es

## Definición (Determinante jacobiano)

Sea  $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación de clase  $C^1$  dada por  $x = x(u, v)$  y  $y = y(u, v)$ . El **determinante jacobiano** de  $T$ , que se escribe  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ , es el determinante de  $\mathbf{DT}(u, v)$ , la matriz derivada de  $T$ :

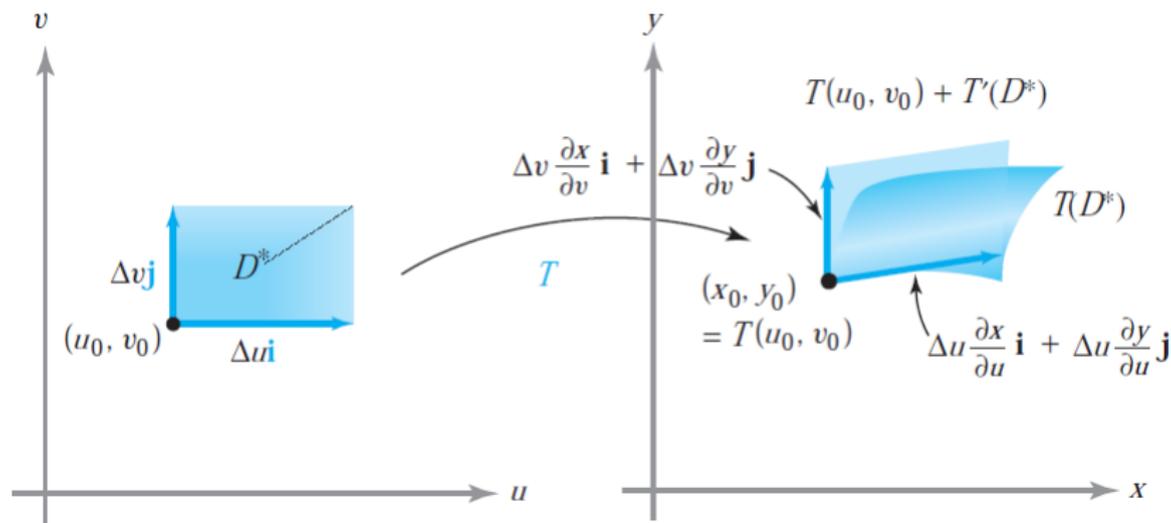
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ej. 6.8: para la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas, el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

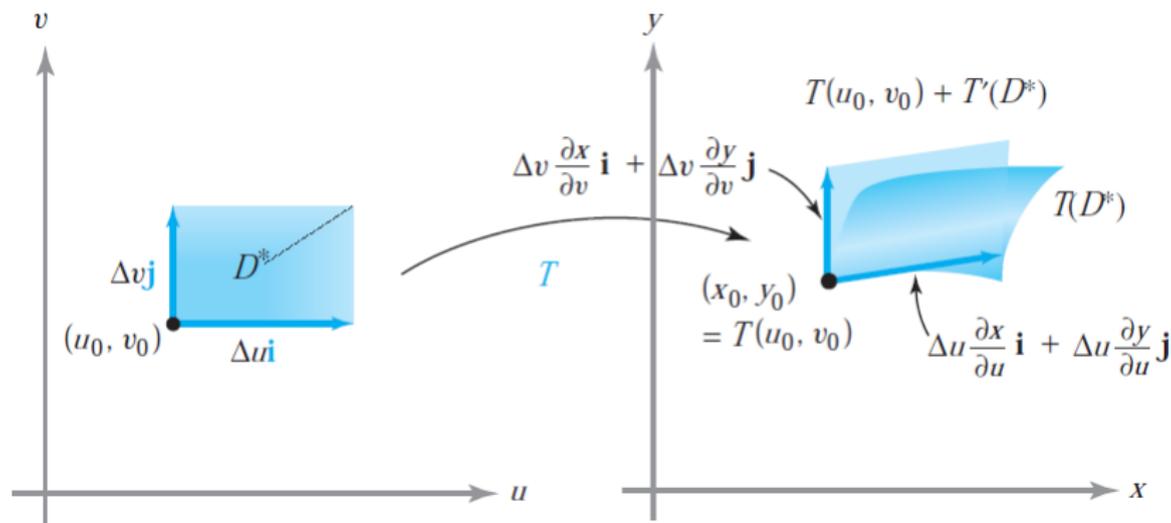
# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$



# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

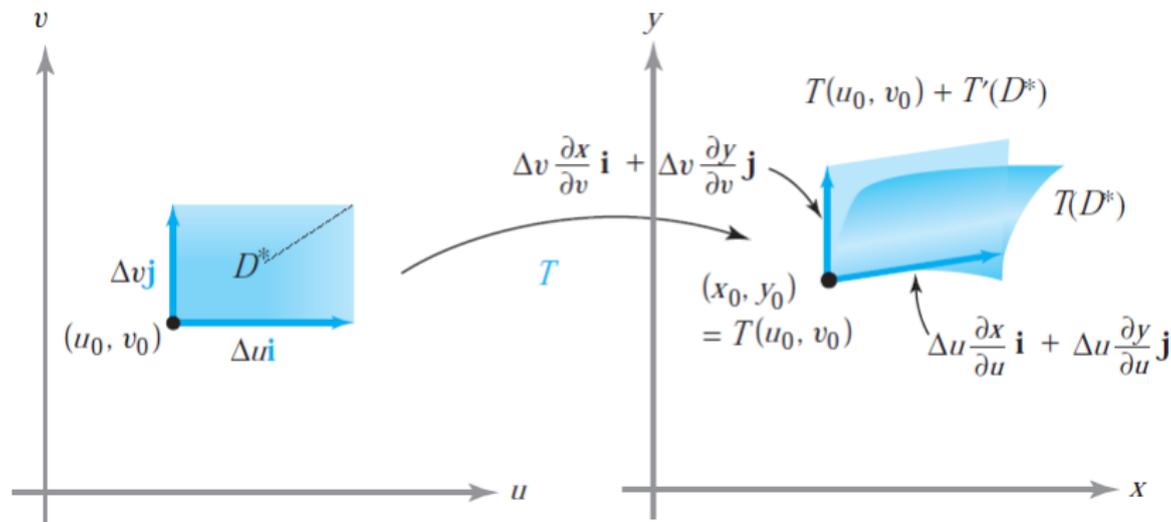
$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $T'$  es una matriz  $2 \times 2$ , la linealización de  $T$  en  $(u_0, v_0)$  es:  $L(u, v) = T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$ .



# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

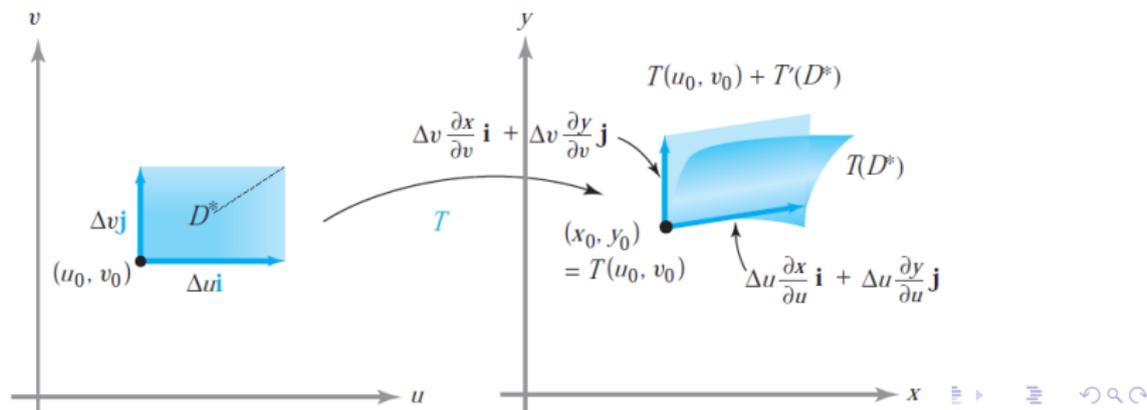
$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $T'$  es una matriz  $2 \times 2$ , la linealización de  $T$  en  $(u_0, v_0)$  es:  $L(u, v) = T(u_0, v_0) + T'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$ .

$$T'(\Delta u \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u \mathbf{T}_u \quad T'(\Delta v \mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v \mathbf{T}_v$$



# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $T'$  es una matriz  $2 \times 2$ , la linealización de  $T$  en  $(u_0, v_0)$  es:  $L(u, v) = T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix}$

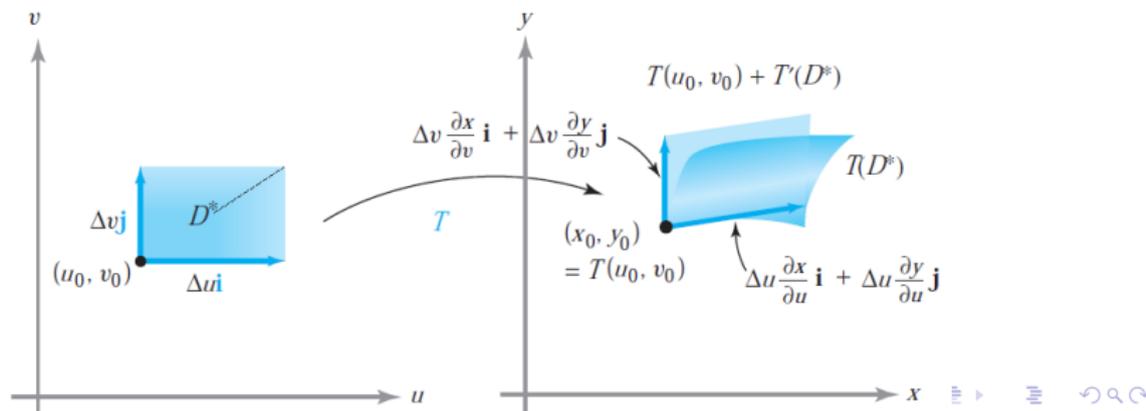


# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $T'$  es una matriz  $2 \times 2$ , la linealización de  $T$  en  $(u_0, v_0)$  es:  $L(u, v) = T(u_0, v_0) + T'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$

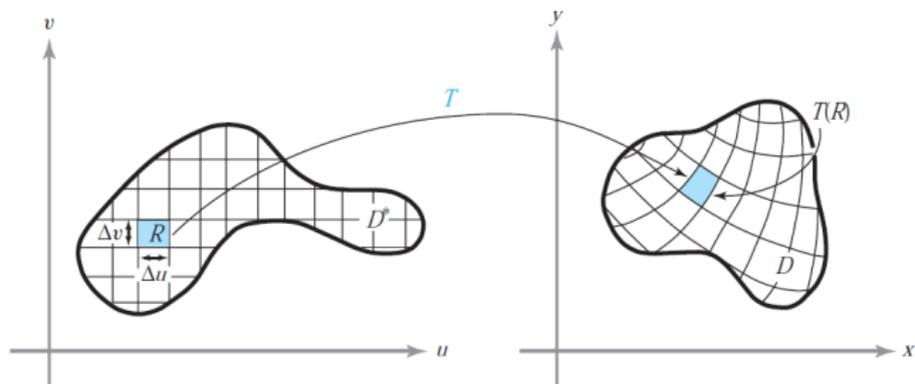
area of  $T(D^*)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v \quad \text{evaluated at } (u_0, v_0).$$



# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

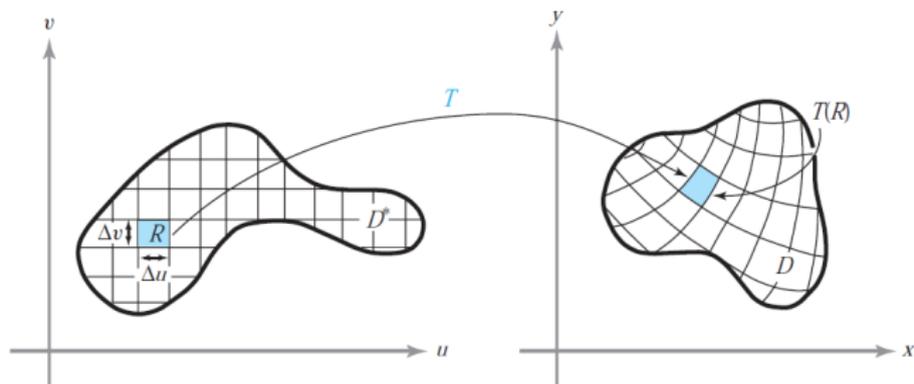
$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$



$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

# $A(D)$ (explicación de la fórmula)

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$



$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Coordenadas polares

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\theta.$$

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean  $D$  y  $D^*$  regiones elementales del plano y sea  $T : D^* \rightarrow D$  de clase  $C^1$  e inyectiva, tal que  $D = T(D^*)$ . Entonces para cualquier función integrable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , tenemos

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Sin demostración.

## Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean  $D$  y  $D^*$  regiones elementales del plano y sea  $T : D^* \rightarrow D$  de clase  $C^1$  e inyectiva, tal que  $D = T(D^*)$ . Entonces para cualquier función integrable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , tenemos

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Sin demostración.

Coordenadas polares: la fórmula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

es válida cuando  $T$  transforma  $D^*$  en  $D$  de forma inyectiva, excepto tal vez en la frontera de  $D^*$ .

## Ejemplo 6.12: integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

## Ejemplo 6.12: integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} (e^{-a^2} - 1) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \end{aligned}$$

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - **Fórmula del cambio de variables para integrales triples**
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

# Cambio de variables en integrales triples

$$\begin{aligned} & \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned}$$

donde  $W^*$  es una región elemental en el espacio que se corresponde con  $W$  en el espacio  $xyz$  por una aplicación

$T : (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ , supuesto que  $T$  es  $C^1$  e inyectiva, excepto posiblemente en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables.

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Cambio de variables: coordenadas cilíndricas

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

$$T(r, \theta, z) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

## Cambio de variables: coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} & \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{W^*} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

## Ejemplo 6.13

Sea  $W$  la bola unitaria de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV.$$

## Ejemplo 6.13

Sea  $W$  la bola unitaria de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV.$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

## Ejemplo 6.13

Sea  $W$  la bola unitaria de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV.$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$\begin{aligned} \iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \iiint_{W^*} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho \\ &= \frac{4}{3}\pi(e - 1). \end{aligned}$$

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

# Valor medio de una función

La **media** de los números  $x_1, \dots, x_n$  es

$$[x_i]_m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

# Valor medio de una función

La **media** de los números  $x_1, \dots, x_n$  es

$$[x_i]_m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo  $[a, b]$  es

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

# Valor medio de una función

La **media** de los números  $x_1, \dots, x_n$  es

$$[x_i]_m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo  $[a, b]$  es

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

El valor medio de una función de dos variables en la región  $D \subset \mathbb{R}^2$  es

$$[f]_m = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

# Valor medio de una función

La **media** de los números  $x_1, \dots, x_n$  es

$$[x_i]_m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## Definición

El valor medio de una función de una variable en el intervalo  $[a, b]$  es

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

El valor medio de una función de dos variables en la región  $D \subset \mathbb{R}^2$  es

$$[f]_m = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

El valor medio de una función de tres variables en la región  $W \subset \mathbb{R}^3$  es

$$[f]_m = \frac{\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_W dx dy dz}.$$

## 1 Integrales triples

- Ejemplos
- Ejercicios

## 2 Fórmula del cambio de variables

- Geometría de las aplicaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$
- El teorema del cambio de variables
  - Determinantes jacobianos
  - Fórmula del cambio de variables
  - Fórmula del cambio de variables para integrales triples
  - Coordenadas cilíndricas y esféricas
- Aplicaciones
  - Medias

Para una región en el espacio  $W$  con densidad de masa  $\delta(x, y, z)$ ,

$$volumen = \iiint_W dx dy dz,$$

$$masa = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz,$$