INTEGRALES TRIPLES

Julio Alejo Ruiz

Licenciatura en Ciencias de la Computación - Universidad Nacional de Cuyo

27 de septiembre de 2023

Conceptos

- Definición de la Integral Triple
- Propiedades de la Integral Triple
- Regiones Elementales en el Espacio
- Integral Triple sobre Regiones Elementales

Conceptos

- Definición de la Integral Triple
- Propiedades de la Integral Triple
- Regiones Elementales en el Espacio
- Integral Triple sobre Regiones Elementales

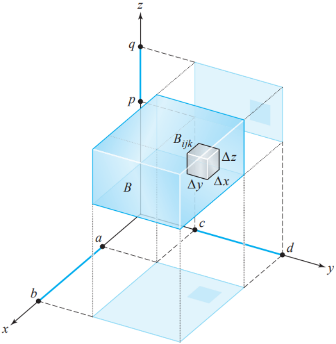
Conceptos

- Definición de la Integral Triple
- Propiedades de la Integral Triple
- Regiones Elementales en el Espacio
- Integral Triple sobre Regiones Elementales

Conceptos

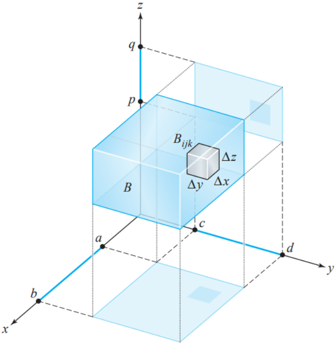
- Definición de la Integral Triple
- Propiedades de la Integral Triple
- Regiones Elementales en el Espacio
- Integral Triple sobre Regiones Elementales

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$



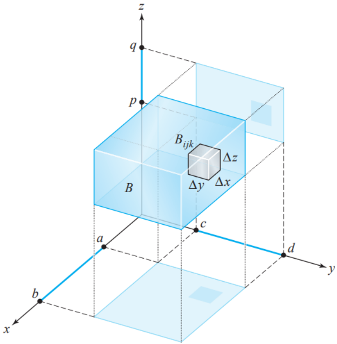
$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta V.$$

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$



$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta V.$$

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$



$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta V.$$

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x\Delta y\Delta z = \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $c_{ijk} \in B$.

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(\boldsymbol{c}_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B$.

DEFINICIÓN

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(\boldsymbol{c}_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B$.

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint\limits_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para cualquier elección de $c_{ijk} \in B$.

DEFINICIÓN

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $c_{ijk} \in B$.

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint\limits_{B} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint\limits_{B} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint\limits_{B} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $c_{ijk} \in B$.

DEFINICIÓN

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_B f\,dx\,dy\,dz.$$

para cualquier elección de $c_{ijk} \in B$.

DEFINICIÓN

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x\Delta y\Delta z = \iiint_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B$.

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \iiint\limits_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B$.

Definición

Sea f una función de tres variables definida en B, acotada. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ en las cajas B_{ijk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre B y escribimos

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{o} \quad \iiint\limits_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c_{ijk})\Delta x\Delta y\Delta z = \iiint\limits_B f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B$.

TEOREMA (REDUCCIÓN A INTEGRALES ITERADAS)

Sea $f(x,y,z)$ integrable en la caja $B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$.
Entonces cualquier integral iterada que exista es igual a la integral triple, esto es,

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

y etc. (¿Cuántos posibles ordenes existen?) ¡SEIS! (6)

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas)

Sea $f(x,y,z)$ integrable en la caja $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$. Entonces cualquier integral iterada que exista es igual a la integral triple, esto es,

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

y etc. (¿Cuántos posibles ordenes existen?) ¡SEIS! (6)

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas)

Sea $f(x,y,z)$ integrable en la caja $B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$. Entonces cualquier integral iterada que exista es igual a la integral triple, esto es,

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

y etc. (¿Cuántos posibles ordenes existen?) ¡SEIS! (6)

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas)

Sea $f(x, y, z)$ integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Entonces cualquier integral iterada que exista es igual a la integral triple, esto es,

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_p^q \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_p^q \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

y etc. (¿Cuántos posibles ordenes existen?) ¡SEIS! (6)

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas)

Sea $f(x,y,z)$ integrable en la caja $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$. Entonces cualquier integral iterada que exista es igual a la integral triple, esto es,

$$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

y etc. (¿Cuántos posibles ordenes existen?) ¡SEIS! (6)

Observación

Propiedades análogas a las de Integrales Dobles se cumplen para Integrales Triples.

Ejercicio

Sea $B = [0,1] \times [-1/2, 0] \times [0, 1/3]$. Hacer 6 grupos y cada grupo evaluar

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

en un orden distinto.

Observación

Propiedades análogas a las de Integrales Dobles se cumplen para Integrales Triples.

Ejercicio

Sea $B = [0, 1] \times [-1/2, 0] \times [0, 1/3]$. Hacer 6 grupos y cada grupo evaluar

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

en un orden distinto.

Observación

Propiedades análogas a las de Integrales Dobles se cumplen para Integrales Triples.

Ejercicio

Sea $B = [0,1] \times [-1/2, 0] \times [0, 1/3]$. Hacer 6 grupos y cada grupo evaluar

$$\iiint\limits_B (x + 2y + 3z)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

en un orden distinto.

Observación

Propiedades análogas a las de Integrales Dobles se cumplen para Integrales Triples.

Ejercicio

Sea $B = [0,1] \times [-1/2, 0] \times [0, 1/3]$. Hacer 6 grupos y cada grupo evaluar

$$\iiint\limits_{B} (x + 2y + 3z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

en un orden distinto.

Definición (Región Elemental)

Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

DEFINICIÓN (REGIÓN ELEMENTAL)

Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

Definición (Región Elemental)

Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

Definición (Región Elemental)

Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

Definición (Región Elemental)

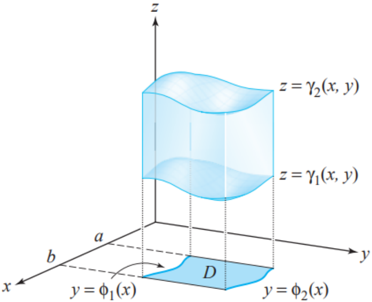
Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

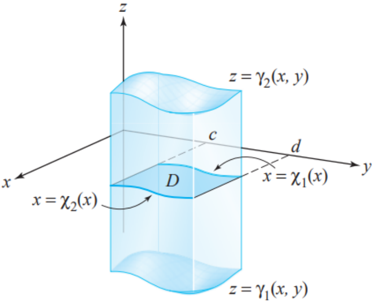
Definición (Región Elemental)

Como en Integrales Dobles restringimos nuestra atención a regiones particularmente simples. Una *región elemental* en el espacio tridimensional se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las *dos* variables restantes, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (es decir, una región x-simple, y-simple o z-simple) en los planos xy, xz e yz (dependiendo de la primera variable restringida) en el plano de las variables restantes anteriormente mencionadas.

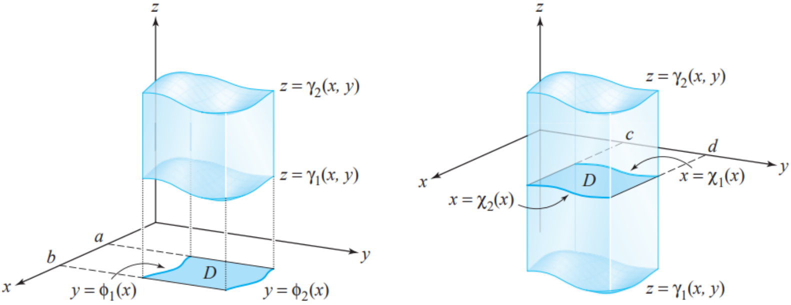
Regiones Elementales en el Espacio

Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x,y)$ y $\gamma_2(x,y)$ son dos funciones con $\gamma_2(x,y) \geqslant \gamma_1(x,y)$, una región elemental consta de todos (x,y,z) tales que (x,y) está en D y $\gamma_1(x,y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x,y)$.

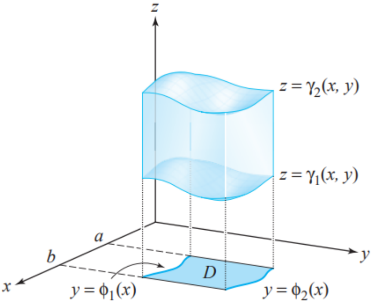


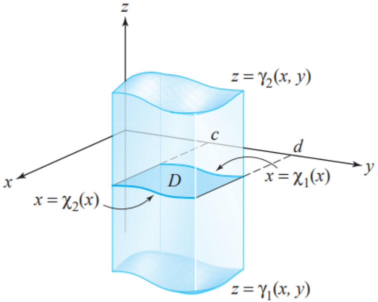


Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x,y)$ y $\gamma_2(x,y)$ son dos funciones con $\gamma_2(x,y) \geqslant \gamma_1(x,y)$, una región elemental consta de todos (x,y,z) tales que (x,y) está en D y $\gamma_1(x,y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x,y)$.

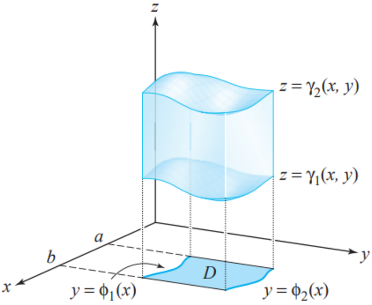


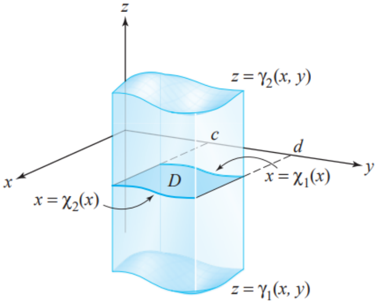
Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x,y)$ y $\gamma_2(x,y)$ son dos funciones con $\gamma_2(x,y) \geqslant \gamma_1(x,y)$, una región elemental consta de todos (x,y,z) tales que (x,y) está en D y $\gamma_1(x,y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x,y)$.





Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x, y)$ y $\gamma_2(x, y)$ son dos funciones con $\gamma_2(x, y) \geqslant \gamma_1(x, y)$, una región elemental consta de todos (x, y, z) tales que (x, y) está en D y $\gamma_1(x, y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x, y)$.





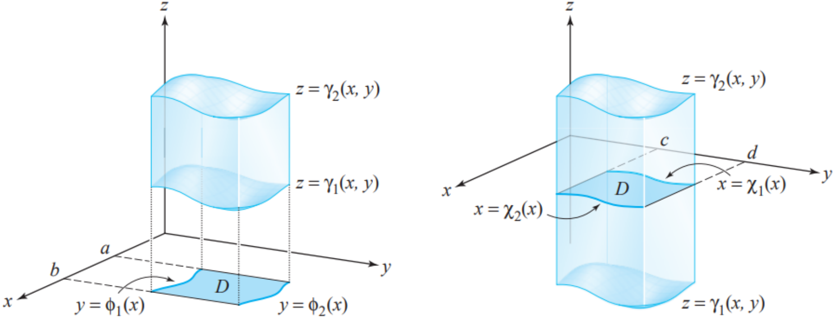


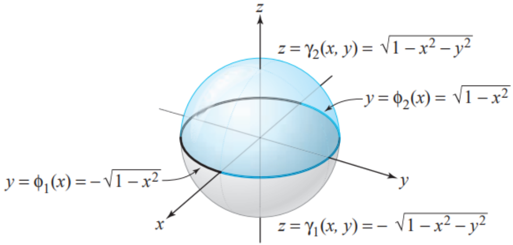
Figura: En el gráfico de la derecha, en lugar de $x = \chi_1(x)$ y $x = \chi_2(x)$ debería decir $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$ (la notación usada para regiones x-simples en el plano xy.

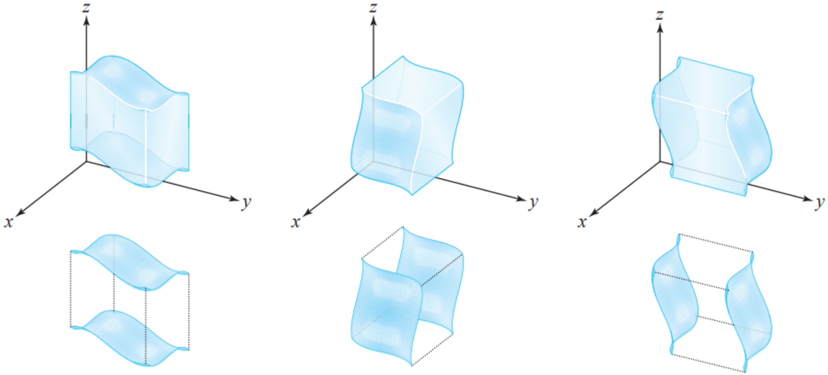
Ejercicio

Describir la bola unitaria $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ como una región elemental.

Ejercicio

Describir la bola unitaria $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ como una región elemental.





Top and bottom are surfaces $z = \gamma(x, y)$

Front and rear are surfaces $x = \rho(y, z)$

Left and side are surfaces $y = \delta(x, z)$

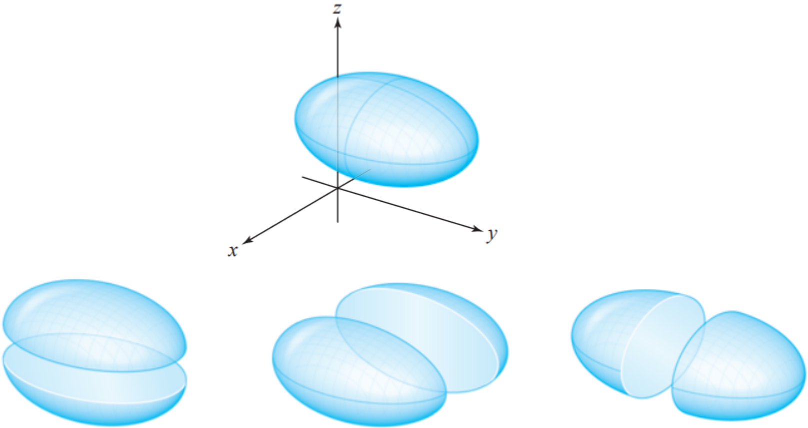


Figura: Algunas regiones elementales pueden simultánemante describirse como en cualquier caso de la diapositiva anterior. Llamamos a tales regiones: *regiones elementales simétricas*.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple.

Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple.

Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

DEFINICIÓN (INTEGRAL TRIPLE SOBRE UNA REGIÓN ELEMENTAL)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Definición (Integral Triple sobre una Región Elemental)

Supongamos que W es una región elemental descripta por limitar la variable z entre dos funciones de x e y. Entonces:

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región y-simple o

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\int\limits_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

si el dominio donde están las variables x e y es un región x-simple. Existen otras (¿cuántas?) variantes de este teorema.

Observación

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

Ejercicio

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Observación

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint\limits_{W} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

Ejercicio

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint\limits_{W} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Observación

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint\limits_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

Ejercicio

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint\limits_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Observación

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

Ejercicio

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Observación

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint\limits_{W} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

Ejercicio

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint\limits_{W} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

OBSERVACIÓN

Si $f = 1$ en una región elemental W, entonces

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

es el volumen de la región W.

EJERCICIO

Verificar que el fórmula del volumen de una bola de radio 1 es:

$$\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Ejercicio

Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, y la superficie $z = x^2 + y^2$ y que vive en el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Calcular

$$\iiint\limits_W x \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

y bosquejar la región.

Ejercicio

Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, y la superficie $z = x^2 + y^2$ y que vive en el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Calcular

$$\iiint\limits_W x \,\mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

y bosquejar la región.