INTEGRALES DOBLES

Julio Alejo Ruiz

Licenciatura en Ciencias de la Computación - Universidad Nacional de Cuyo

19 de septiembre de 2023

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración

Conceptos

- Introducción
    - Integrales dobles como volúmenes
    - Principio de Cavalieri
    - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
    - Definición de la Integral
    - Propiedades de la Integral
    - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
    - Regiones Elementales
    - La Integral sobre una Región Elemental
    - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración
    - Desigualdad del Valor Medio
    - Igualdad del Valor Medio

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración
  - Desigualdad del Valor Medio
  - Igualdad del Valor Medio

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración
  - Desigualdad del Valor Medio
  - Igualdad del Valor Medio

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración
  - Desigualdad del Valor Medio
  - Igualdad del Valor Medio

Conceptos

- Introducción
  - Integrales dobles como volúmenes
  - Principio de Cavalieri
  - Integrales Iteradas
- Integrales Dobles sobre Rectángulos
  - Definición de la Integral
  - Propiedades de la Integral
  - El Teorema de Fubini
- Integrales Dobles sobre Regiones más Generales
  - Regiones Elementales
  - La Integral sobre una Región Elemental
  - Reducción sobre Integrales Iteradas
- Cambio del Orden de Integración
  - Desigualdad del Valor Medio
  - Igualdad del Valor Medio

Definición

El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función no negativa f se llama *integral (doble)* de f sobre R y se denota por

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}A \quad \text{o} \quad \iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Definición

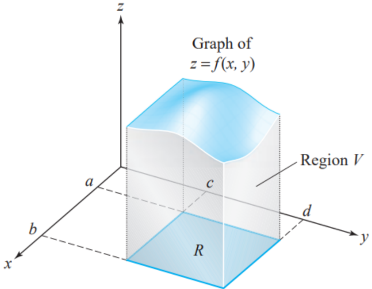
El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función no negativa f se llama *integral (doble)* de f sobre R y se denota por

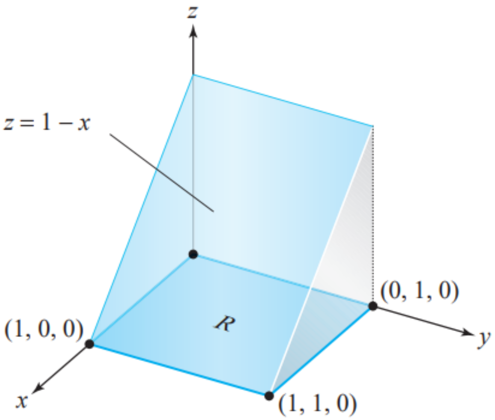
$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}A \quad \text{o} \quad \iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Definición

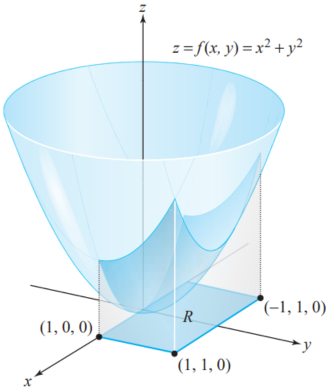
El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función no negativa f se llama *integral (doble)* de f sobre R y se denota por

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$





z
z = 1 − x
(0, 1, 0)
y
(1, 0, 0)
R
x
(1, 1, 0)


z
z = f(x, y) = x^2 + y^2
(1, 0, 0)
R
(−1, 1, 0)
y
(1, 1, 0)
x

El método de las secciones - Principio de Cavalieri

Sea S un sólido y P_x con $a \leqslant x \leqslant b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

El método de las secciones - Principio de Cavalieri

Sea S un sólido y P_x con $a \leqslant x \leqslant b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

El método de las secciones - Principio de Cavalieri

Sea S un sólido y P_x con $a \leqslant x \leqslant b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

El método de las secciones - Principio de Cavalieri

Sea S un sólido y P_x con $a \leqslant x \leqslant b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

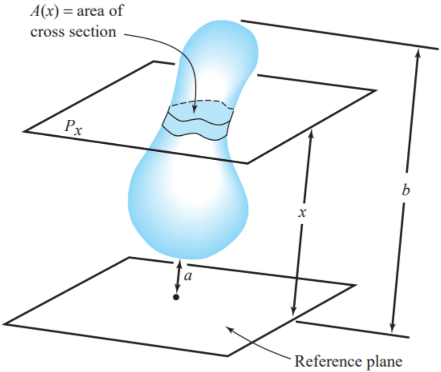
El método de las secciones - Principio de Cavalieri

Sea S un sólido y P_x con $a \leqslant x \leqslant b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$



$A(x)$ = area of
cross section
P_x
b
x
a
Reference plane

Integrales Dobles e Iteradas

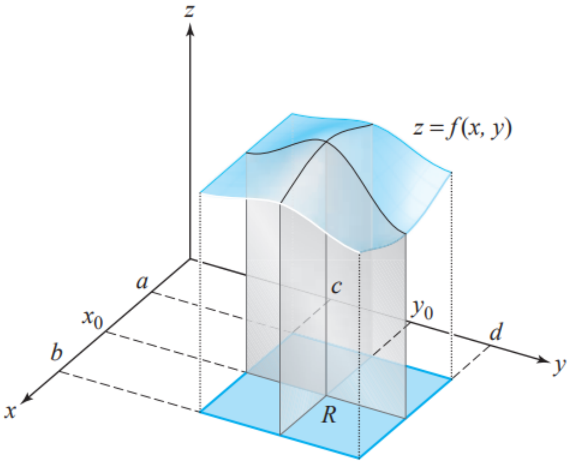
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

Integrales Dobles e Iteradas

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$



z
z = f(x, y)
a
x0
b
x
c
y0
d
y
R

Ejemplo

Calcular la integral

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

donde $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

donde $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Ejemplo

Calcular la integral
$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
donde $R=[-1,1]\times[0,1]$.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\iint\limits_S \cos(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\iint\limits_S \cos(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

EJEMPLO

Calcular la integral

$$\iint_S \cos(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

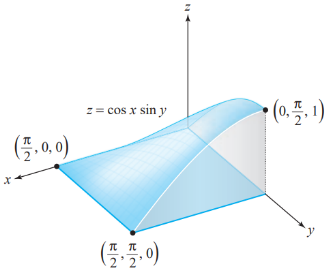
donde $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

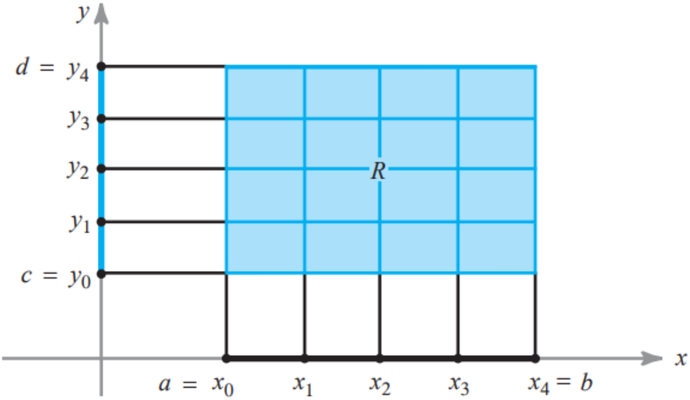
Ejemplo

Calcular la integral

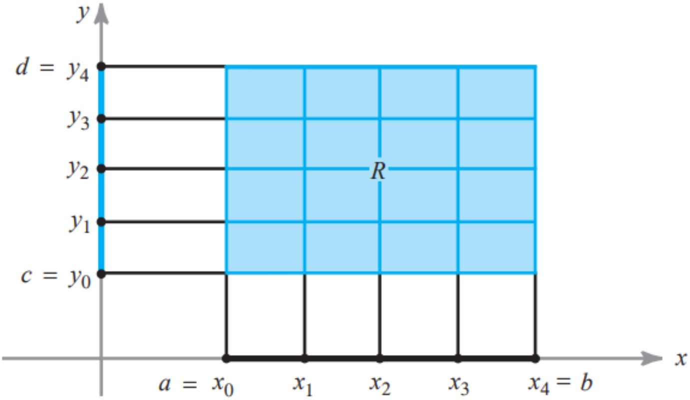
$$\iint\limits_S \cos(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.





$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta A.$$



$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta A.$$

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\boldsymbol{c}_{jk})\Delta x \Delta y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x\Delta y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \quad \iint_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk} \in R$.

Definición

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** sobre R y escribimos

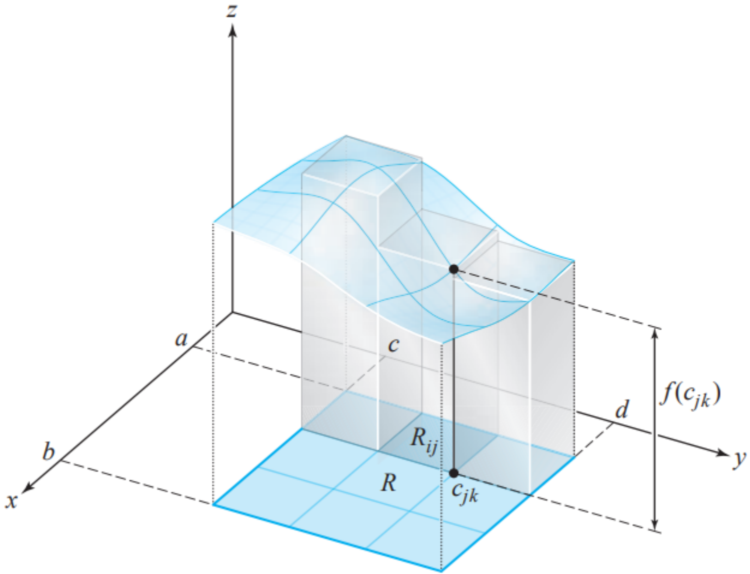
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{o} \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{o} \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

para el límite S.

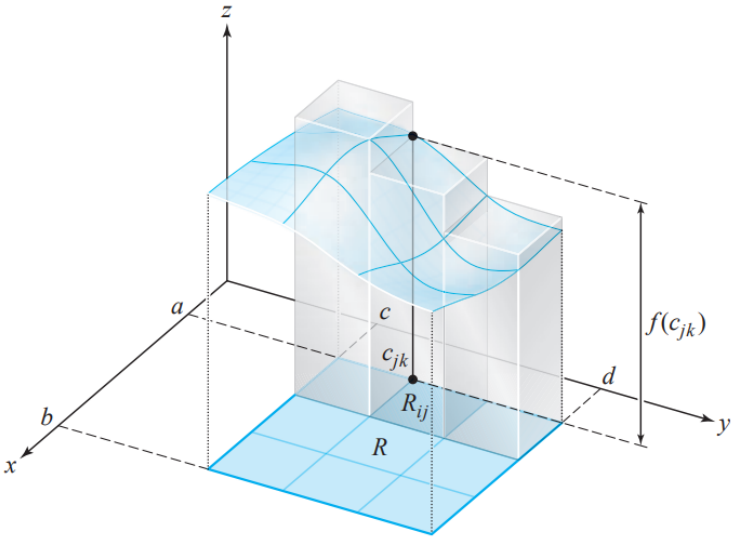
Así, podemos reescribir la integrabilidad como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

para cualquier elección de $\boldsymbol{c}_{jk} \in R$.



z
a
b
x
c
d
y
R_{ij}
R
c_{jk}
$f(c_{jk})$



z
x
y
a
b
c
d
c_{jk}
R_{ij}
R
$f(c_{jk})$

Teorema

Cualquier función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.

Teorema

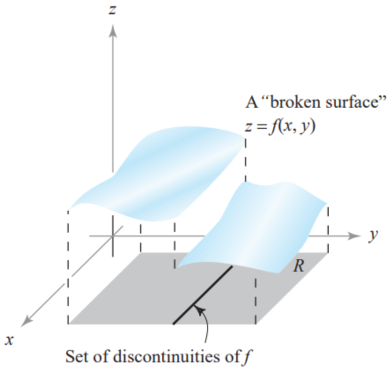
Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real valuada y acotada definida sobre un rectángulo R, y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está en la unión finita de gráficos de funciones continuas de una variable. Entonces f es integrable.

Teorema

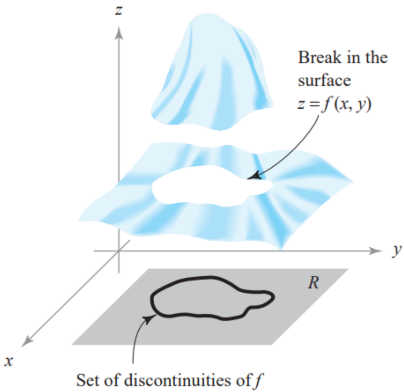
Cualquier función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.

Teorema

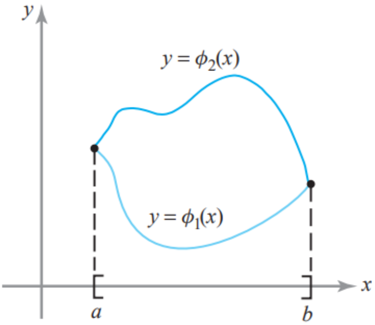
Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real valuada y acotada definida sobre un rectángulo R, y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está en la unión finita de gráficos de funciones continuas de una variable. Entonces f es integrable.



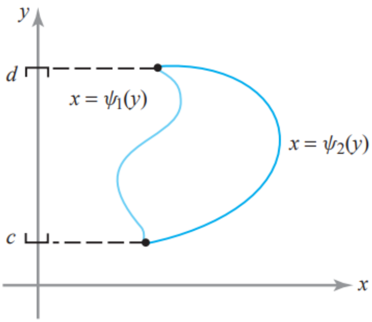
z
A “broken surface”
$z = f(x, y)$
y
R
x
Set of discontinuities of f



z
Break in the
surface
$z = f(x, y)$
y
R
x
Set of discontinuities of f



y
$y = \phi_2(x)$
$y = \phi_1(x)$
x
a
b



y
d
c
$x = \psi_1(y)$
$x = \psi_2(y)$
x

Teorema

1. ***Linealidad***

$$\iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]\,\mathrm{d}A = \iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A + \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

2. ***Homogeneidad***

$$\iint\limits_R cf(x,y)\mathrm{d}A = c\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A$$

3. ***Monotonía*** Si $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ en R, entonces

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A \leqslant \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

TEOREMA

1. ***Linealidad***

$$\iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]\,\mathrm{d}A = \iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A + \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

2. ***Homogeneidad***

$$\iint\limits_R cf(x,y)\mathrm{d}A = c\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A$$

3. ***Monotonía*** Si $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ en R, entonces

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A \leqslant \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

TEOREMA

1. ***Linealidad***

$$\iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]\,\mathrm{d}A = \iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A + \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

2. ***Homogeneidad***

$$\iint\limits_R cf(x,y)\mathrm{d}A = c\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A$$

3. ***Monotonía*** Si $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ en R, entonces

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A \leqslant \iint\limits_R g(x,y)\mathrm{d}A$$

TEOREMA

4. ***Aditividad*** Si R_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, son rectángulos disjuntos dos a dos tales que f es integrable sobre cada R_i y si $Q = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots \cup R_m$ es un rectángul, entonces $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)\,\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{R_i} f(x, y)\,\mathrm{d}A$$

5. ***Desigualdad triangular***

$$\left| \iint\limits_{R} f(x, y)\,\mathrm{d}A \right| = \iint\limits_{R} |f(x, y)|\,\mathrm{d}A$$

Teorema

4. ***Aditividad*** Si R_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, son rectángulos disjuntos dos a dos tales que f es integrable sobre cada R_i y si $Q = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots \cup R_m$ es un rectángul, entonces $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{R_i} f(x,y)\mathrm{d}A$$

5. ***Desigualdad triangular***

$$\left| \iint\limits_{R} f(x,y)\mathrm{d}A \right| = \iint\limits_{R} |f(x,y)|\,\mathrm{d}A$$

Teorema

Sea f una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_R f(x, y) \mathrm{d}A.$$

TEOREMA

Sea f una función definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y supongamos que las discontinuidades de f está en la unión finita de gráficos de funciones continuas de una variable. Si la integral $\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ existe para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

existe y

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_R f(x, y)\mathrm{d}A.$$

Teorema

Similarmente, si la integral $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ existe para cada $y \in [c,d]$, entonces

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

existe y

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Teorema

Si ambas condiciones se cumplen simultáneamente,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Integrales Dobles sobre Regiones más Generales

Regiones Elementales

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

DEFINICIÓN (REGIÓN y-SIMPLE)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen

$$x \in [a,b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

DEFINICIÓN (REGIÓN y-SIMPLE)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

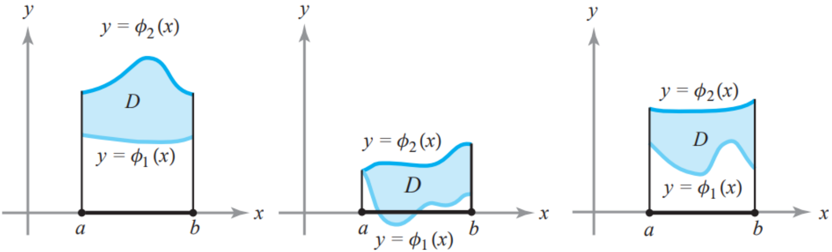
donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.

Definición (Región y-simple)

Decimos que D es una *región es y-simple* si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b] \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$$

donde $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Las curvas y/o segmentos de recta que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. Usamos la frase y-simple porque la región se describe de una manera relativamente simple, usando y como función de x.


y
$y = \phi_2(x)$
D
$y = \phi_1(x)$
a
b
x
y
$y = \phi_2(x)$
D
a
$y = \phi_1(x)$
b
x
y
$y = \phi_2(x)$
D
$y = \phi_1(x)$
a
b
x

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

DEFINICIÓN (REGIÓN x-SIMPLE)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

DEFINICIÓN (REGIÓN x-SIMPLE)

Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.

Definición (Región x-simple)

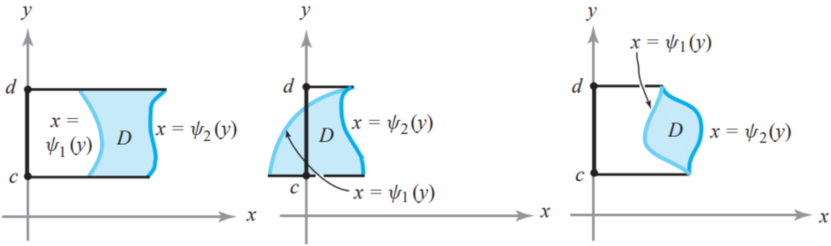
Decimos que D es una *región es x-simple* si existen funciones continuas ψ_1 y

$$\psi_2$$

definidas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \wedge \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

donde $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Nuevamente, las curvas que limitan la región D constituyen su frontera ∂D. En esta situación, x es la variable distinguida, dada como función de y. Por tanto, la frase x-simple es apropiada.



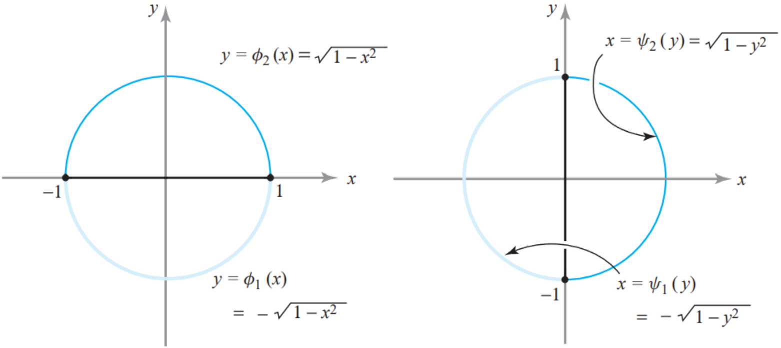
y
d
c
x =
ψ1 (y)
D
x = ψ2 (y)
x
y
d
c
D
x = ψ2 (y)
x = ψ1 (y)
x
y
x = ψ1 (y)
d
c
D
x = ψ2 (y)
x

Definición (Regiones simples)

Una *región simple* es aquella que es x-simple como y-simple, es decir, una región simple puede describirse como una región x-simple y una región y-simple.

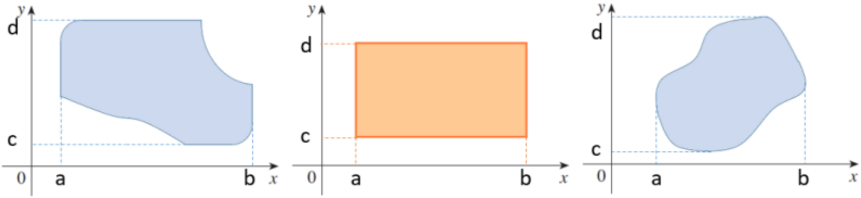
Definición (Regiones simples)

Una *región simple* es aquella que es x-simple como y-simple, es decir, una región simple puede describirse como una región x-simple y una región y-simple.



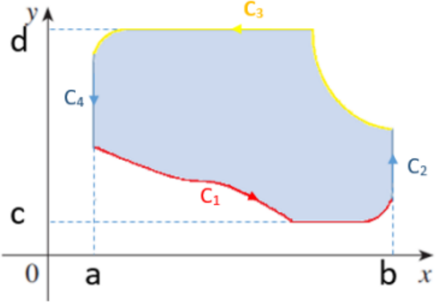
DEFINICIÓN (REGIONES SIMPLES)

Una *región simple* es aquella que es x-simple como y-simple, es decir, una región simple puede describirse como una región x-simple y una región y-simple.



Definición (Regiones simples)

Una *región simple* es aquella que es x-simple como y-simple, es decir, una región simple puede describirse como una región x-simple y una región y-simple.



Observación

A veces, nos referiremos a cualquiera de las regiones anteriores como regiones elementales. Tenga en cuenta que la frontera ∂D de una región elemental es el tipo de conjunto de discontinuidades de una función permitido en el teorema de integrabilidad visto anteriormente.

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de f sobre el conjunto D**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Si D es una región elemental en el plano, elija un rectángulo R que contenga D. Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde f es continua , definimos $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$, **la integral de $\boldsymbol{f}$ sobre el conjunto $\boldsymbol{D}$**, de la siguiente manera:

Extender f a una función f^* definida en todo R por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D \wedge D(x,y) \in R \end{cases}$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

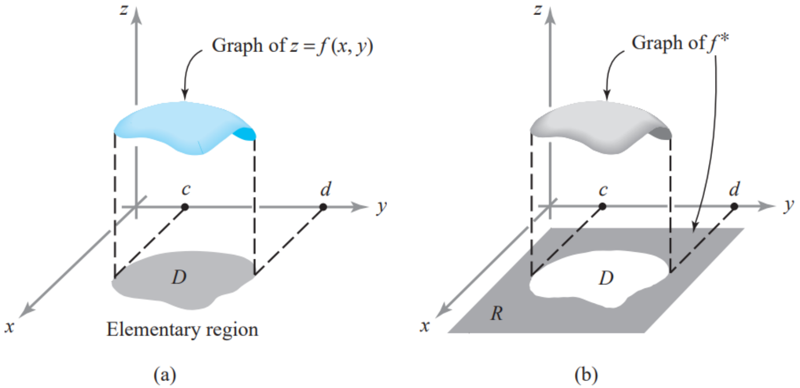
Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Definición (Integral sobre una Región Elemental)

Notemos que f^* está acotada (pues f lo es) y continua excepto posiblemente en en la frontera de D. La frontera de D consta de gráficas de funciones continuas de una variable, por lo que f^* es integrable sobre R según el teorema de integrabilidad visto anteriormente. Por tanto, podemos

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f^*(x,y)\,\mathrm{d}A.$$



z
Graph of $z = f(x, y)$
c
d
y
D
x
Elementary region
(a)
z
Graph of f^*
c
d
y
D
R
x
(b)

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Si $R = [a,b] \times [c,d]$ es un rectángulo que contiene a D, podemos definir f^* en D de manera que

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_D f^*(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d \int_a^b f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

¿Cómo conviene definir f^*?

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Sean D, una región y-simple definida por las funciones $\phi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y la integral iterada:

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Para x fijo, la integral interior $\displaystyle\int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y$ cumple

$$\int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

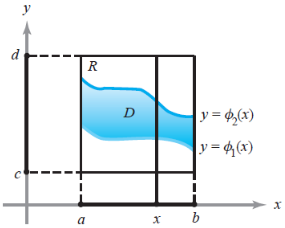
ya que por definición, $f^*(x,y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$.

Integrales Dobles sobre Regiones más Generales

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



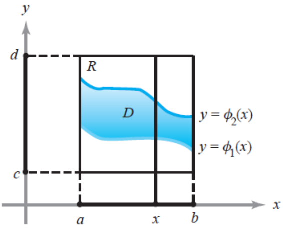
Integrales Dobles sobre Regiones más Generales

Reducción a Integrales Iteradas

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

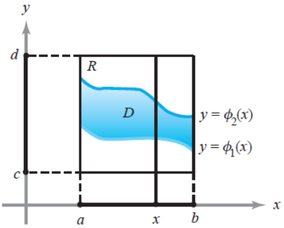
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones y-simples)

Si D es una región y-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones x-simples)

Si D es una región x-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones x-simples)

Si D es una región x-simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema (Reducción a Integrales Iteradas para Regiones x-simples)

Si D es una región x-simple, entonces

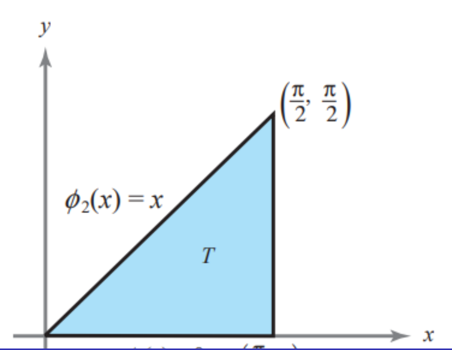
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ejemplo

Buscar $\displaystyle\iint\limits_T \left(x^3y+\cos(x)\right)\,\mathrm{d}A$, donde T es el triángulo es el que consiste de todos los puntos (x,y) tales que $0\leqslant x\leqslant \pi/2$, $0\leqslant y\leqslant x$.

Ejemplo

Buscar $\iint\limits_T (x^3y + \cos(x))\, \mathrm{d}A$, donde T es el triángulo es el que consiste de todos los puntos (x, y) tales que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.



Ejemplo

Buscar $\iint\limits_T (x^3y + \cos(x))\,\mathrm{d}A$, donde T es el triángulo es el que consiste de todos los puntos (x, y) tales que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

$$\iint\limits_T (x^3y + \cos(x))\,\mathrm{d}A = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{x} (x^3y + \cos(x))\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y\cos(x)\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x$$

Ejemplo

$$\iint_T \left(x^3 y + \cos(x)\right) \,\mathrm{d}A = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(x\cos(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^6}{12 \cdot 64} + \left[x\sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^6}{768} + \left[x\sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones simples)

Si D es una región simple, entonces

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones simples)

Si D es una región simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema (Reducción sobre Integrales Iteradas para Regiones simples)

Si D es una región simple, entonces

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ejercicio

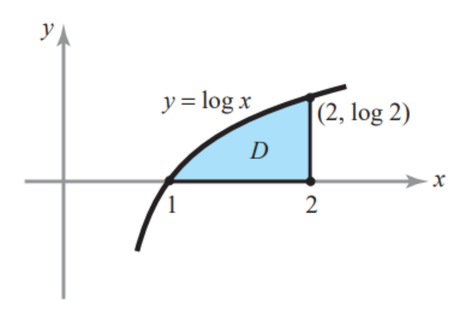
Evaluar

$$\int_1^2 \int_0^{\log(x)} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Ejercicio

Evaluar

$$\int_1^2 \int_0^{\log(x)} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



Teorema (Desigualdad del Valor Medio)

Supongamos que existen números m y M tales que para todo $(x, y) \in D$, y $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, entonces al integrar sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \leqslant \iint_D f(x, y) \mathrm{d}A \leqslant M \cdot A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de la región D.

Observación

Aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a estimar integrales que no podemos evaluar exactamente con facilidad. Como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Teorema (Desigualdad del Valor Medio)

Supongamos que existen números m y M tales que para todo $(x, y) \in D$, y $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, entonces al integrar sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \leqslant \iint_D f(x, y) \mathrm{d}A \leqslant M \cdot A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de la región D.

Observación

Aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a estimar integrales que no podemos evaluar exactamente con facilidad. Como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Teorema (Desigualdad del Valor Medio)

Supongamos que existen números m y M tales que para todo $(x, y) \in D$, y $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, entonces al integrar sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A \leqslant M \cdot A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de la región D.

Observación

Aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a estimar integrales que no podemos evaluar exactamente con facilidad. Como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Teorema (Desigualdad del Valor Medio)

Supongamos que existen números m y M tales que para todo $(x, y) \in D$, y $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, entonces al integrar sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \leqslant \iint\limits_D f(x, y) \mathrm{d}A \leqslant M \cdot A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de la región D.

Observación

Aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a estimar integrales que no podemos evaluar exactamente con facilidad. Como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Teorema (Igualdad del Valor Medio)

Supongamos que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y D es una región elemental. Entonces existe al menos un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = f(x_0,y_0)A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de la región D.