INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS ESCALARES & CAMPOS VECTORIALES.

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales

Recorrido

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Definición

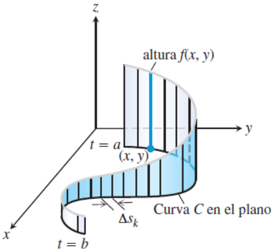
Dada una curva suave C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido y continuo en una región abierta D, que contiene a C, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

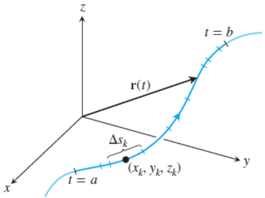
$$\int_C f\, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Observación:

El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Justificación

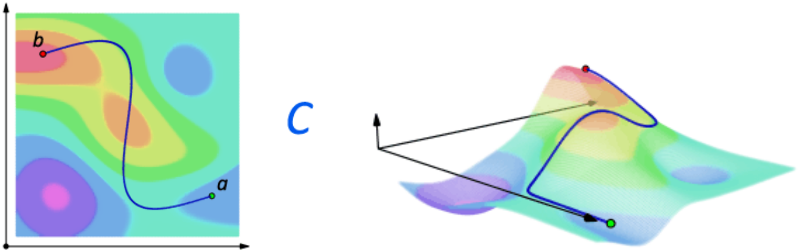




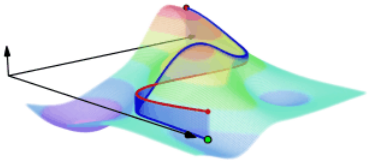
Una partición en $[a, b]$ induce una partición en C.

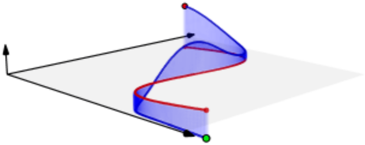
$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t_k.$$

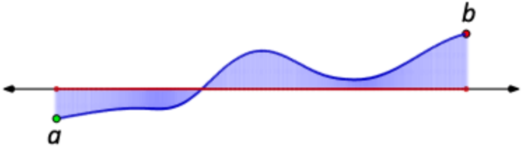
Interpretación



Interpretación







$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

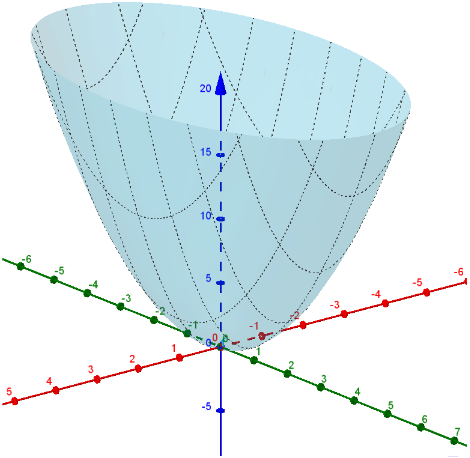
Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Ejemplo: integral de línea-concepto

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

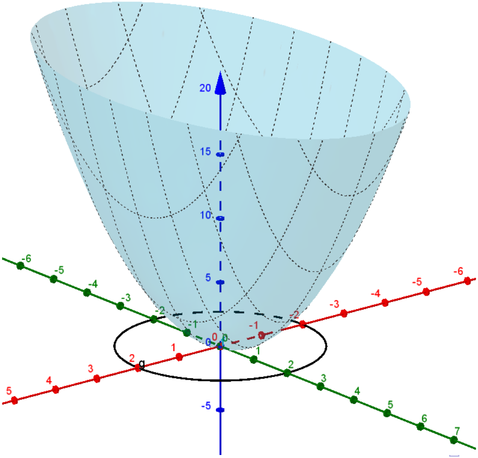


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

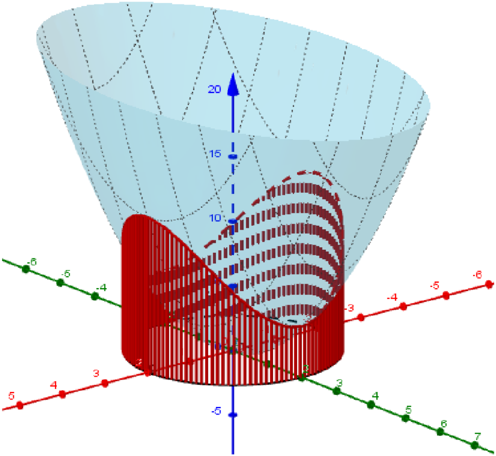


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

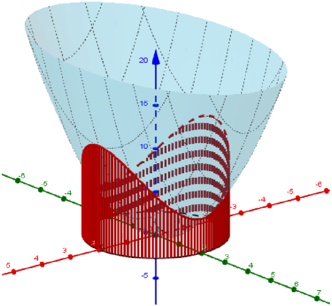


Ejemplo: concepto de integral de línea

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \le t \le 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (3 \cdot 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t))\, 2dt$$

$$= 24 \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + 8 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(t)dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi.$$



Recorrido

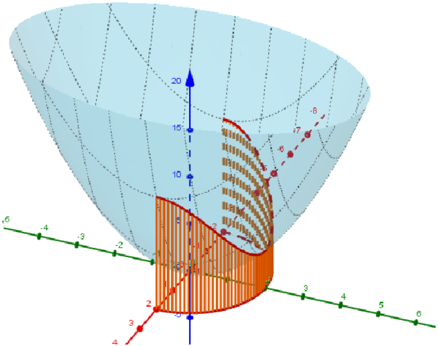
Propiedades

(Sin demostración)

1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$.
2. Independencia de la parametrización: $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.
3. Dependencia de la trayectoria: en general, $\int_{C_1} f\,ds \neq \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$.



Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.
$\mathbf{r}_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$; $\mathbf{r}_1'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$; $|\mathbf{r}_1'(t)| = 2$

$$A = \int_{C_1} f\, ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}_1(t))|\mathbf{r}_1'(t)|dt = \int_0^{\pi} (12\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t)\, 2\, dt = 16\pi$$

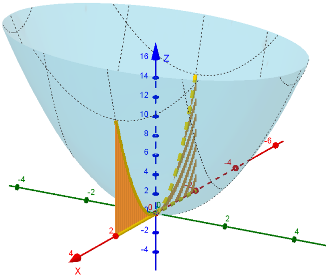
$\mathbf{r}_2(t) = (2\cos(2t), 2\operatorname{sen}(2t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
$\mathbf{r}_2'(t) = (-4\operatorname{sen}(2t), 4\cos(2t))$; $|\mathbf{r}_2'(t)| = 4$

$$A = \int_{C_2} f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mathbf{r}_2(t))|\mathbf{r}_2'(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\cos^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(2t))\, 4\, dt$$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.
$\mathbf{r}_3(t) = (2-t, 0)$, $0 \le t \le 4$; $\mathbf{r}_3'(t) = (-1, 0)$; $|\mathbf{r}_3'(t)| = 1$

$$A = \int_{C_3} f\, ds = \int_0^4 f(\mathbf{r}_3(t))|\mathbf{r}_3'(t)|dt = \int_0^4 3(2-t)^2\, dt = 16$$



Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales

Campo vectorial

Definición

Un campo vectorial es una función **F** que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, ..., x_n) \in A$, **F** le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

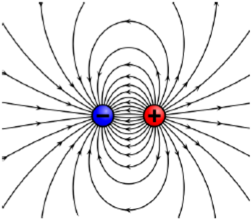
$$\mathbf{F}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n));$$

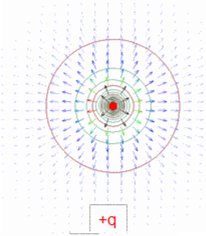
las funciones $f_1, ..., f_m$ se llaman funciones componentes de **F**.

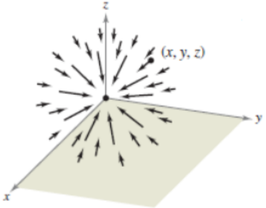
Un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

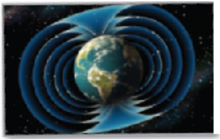
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

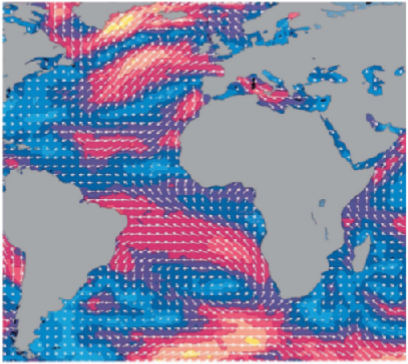
y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en los campos de fuerzas en el espacio; en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio, etc.











El gradiente de un campo escalar f, es un campo vectorial.

Recorrido

Recorrido

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

1. Si la curva C es cerrada

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathrm{F} \cdot dr$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathrm{F} \cdot dr, \quad \ointctrclockwise_C \mathrm{F} \cdot dr \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathrm{F} \cdot dr,$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}, \quad \ointctrclockwise_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r} \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r},$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

2. Si la curva C une los puntos $\mathbf{A} = r(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$,

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathrm{F} \cdot dr$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathrm{F} \cdot dr, \quad \oint_C \mathrm{F} \cdot dr \quad \text{o} \quad \oint_C \mathrm{F} \cdot dr,$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

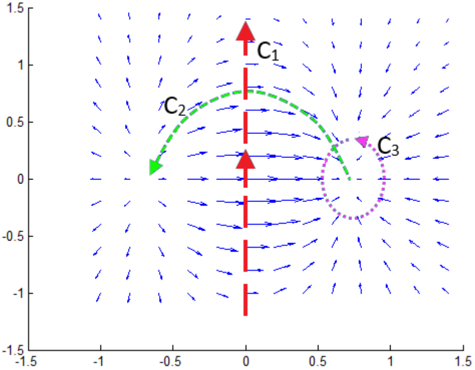
2. Si la curva C une los puntos $\mathbf{A} = r(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$, se puede escribir

$$\int_A^B \mathrm{F} \cdot dr$$

   entendiendo que en general **importa** cuál es la trayectoria C que une A con B.

Ejemplo tomado en examen

Sean el campo vectorial **F** y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



El valor de $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ es 0; el valor de $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ es negativo; el valor de $\int_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ es cercano a 0.

Observación 1:
El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C, en tanto se mantenga el sentido de recorrido de la curva.

Observación 2:
Se tiene que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos pero recorrida en sentido contrario.

Observación 3:
Se puede calcular integrales de línea en curvas suaves por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman.

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathsf{F} \cdot dr$$

de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva C en el dominio de **F**, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

   $$\oint_C \mathsf{F} \cdot dr, \quad \ointctrclockwise_C \mathsf{F} \cdot dr \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathsf{F} \cdot dr,$$

   donde las flechas indican el sentido antihorario u horario, respectivamente.

2. Si la curva C une los puntos $\mathbf{A} = r(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$, se puede escribir

   $$\int_A^B \mathsf{F} \cdot dr$$

   entendiendo que en general **importa** cuál es la trayectoria C que une A con B.

Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. A partir de

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_a^b M(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b N(x(t), y(t))y'(t) dt \\ &= \int_C M\, dx + \int_C N\, dy,\end{aligned}$$

si f es un campo escalar, definimos

$$\int_C f\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)\, dt \quad \text{y} \quad \int_C f\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)\, dt.$$

Calcular $\int_C (x + y^2) dy$ para $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

$$\int_C (x + y^2) dy = \int_0^\pi (\cos t + \operatorname{sen}^2 t) \cos t\, dt = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Teorema Fundamental de integrales de línea

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar la función compuesta $f \circ \mathbf{r}$, ya que en todos los puntos de C, f es diferenciable y $\mathbf{r}$ es derivable por hipótesis. Así:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \qquad (1)$$

y, sustituyendo (1) en (**??**) queda

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)\, dt \\ &= (f \circ \mathbf{r})(t)\Big|_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$