PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES. INTEGRALES DE SUPERFICIES DE CAMPOS ESCALARES & CAMPOS VECTORIALES

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales

Recorrido

Tres formas de expresar superficies

Curvas:

Forma explícita: $y = f(x)$.
Forma implícita: $F(x, y) = 0$.
Forma vectorial paramétrica: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

Superficies:

Forma explícita: $z = f(x, y)$.
Forma implícita: $F(x, y, z) = 0$.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \ (u, v) \in R$$

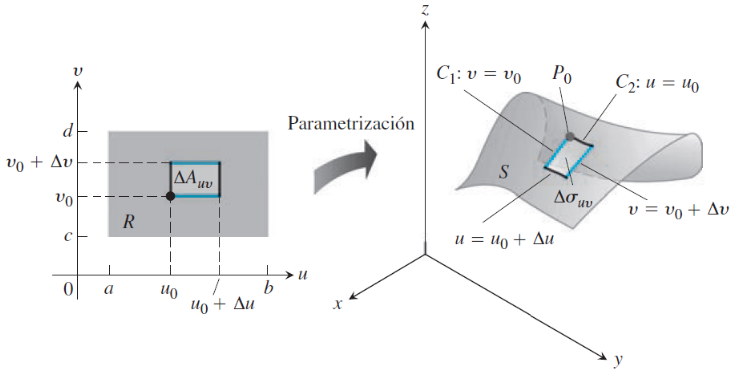
una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}, \ (u,v) \in R$$

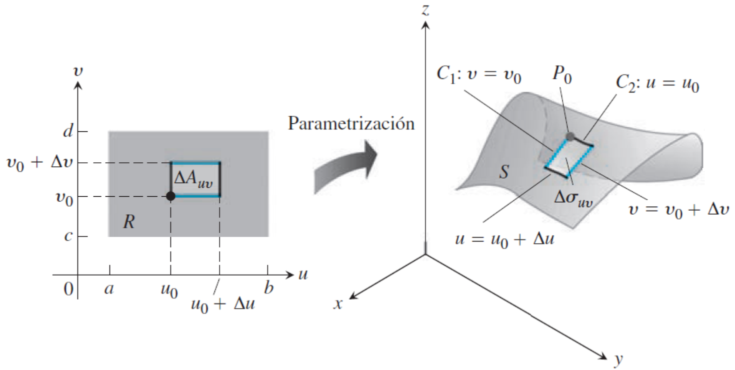
una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R.



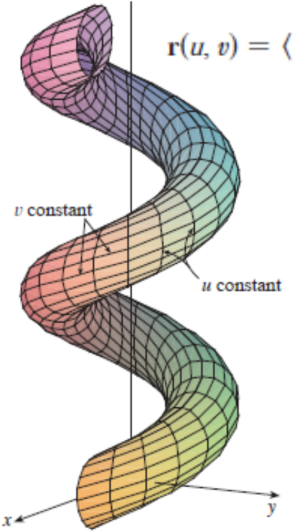
Sea

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}, \ (u,v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R. El rango de $\mathbf{r}$ es la superficie S, parametrizada por $\mathbf{r}$; u y v son los parámetros y R es el dominio de los parámetros.



Ejemplo superficie paramétrica

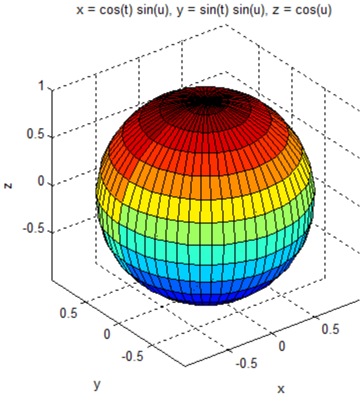


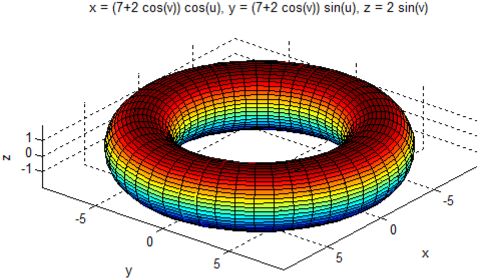
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v)\cos u, (2 + \sin v)\sin u, u + \cos v \rangle$$

$0 \leq u \leq 4\pi$; $0 \leq v \leq 2\pi$

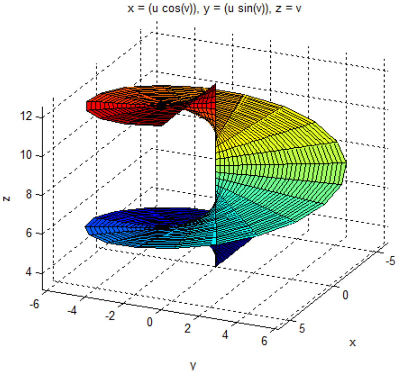
CURVAS RETICULARES

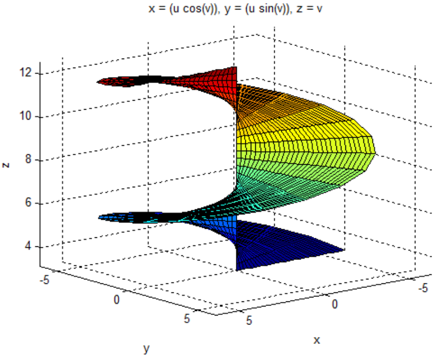
Ejemplo superficie paramétrica



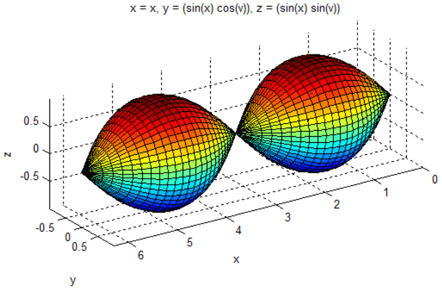


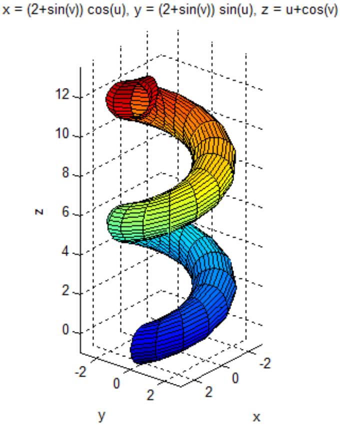
Ejemplo superficie paramétrica



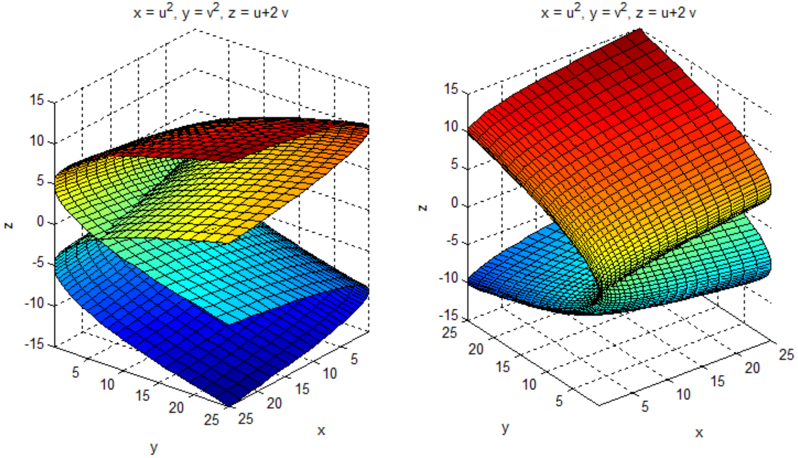


Ejemplo superficie paramétrica



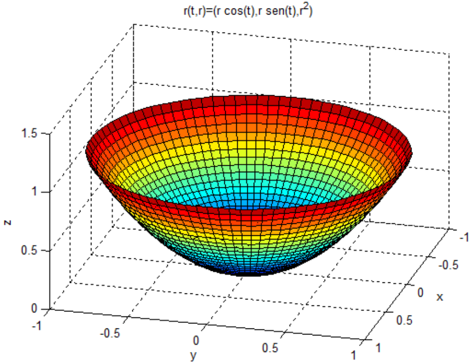


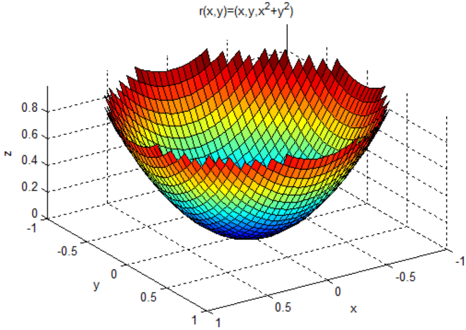
Ejemplo superficie paramétrica



$$\mathbf{r}(u, -\frac{u}{2}) = (u^2, \frac{u^2}{4}, 0) = \mathbf{r}(-u, \frac{u}{2})$$

Ejemplo superficie paramétrica





$$\mathbf{r_1}(t,s) = (s\cos(t), s\,\mathrm{sen}(t), s^2),\ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le 1;$$

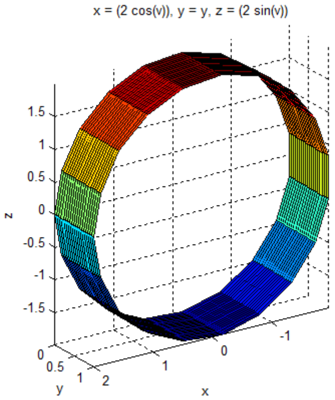
$$\mathbf{r_2}(x,y) = (x, y, x^2+y^2),\ -1 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

Ejemplos

Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.
Solución: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 3\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 3\cos\phi)$,
$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$.
Observar que cuando $\phi = 0$, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ejemplos

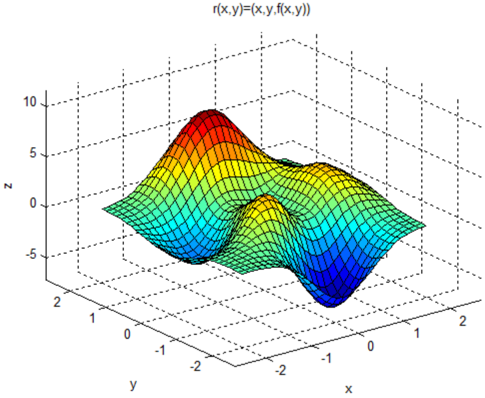
Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Solución: $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?



Solución: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D(f)$.

Superficies suaves

Definición

Una superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, $(u,v) \in R$, es suave si $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \bar{\mathbf{0}}$ en R.

Observación: Si se parametriza un cono SIN VÉRTICE o un tronco de cono mediante $\mathbf{r}(r,t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, r)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\delta < r \leq R$ para algún $\delta \geq 0$, se tiene una superficie suave. La misma parametrización, pero con $0 \leq r \leq R$, refleja un cono (con su vértice) y **no es una superficie suave**.

Área de una superficie suave dada paramétricamente

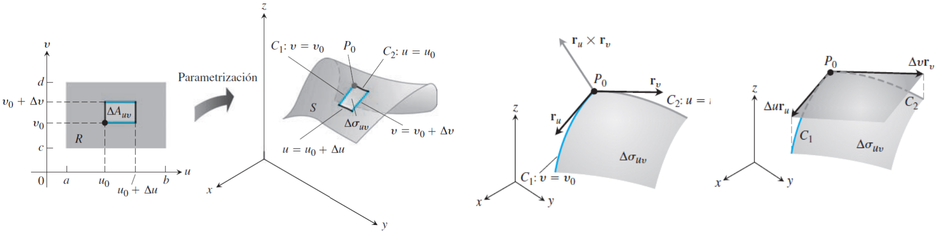
Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv.$$

Observación: el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v \qquad A \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le y \le 1$.

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du\, dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta),\ |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\, dy\, d\theta = 4\pi.$$

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales

Definición

Dados la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$ y el campo escalar f definido en S, se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, du \, dv,$$

siempre que exista la integral del segundo miembro.

Observación: la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Justificación

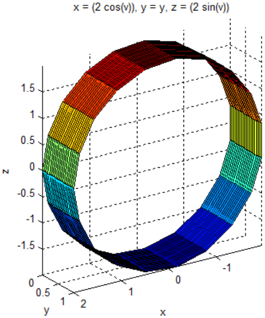
Si S está parametrizada por $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in R$, tomamos una partición en R y

$$\begin{aligned}\iint_S f\,d\sigma &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(u_i,v_j))\Delta\sigma_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(u_i,v_j))|\mathbf{r}_u(u_i,v_j)\times\mathbf{r}_v(u_i,v_j)|\Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv.$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$.



$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le y \le 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)$$

$$\|\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y)\| = 2$$

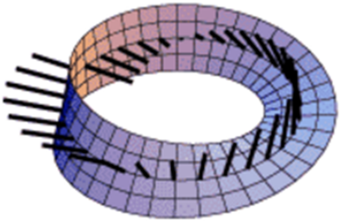
$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z)\,dA = \\ &= \iint_R \delta(\mathbf{r}(u, v)\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta(2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)\,2\,dy\,d\theta. \end{aligned}$$

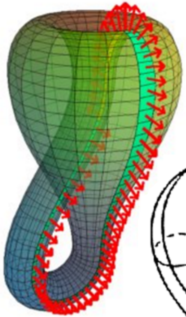
Recorrido

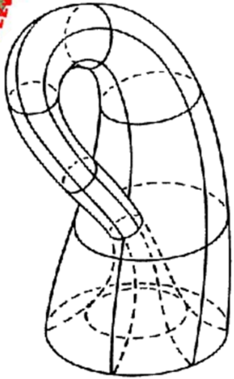
1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales

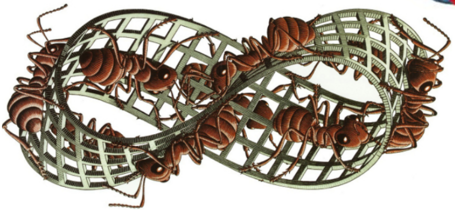
Superficies no orientables

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.









Definición

Definición

Una superficie suave S es orientable cuando es posible definir un campo vectorial continuo $\mathbf{n}$ que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario.
Una superficie suave S está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial $\mathbf{n}$ sobre S.

Observación: Una superficie que no es suave (como un cono con su vértice, con las parametrizaciones usuales), **no es una superficie orientable**. Pero una superficie suave, como un cono sin vértice, sí puede serlo.

Definición

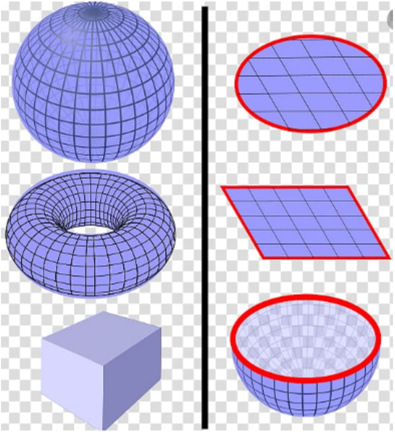
Definición

Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la "interior", que es acotada, y la "exterior", que es no acotada.

Una superficie suave cerrada está orientada positivamente si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S. Si es suave por partes, podemos extender esta idea.

Ejemplo

Las siguientes son superficies suaves por partes y orientables:



Recorrido

Integral de superficie de campos vectoriales

El flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ definido en $\mathbb{R}^3$ a través de una superficie orientada S en la dirección de $\mathbf{n}$ es $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.

$$\begin{aligned}\text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du\, dv.\end{aligned}$$

Notación: si la superficie S es cerrada, se suele anotar $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y.

Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0, 2\cos\theta),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Elijo $\theta = 0$ y $y = 0$. Allí: $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y)(0, 0) = (-2, 0, 0)$, hacia el eje y.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot (2\cos\theta, 0, 2\,\mathrm{sen}\,\theta) dy\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y\cos\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta) dy\, d\theta = 4\pi.$$

Ejemplos gráficos

Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos\theta \operatorname{sen}\phi, a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, a\cos\phi), \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

$$\mathit{flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi)\, d\phi\, d\theta$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi) = (-a^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi)$$

Para $\theta = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$: $\mathbf{r}(0, \frac{\pi}{2}) = (a, 0, 0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(0, \frac{\pi}{2}) = (-a^2, 0, 0)$. Apunta hacia el origen: cambio el sentido.

$$\mathit{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} a\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ a\cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi \\ a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi \\ a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \end{pmatrix} d\phi\, d\theta = 4a^3\pi.$$

Observación

Si el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es k, ¿necesariamente el flujo a través de una superficie S_1 que es una parte de S con exactamente la mitad de área que S es $k/2$?