Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Facultad de Ingeniería

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros

Ejemplos de aplicaciones

Recorrido

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

Recorrido

Existencia de solución única a un PVI

Resuelva:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

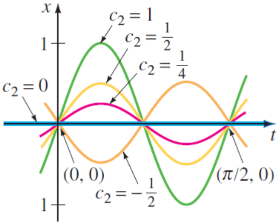
Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

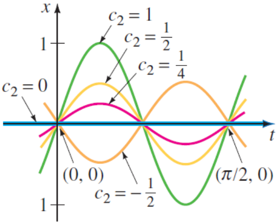
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



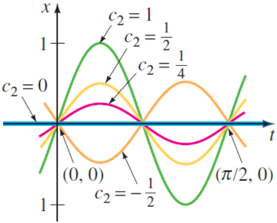
Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

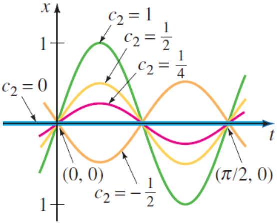
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;

Problema con valores en la frontera

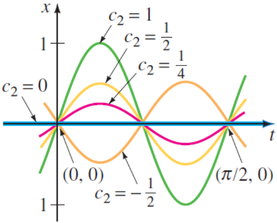
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;

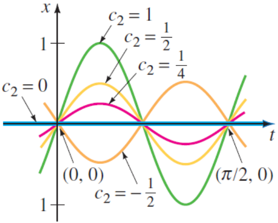
Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

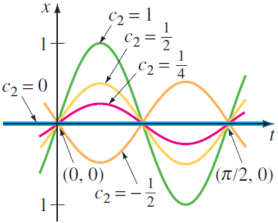
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.

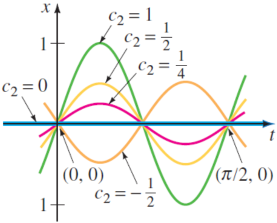
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

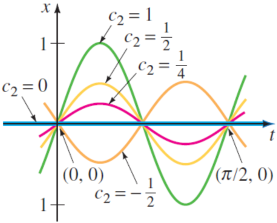


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$

Problema con valores en la frontera

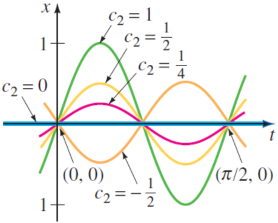
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$.
Tiene solución única $x \equiv 0$.

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



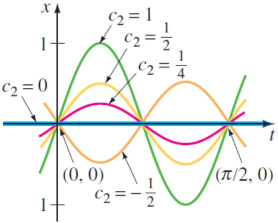
a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$.
Tiene solución única $x \equiv 0$.

c) $x(0) = 0\, x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



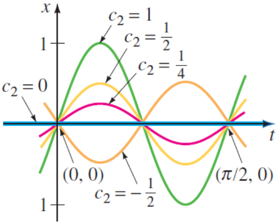
a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0$.

c) $x(0) = 0\, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

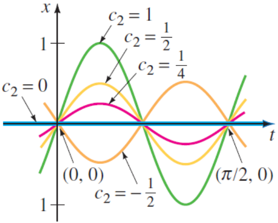


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0$.

c) $x(0) = 0\, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$.
Tiene solución única $x \equiv 0$.

c) $x(0) = 0\, x(\frac{\pi}{2}) = 1$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1$;
No tiene solución.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.

Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.

Observaciones:

1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier e.d. lineal homogénea.

2) Combinaciones lineales.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Demostramos el caso $n = 2$;

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ED.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ED. Derivando y sustituyendo en la ED:

$$y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x); \quad y''(x) = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x).$$

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) =$$

$$= a_2(x)(c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)) + a_1(x)(c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)) + a_0(x)(c_1y_1(x) + c$$

$$= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) +$$

$$= 0$$

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0, \ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0, \ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0, \ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
5. $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0, \; t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
5. $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Wronskiano

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,...,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Contrarrecíproco: si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LI en I.

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la e.d.
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en I. Entonces*
$\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en I si y solo si $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Sin demostrar.

Teorema

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la e.d.
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en I. Entonces* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en I si y solo si $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Sin demostrar.

Conjunto fundamental de soluciones de una e.d. de orden n: una familia LI de n soluciones de la e.d. en un intervalo I.

Recorrido

Teoremas (e.d. lineal homogénea)

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, *tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *existe un conjunto fundamental de soluciones en* I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de e.d. lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, *tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *si* $\{y_1, \cdots y_n\}$ *es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en* I, *la solución general se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Recorrido

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\, e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\, e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\, e^{rx} + br\, e^{rx} + c\, e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\, e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\, e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\, e^{rx} + br\, e^{rx} + c\, e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verificamos que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED (solos) y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verificamos que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED (solos) y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verificamos que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED (solos) y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$;

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$;

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$;

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, indique si se trata de un PVI o un PVF.
2. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\left\{ \begin{array}{rl} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{array} \right.$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{4}{3} e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2 x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2 x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} \end{aligned}$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0; \quad ar^2+br+c=0; \quad r_1=\alpha+i\beta; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$$\alpha=\frac{-b}{2a} \qquad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0; \quad ar^2+br+c=0; \quad r_1=\alpha+i\beta; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0; \quad ar^2+br+c=0; \quad r_1=\alpha+i\beta; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$$\alpha=\frac{-b}{2a} \qquad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1=\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2=e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2=-\frac{i}{2}z_1+\frac{i}{2}z_2=e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Verifiquemos que $y_1=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2=e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED y que son LI en $I=\mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\
y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
&\quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)
\end{aligned}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\
y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
&\quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)
\end{aligned}$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) +$$

$$(a(-2\alpha\beta) + b(-\beta))\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &\quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ay_1'' + by_1' + cy_1 = \\ &= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) + \\ &\qquad (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta))\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ & \quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$
$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) +$$
$$(a(-2\alpha\beta) + b(-\beta))\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c =$$
$$= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$= 0.$$

$$a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) =$$
$$= (2a\alpha + b)(-\beta)$$
$$= (-2a\frac{b}{2a} + b)(-\beta) = 0.$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\
y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
&\quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&ay_1'' + by_1' + cy_1 = \\
&= \left(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c\right)\cos(\beta x) + \\
&\quad \left(a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)\right)\operatorname{sen}(\beta x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) = \\
&= (2a\alpha + b)(-\beta) \\
&= (-2a\frac{b}{2a} + b)(-\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Luego y_1 es solución de la ED.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ & \quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ay_1'' + by_1' + cy_1 = \\ &= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) + \\ & \quad (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta))\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) = \\ &= (2a\alpha + b)(-\beta) \\ &= (-2a\frac{b}{2a} + b)(-\beta) = 0. \end{aligned}$$

Luego y_1 es solución de la ED.
Similarmente se verifica que y_2 es solución (solos).

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$

$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$
$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0;\; r_1 = 3;\; r_2 = -2;$

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0;\ r_1 = 3;\ r_2 = -2;$ **solución general:**

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$;

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:**

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0$; $r_{1,2} = 2 \pm i$;

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0$; $r_{1,2} = 2 \pm i$; **solución general:**

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0;\ r_1 = 3;\ r_2 = -2;$ **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0;\ r = -2;$ **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0;\ r_{1,2} = 2 \pm i;$ **solución general:** $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x).$

Recorrido

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros

Función o solución complementaria

FUNCIÓN O SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA

Dada una e.d. no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la e.d. homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN O SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de e.d. lineal no homogénea

Teorema

Dada una e.d. lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k*,* $0 \leq k \leq n$*, y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*, la solución general de la e.d. tiene la forma* $y = y_c + y_p$ *donde* y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar.

Teorema (Principio de superposión para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Demostración dejada como ejercicio.

Principio de superposición ecuaciones lineales no homogéneas: caso especial

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, \ldots, y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = y_{p_1} + \ldots + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = g_1 + \ldots + g_k.$$

Recorrido

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Rta: $y = y_c - \frac{8}{3}xe^x$.

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de . . .	**Y si**	**Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.**
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
$\operatorname{sen} kx$, $\cos kx$	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C\operatorname{sen} kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p =&\quad u_1y_1 + u_2y_2 \\
y_p' =&\quad u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\
y_p'' =&\quad u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''
\end{aligned}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p = &\quad u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' = &\quad u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' = &\quad u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= \quad u_1y_1 + u_2y_2 \\
y_p' &= \quad u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\
y_p'' &= \quad u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p = &\quad u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p' = &\quad u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y_p'' = &\quad u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1'' y_1 + u_1' y_1') + a(u_2'' y_2 + u_2' y_2') + (au_1' y_1' + bu_1' y_1 + au_2' y_2' + bu_2' y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2) + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$ Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ o subintervalos de éste.