Ecuaciones diferenciales ordinarias

Introducción a las EDO y EDOs de primer orden

Recorrido

Recorrido

$P(t)$: población en t

Malthus 1798

$$P'(t) = kP(t)$$

Modelos

$$T(t): \text{ temperatura en } t$$
$$T_m: \text{ temperatura del medio}$$
$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Recorrido

Clasificación

Clasificación de las ED:

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Recorrido

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.
- $y = xe^y + 5$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1+xe^y}$ en el intervalo $(8, +\infty)$.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed $xy' + y = 0$, una solución es $y = \frac{1}{x}$. Estudiar el dominio.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 5\frac{dy}{dx} - 4y - x^2$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^{x}$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\, e^x$$

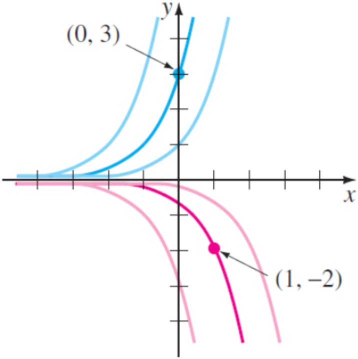
Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\,e^x$$

$$y_1(x) = 3\,e^x,$$

$$y_2(x) = -\tfrac{2}{e}\,e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

$$y(x) = -2\cos(4x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$$

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.

PVI

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

PVI

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4$$

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad\qquad y(x) = 0$$

Ejemplo 3: ¿PVI con más de una solución?

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad\qquad y(x) = 0$$

Este PVI no es lineal.

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden, sin demostración.)

Sea R *una región rectangular en el plano* xy *definida por* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, *y sea* (x_0, y_0) *un punto interior a* R. *Si* f *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *son cotinuas en* R, *entonces existe un intervalo* $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, *contenido en* $[a, b]$ *y existe una única función* y *definida en* I *que es solución del problema con valores iniciales (1).*

Recorrido

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

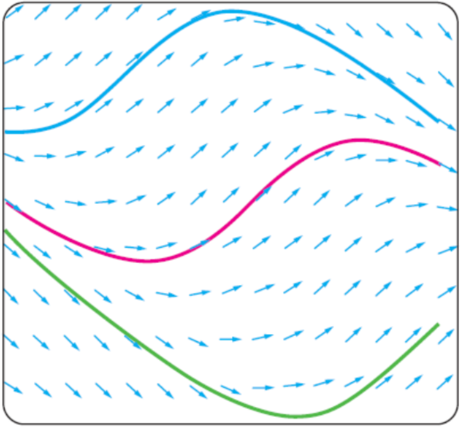
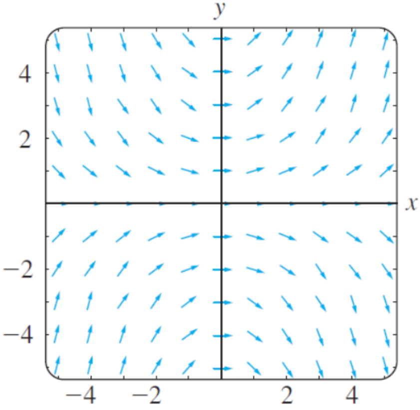


FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

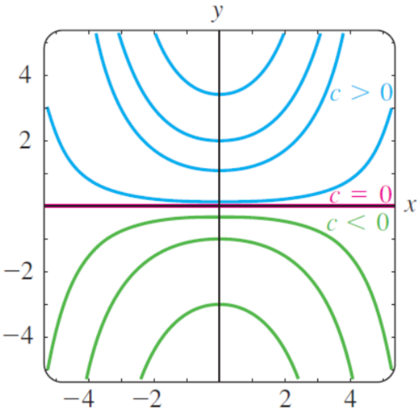
Campos direccionales

Ejemplo 2:

Ejemplo 2:



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

Recorrido

1. 4.1 Introducción a las ecuaciones diferenciales
   - Clasificación
   - Algunas definiciones y ejemplos
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Recorrido

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$y' = y + \operatorname{sen} x$ *NO es una EDO separable*

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$y' = y + \operatorname{sen} x$ *NO es una EDO separable*

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Separación de variables

$y' = g(x)p(y)$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde} \;\; h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde} \;\; h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \to \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } \; h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

En la práctica: $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\, dy = (x-5)dx$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + k}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \to \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde}\ C = e^{C_1} > 0$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \to \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \to \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

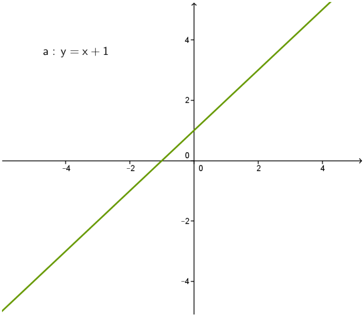
$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

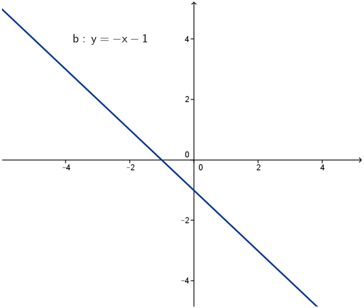
Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots \qquad y = -C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

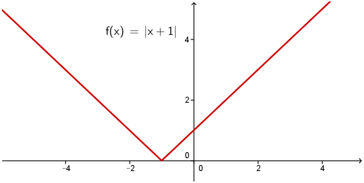
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

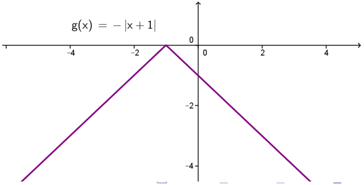
$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \quad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \quad \textit{en } \ldots \qquad y = -C\,|x+1| \quad \textit{en } \ldots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots \qquad y = -C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots \qquad y = -C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = k(1+x) \qquad \textit{en } \mathbb{R}; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2 - 4}dy = dx$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \;\; \text{si } k > 0,\; x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \;\; \text{si } k > 0,\; x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \;\; \text{si } k > 0,\; x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

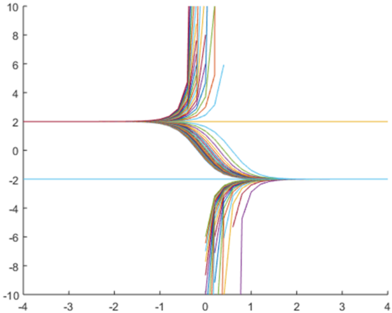
$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2$ es solución singular.

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2$ es solución singular.



Recorrido

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) =$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

$$\begin{aligned} xy' + y &= x^4 \ln x \\ \frac{d}{dx}(xy) &= x^4 \ln x \\ xy &= \int x^4 \ln x \, dx \\ xy &= \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) + C \\ y &= \frac{x^4}{25}(5 \ln x - 1) + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

$$\begin{aligned} xy' + y &= x^4 \ln x \\ \frac{d}{dx}(xy) &= x^4 \ln x \\ xy &= \int x^4 \ln x \, dx \\ xy &= \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) + C \\ y &= \frac{x^4}{25}(5 \ln x - 1) + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

¡CUIDADO CON EL DOMINIO DE LA SOLUCIÓN!

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

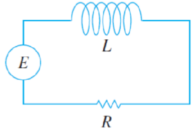


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

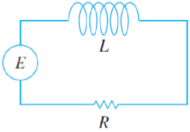


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

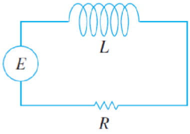


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t,i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$$

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

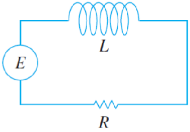


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \qquad i(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{5} \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Recorrido

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ o $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta, es decir si existe un campo escalar f tal que $f_x = M$ y $f_y = N$.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta, es decir si existe un campo escalar f tal que $f_x = M$ y $f_y = N$.

Una **condición suficiente** para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa, es

$$N_x = M_y,$$

es decir que el campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$ tenga rotacional escalar nulo. En este caso existe una función potencial f para $\mathbf{F}$, tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y)+N(x,y)y'=0$, propongo una solución implícita $S(x,y)=C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x)=0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y)=M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)=N(x,y),$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x, y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$ será una solución implícita de la ED es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

$S(x,y) = C$ será una solución implícita de la ED es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$.

LA SOLUCIÓN DE LA ED ES $S(x,y) = C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2} = C$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} -y\,\mathrm{sen}(x) - 4 + \cos(x)y' = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{array} \right.$$

Recorrido

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

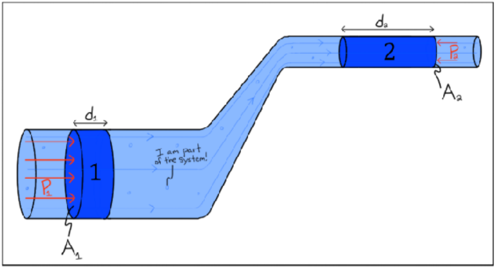
Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

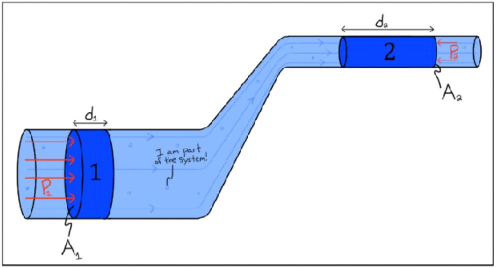
$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



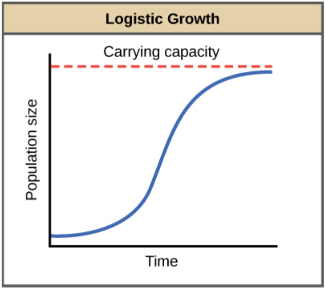
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$n = 0 \qquad \rightarrow \qquad y' + P(x)y = Q(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$n = 0 \qquad \rightarrow \qquad y' + P(x)y = Q(x)$$

$$n = 1 \qquad \rightarrow \qquad y' + P(x)y = Q(x)y$$

$$y' + (P(x) - Q(x))\, y = 0$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$n = 0 \qquad \rightarrow \qquad y' + P(x)y = Q(x)$$

$$n = 1 \qquad \rightarrow \qquad y' + P(x)y = Q(x)y$$

$$y' + (P(x) - Q(x))\, y = 0$$

$n > 1$ *la sustitución sugerida es* $v = y^{1-n}$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad\qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad\qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad\qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \qquad v = -x^2 + cx = \frac{1}{y}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^2, con lo que se obtiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y obtenemos:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \qquad v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x)$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad\qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad\qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad\qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad\qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.
Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.
Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad\qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.
Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$