

que tanto el momento M_1 como el momento de $240 \text{ lbf} \cdot \text{pulg}$ tienen un sentido inverso al de las manecillas del reloj y son funciones de singularidad negativas; sin embargo, de acuerdo con la convención que se muestra en la figura 3-2, el momento flexionante M_1 y el de $240 \text{ lbf} \cdot \text{pulg}$ son negativo y positivo, respectivamente, lo cual se refleja en la figura 3-6c.

3-4 Esfuerzo

Cuando se aísla una superficie interna como el de la figura 3-2b, la fuerza y el momento totales que actúan sobre la superficie se manifiestan a sí mismos como distribuciones de fuerzas a través de toda el área. La distribución de fuerza que actúa en un punto sobre la superficie es única y tendrá componentes en las direcciones normal y tangencial llamados *esfuerzo normal* y *esfuerzo cortante tangencial*, respectivamente. Los esfuerzos normales y cortantes se identifican con las letras griegas σ (sigma) y τ (tau), respectivamente. Si la dirección de σ es saliente de la superficie se considera un *esfuerzo de tensión* y es un esfuerzo normal positivo. Si σ entra hacia la superficie es un esfuerzo compresivo y comúnmente se considera una cantidad negativa. Las unidades de esfuerzo usuales en Estados Unidos son libras por pulgada cuadrada (psi). En el caso de las unidades SI, el esfuerzo se representa en newtons por metro cuadrado (N/m^2); $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal (Pa)}$.

3-5 Componentes cartesianos del esfuerzo

Los componentes cartesianos del esfuerzo se establecen mediante la definición de tres superficies mutuamente ortogonales en un punto dentro del cuerpo. Las normales a cada superficie establecerán los ejes cartesianos x , y , z . En general, cada superficie tendrá un esfuerzo normal y uno cortante. El esfuerzo cortante puede tener componentes a lo largo de dos ejes cartesianos. Por ejemplo, en la figura 3-7 se muestra el aislamiento de un área superficial infinitesimal en el punto Q dentro de un cuerpo donde la normal a la superficie es la dirección x . El esfuerzo normal se denomina σ_x . El símbolo σ indica un esfuerzo normal, mientras que el subíndice x señala la dirección de la normal a la superficie. El esfuerzo cortante neto que actúa sobre la superficie es $(\tau_x)_{\text{total}}$, el cual puede descomponerse en componentes en las direcciones y y z , los cuales se marcan como τ_{xy} y τ_{xz} , respectivamente (vea la figura 3-7). Observe que los dobles subíndices son necesarios para el cortante. El primer subíndice indica la dirección de la normal a la superficie mientras que el segundo es la dirección del esfuerzo cortante.

En la figura 3-8a se presenta el estado de esfuerzo en un punto descrito mediante tres superficies mutuamente perpendiculares. Puede mostrarse, a través de la transformación de coordenadas, que esto es suficiente para determinar el estado de esfuerzo sobre *cualquier*

Figura 3-7

Componentes del esfuerzo sobre la superficie normal a la dirección x .

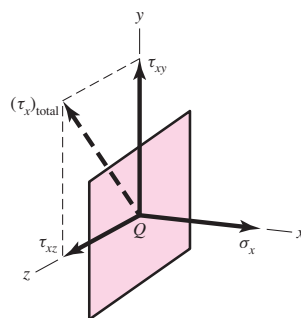
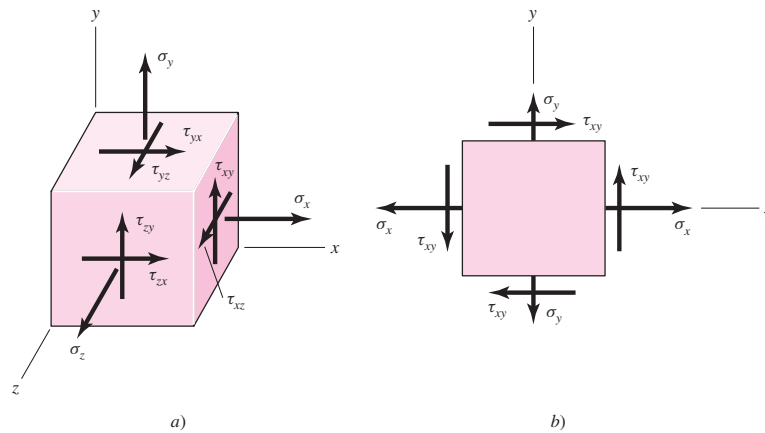


Figura 3-8

a) Esfuerzo tridimensional general. b) Esfuerzo plano con "cortantes transversales" iguales.



superficie que interseca al punto. A medida que las dimensiones del cubo de la figura 3-8a se aproximan a cero los esfuerzos en las caras ocultas se vuelven iguales y opuestas a los de las caras visibles. Así que, en general, un estado de esfuerzo completo se define mediante nueve componentes de esfuerzo, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} y τ_{zy} .

Para el equilibrio, en la mayoría de los casos, los "cortantes transversales" son iguales, por lo cual

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (3-7)$$

Esto reduce el número de componentes del esfuerzo en la mayoría de los estados de esfuerzo tridimensionales de nueve a seis cantidades, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} y τ_{zx} .

Un estado de esfuerzo muy común ocurre cuando los esfuerzos sobre una superficie son cero. Cuando se presenta esta situación, el estado de esfuerzo se llama *esfuerzo plano*. En la figura 3-8b se muestra un estado de esfuerzo plano, pues se supone, de manera arbitraria, que la normal a la superficie libre de esfuerzo es la dirección z tal que $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Es importante notar que el elemento de la figura 3-8b aún es un cubo tridimensional. También en este caso se supone que los cortantes transversales son iguales, de tal modo que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$.

3-6 Círculo de Mohr del esfuerzo plano

Suponga que el elemento $dx \, dy \, dz$ de la figura 3-8b se corta por un plano oblicuo con una normal n a un ángulo arbitrario ϕ en sentido inverso al de las manecillas del reloj con respecto al eje x , como se muestra en la figura 3-9. Esta sección trata sobre los esfuerzos σ y τ que actúan sobre dicho plano oblicuo. Sumando las fuerzas causadas por las componentes del esfuerzo e igualándolas a cero, se determina que los esfuerzos σ y τ están dados por

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (3-8)$$

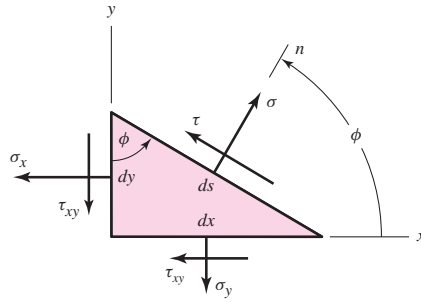
$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (3-9)$$

Las ecuaciones (3-8) y (3-9) se llaman *ecuaciones de transformación de esfuerzo plano*.

Al diferenciar la primera ecuación con respecto a ϕ e igualar el resultado a cero, se obtiene

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3-10)$$

| Figura 3-9



La ecuación (3-10) define dos valores particulares del ángulo $2\phi_p$, de los cuales uno define el esfuerzo normal máximo σ_1 y el otro, el esfuerzo normal mínimo σ_2 . Los dos esfuerzos se llaman *esfuerzos principales* y sus direcciones correspondientes son las *direcciones principales*. El ángulo entre las direcciones principales es de 90° . Es importante observar que la ecuación (3-10) puede escribirse de la forma

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\phi_p - \tau_{xy} \cos 2\phi_p = 0 \quad (a)$$

Al comparar esta expresión con la ecuación (3-9) se ve que $\tau = 0$, lo que significa que las *superficies que contienen esfuerzos principales tienen esfuerzos cortantes iguales a cero*.

De manera similar, se diferencia la ecuación (3-9), su resultado se iguala a cero y se obtiene

$$\tan 2\phi_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (3-11)$$

La ecuación (3-11) define los dos valores de $2\phi_s$ en los que el esfuerzo cortante τ alcanza un valor extremo. El ángulo entre las superficies que contienen los esfuerzos cortantes máximos es de 90° . La ecuación (3-11) también puede escribirse de la forma

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi_p + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\phi_p = 0 \quad (b)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (3-8) se obtiene

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (3-12)$$

La ecuación (3-12) indica que las dos superficies que contienen los esfuerzos cortantes máximos también contienen esfuerzos normales iguales de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$.

Al comparar las ecuaciones (3-10) y (3-11) se observa que $\tan 2\phi_s$ es el recíproco negativo de $\tan 2\phi_p$. Esto significa que $2\phi_s$ y $2\phi_p$ son ángulos separados por 90° y, por lo tanto, los ángulos entre las superficies que contienen los esfuerzos cortantes máximos y las superficies que contienen los esfuerzos principales están a $\pm 45^\circ$.

Las fórmulas de los dos esfuerzos principales pueden obtenerse sustituyendo el ángulo $2\phi_p$ de la ecuación (3-10) en la ecuación (3-8). El resultado es

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-13)$$

De manera similar, los dos esfuerzos cortantes de valor extremo serán

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-14)$$

Se debe poner atención especial al hecho de que un valor extremo del esfuerzo cortante *quizá no sea el mismo que el valor máximo real*. Vea la sección 3-7.

Es importante hacer notar que las ecuaciones expuestas hasta este punto son suficientes para realizar cualquier transformación de esfuerzo plano. Sin embargo, debe tenerse extremo cuidado cuando se apliquen. Por ejemplo, suponga que desea determinar el estado de esfuerzo principal en un problema donde $\sigma_x = 14$ Mpa, $\sigma_y = -10$ Mpa y $\tau_{xy} = -16$ Mpa. De la ecuación (3-10) se obtiene $\phi_p = -26.57^\circ$ y 63.43° para localizar las superficies de esfuerzo principal, mientras que, de la ecuación (3-13) resulta $\sigma_1 = 22$ Mpa y $\sigma_2 = -18$ Mpa para los esfuerzos principales. Si los esfuerzos principales fueran todo lo que se desea saber, ya se habría terminado. Sin embargo, ¿qué pasa si lo que se quiere encontrar se el elemento que contiene los esfuerzos principales apropiadamente orientados en relación con los ejes x y y ? Se tienen dos valores de ϕ_p y dos valores de los esfuerzos principales. ¿Cómo se sabe cuál valor de ϕ_p corresponde a cierto valor del esfuerzo principal? Para clarificar esto, sería necesario sustituir uno de los valores de ϕ_p en la ecuación (3-8) para determinar el esfuerzo normal correspondiente a ese ángulo.

Un método gráfico para expresar las relaciones desarrolladas en esta sección, llamado *diagrama del círculo de Mohr*, constituye un medio muy eficaz para visualizar el estado de esfuerzo en un punto y mantener un registro de las direcciones de las diversas componentes asociadas con el esfuerzo plano. Puede demostrarse que las ecuaciones (3-8) y (3-9) son un conjunto de ecuaciones paramétricas de σ y τ , donde el parámetro es 2ϕ . La relación entre σ y τ es la de un círculo graficado en el plano σ, τ , donde el centro del círculo se ubica en $C = (\sigma, \tau) = [(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0]$ y tiene un radio de $R = \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$. Aquí surge un problema en el signo del esfuerzo cortante. Las ecuaciones de transformación se basan en un ϕ positivo en un sentido inverso al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 3-9. Si se graficara un τ positivo por encima del eje σ , los puntos rotarían en el sentido de las manecillas del reloj sobre el círculo 2ϕ en la dirección opuesta de la rotación del elemento. Sería adecuado si las rotaciones fueran en la misma dirección. El problema podría resolverse con facilidad al graficar un τ positivo por debajo del eje. Sin embargo, el enfoque clásico del círculo de Mohr usa una convención diferente para el esfuerzo cortante.

Convención del cortante del círculo de Mohr

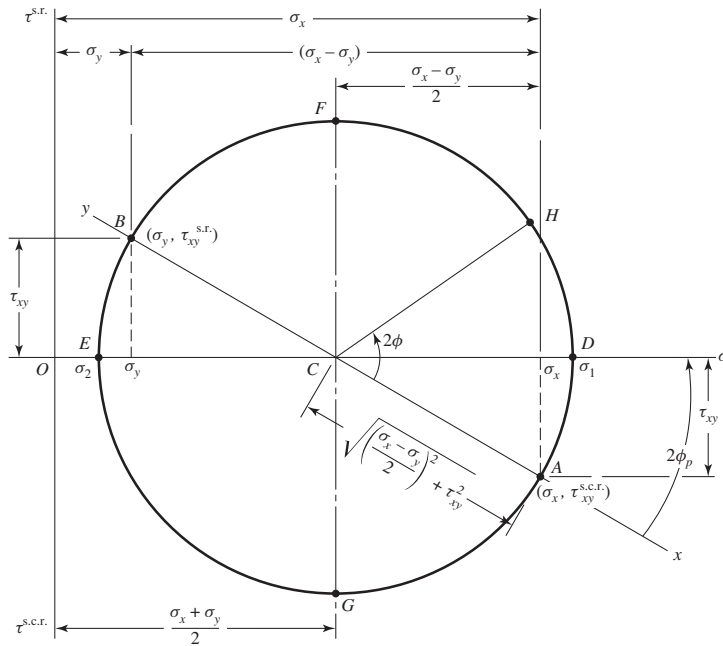
Esta convención se sigue al dibujar el círculo de Mohr:

- Los esfuerzos cortantes que tienden a rotar al elemento en el sentido de las manecillas del reloj (s.r.) se grafican *por encima* del eje σ .
- Los esfuerzos cortantes que tienden a rotar al elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj (s.c.r.) se grafican *por debajo* del eje σ .

Por ejemplo, considere la cara derecha del elemento de la figura 3-8b. De acuerdo con la convención del círculo de Mohr, el esfuerzo cortante que se muestra se grafica *por debajo* del eje σ porque tiende a rotar al elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj. El esfuerzo cortante en la cara superior del elemento se grafica *por encima* del eje σ porque tiende a rotar al elemento en el sentido de las manecillas del reloj.

En la figura 3-10 se establece un sistema de coordenadas con los esfuerzos normales graficados a lo largo de la abscisa y los esfuerzos cortantes graficados como las ordenadas. En el eje de las abscisas se trazan los esfuerzos normales de tensión (positivos) a la derecha del origen O y los esfuerzos normales de compresión (negativos) a la izquierda. En el eje de las ordenadas, se trazan los esfuerzos cortantes arriba en el sentido de las manecillas del reloj

Figura 3-10
Diagrama del círculo de Mohr.



(s.r.); los esfuerzos cortantes en el sentido contrario a las manecillas del reloj (s.c.r.) se trazan abajo.

Con base en el estado de esfuerzo de la figura 3-8b se traza el diagrama del círculo de Mohr (figura 3-10), para lo cual primero se observa la superficie derecha del elemento que contiene σ_x para establecer el signo de σ_x y la dirección s.r. o s.c.r. del esfuerzo cortante. La cara derecha se llama la *cara x* donde $\phi = 0^\circ$. Si σ_x es positivo y el esfuerzo cortante τ_{xy} es s.c.r. como se muestra en la figura 3-8b, puede establecerse el punto A con coordenadas $(\sigma_x, \tau_{xy}^{s.c.r.})$ en la figura 3-10. Enseguida, se observa la *cara y* superior, donde $\phi = 90^\circ$, que contiene σ_y , y se repite el proceso para obtener el punto B con coordenadas $(\sigma_y, \tau_{xy}^{s.r.})$, como se muestra en la figura 3-10. Los dos estados de esfuerzo del elemento están a $\Delta\phi = 90^\circ$ uno del otro sobre el elemento, de manera que estarán a $2\Delta\phi = 180^\circ$ uno del otro en el círculo de Mohr. Los puntos A y B están a la misma distancia vertical del eje σ . Por lo tanto, AB debe estar sobre el diámetro del círculo y el diámetro del círculo C está donde AB se intersecta con el eje σ . Con los puntos A y B sobre el círculo, y el centro C, es posible trazar el círculo completo. Observe que los extremos extendidos de la línea AB se marcan como x e y como referencias a las normales a las superficies para las cuales los puntos A y B representan los esfuerzos.

El círculo de Mohr completo representa el estado de esfuerzo en un punto *único* de una estructura. Cada punto sobre el círculo representa el estado de esfuerzo de una superficie *específica* que intersecta el punto de la estructura. Cada par de puntos sobre el círculo separados por 180° representa el estado de esfuerzo de un elemento cuyas superficies están separadas por 90° . Una vez que se ha dibujado el círculo de Mohr es posible visualizar los estados de esfuerzo de las distintas superficies que intersectan el punto que se está analizando. Por ejemplo, los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son los puntos D y E, respectivamente, y, como es obvio, sus valores concuerdan con la ecuación (3-13). También se observa que los esfuerzos cortantes son cero sobre las superficies que contienen σ_1 y σ_2 . Los dos esfuerzos cortantes con valores extremos, uno en el sentido de las manecillas del reloj y el otro en el sentido contrario, ocurren en F y G con magnitudes iguales al radio del círculo. Cada una de las superficies F y G también contiene esfuerzos normales de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, como se hizo notar antes en la ecuación (3-12). Por último, el estado de esfuerzo de una superficie arbitraria que se localiza en el ángulo ϕ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la cara x es el punto H.

En algún tiempo, el círculo de Mohr se usó gráficamente, trazándolo a una escala muy exacta y midiendo los valores con ayuda de una regla y un transportador. Aquí, el círculo de Mohr se utiliza estrictamente como una ayuda de visualización y se usará un enfoque semi-gráfico, calculando valores a partir de las propiedades del círculo. Esto se ilustra mediante el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3-4

Un elemento de esfuerzo tiene $\sigma_x = 80$ MPa y $\tau_{xy} = 50$ MPa s.r., como se muestra en la figura 3-11a.

a) Mediante un círculo de Mohr, calcule los esfuerzos principales y sus direcciones correspondientes, y muéstrelas en un elemento de esfuerzo correctamente orientados con respecto a las coordenadas xy . Dibuje otro elemento de esfuerzo para mostrar τ_1 y τ_2 , proporcione los esfuerzos normales correspondientes y clasifique en forma correcta el dibujo.

b) Repita el inciso a empleando sólo la transformación de ecuaciones.

Solución

a) En el enfoque semigráfico que aquí se emplea, primero se hace un bosquejo a mano alzada del círculo de Mohr y luego se usa la geometría de la figura para obtener la información que se desea.

Primero dibuje los ejes σ y τ (figura 3-11b) y desde la cara x localice $\sigma_x = 80$ MPa a lo largo del eje σ . Luego, sobre la cara x del elemento, se ve que el esfuerzo cortante es de 50 MPa en la dirección s.r. Así, para la cara x , esto establece el punto $A (80, 50^{\text{s.r.}})$ MPa. Correspondiente a la cara y , el esfuerzo es $\sigma = 0$ y $\tau = 50$ MPa en la dirección s.c.r. Esto localiza el punto $B (0, 50^{\text{s.c.r.}})$ MPa. La línea AB forma el diámetro del círculo requerido, el cual ahora se puede trazar. La intersección del círculo con el eje σ define σ_1 y σ_2 , como se muestra. Ahora, observe que el triángulo ACD del bosquejo indica las longitudes de los catetos AD y CD como 50 y 40 MPa, respectivamente. La longitud de la hipotenusa AC es

Respuesta

$$\tau_1 = \sqrt{(50)^2 + (40)^2} = 64.0 \text{ MPa}$$

y también se debe indicar en el bosquejo. Como la intersección C está a 40 MPa del origen, ahora se calculan los esfuerzos principales

Respuesta

$$\sigma_1 = 40 + 64 = 104 \text{ MPa} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = 40 - 64 = -24 \text{ MPa}$$

El ángulo 2ϕ desde el eje x , s.r., hasta σ_1 está dado por

Respuesta

$$2\phi_p = \tan^{-1} \frac{50}{40} = 51.3^\circ$$

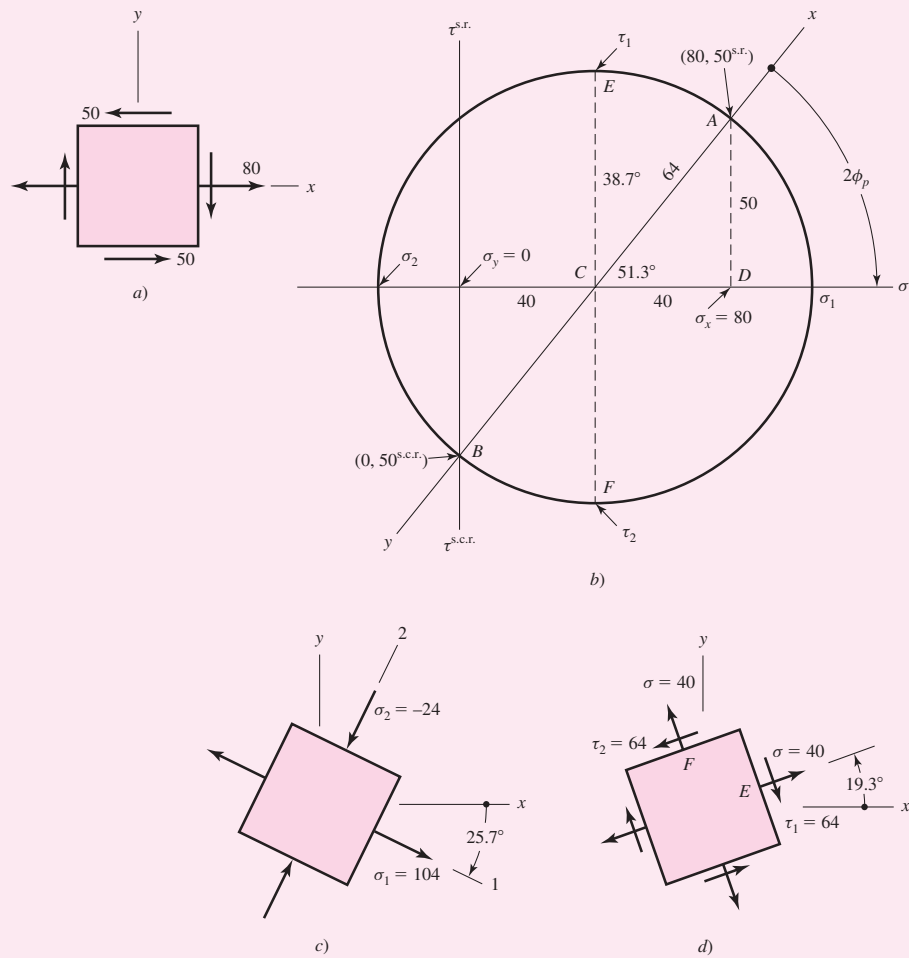
Para trazar el elemento correspondiente a los esfuerzos principales (figura 3-11c), bosqueje los ejes x y y paralelos a los ejes originales. El ángulo ϕ_p del elemento del esfuerzo se debe medir en la *misma* dirección que el ángulo $2\phi_p$ en el círculo de Mohr. Así, desde x mida 25.7° (la mitad de 51.3°) en el sentido de las manecillas del reloj para localizar el eje σ_1 . El eje σ_2 está a 90° del eje σ_1 y ahora el elemento de esfuerzo puede completarse e identificarse como se muestra. Observe que sobre este elemento *no* hay esfuerzos cortantes.

Los dos esfuerzos cortantes máximos ocurren en los puntos E y F de la figura 3-11b. Los dos esfuerzos normales que corresponden a dichos esfuerzos cortantes tienen un valor de 40 MPa cada uno, como se indica. El punto E se ubica a 38.7° , s.c.r., desde el punto A en el círculo de Mohr. Por lo tanto, en la figura 3-11d dibuje el elemento de esfuerzo orientado a 19.3° (la mitad de 38.7°) s.c.r. desde x . Después, el elemento debe identificarse con las magnitudes y direcciones, como se muestra.

Al trazar estos elementos de esfuerzos resulta importante señalar las direcciones x y y del sistema de referencia original. Lo anterior completa el vínculo entre el elemento de máquina original y la orientación de sus esfuerzos principales.

Figura 3-11

Todos los esfuerzos en MPa.



Respuesta

b) Se puede calcular de las ecuaciones de transformación. De la ecuación (3-10),

$$\phi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(-50)}{80} \right) = -25.7^\circ, 64.3^\circ$$

De la ecuación (3-8), para el primer ángulo $\phi_p = -25.7^\circ$,

$$\sigma = \frac{80 + 0}{2} + \frac{80 - 0}{2} \cos[2(-25.7)] + (-50) \operatorname{sen}[2(-25.7)] = 104.03 \text{ MPa}$$

El cortante sobre esta superficie se obtiene de la ecuación (3-9) como,

$$\tau = -\frac{80 - 0}{2} \operatorname{sen}[2(-25.7)] + (-50) \cos[2(-25.7)] = 0 \text{ MPa}$$

lo cual confirma que 104.03 MPa es un esfuerzo principal. De la ecuación (3-8), para $\phi_p = 64.3^\circ$,

$$\sigma = \frac{80 + 0}{2} + \frac{80 - 0}{2} \cos[2(64.3)] + (-50) \operatorname{sen}[2(64.3)] = -24.03 \text{ MPa}$$

Respuesta Al sustituir $\phi_p = 64.3^\circ$ en la ecuación (3-9) de nuevo produce $\tau = 0$, lo que indica que -24.03 MPa también es un esfuerzo principal. Después de haber calculado los esfuerzos principales, éstos pueden ordenarse de tal forma que $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Así, $\sigma_1 = 104.03$ MPa y $\sigma_2 = -24.03$ MPa.

Como para $\sigma_1 = 104.03$ MPa, $\phi_p = -25.7^\circ$, y como ϕ se define positivo s.c.r. en las ecuaciones de transformación, se gira 25.7° en el sentido de las manecillas del reloj para encontrar la superficie que contiene σ_1 . En la figura 3-11c se observa que esto concuerda totalmente con el método semigráfico.

Para determinar τ_1 y τ_2 , primero se usa la ecuación (3-11) para calcular ϕ_s :

$$\phi_s = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{80}{2(-50)} \right) = 19.3^\circ, 109.3^\circ$$

Para $\phi_s = 19.3^\circ$, de las ecuaciones (3-8) y (3-9) se obtiene

Respuesta

$$\sigma = \frac{80 + 0}{2} + \frac{80 - 0}{2} \cos[2(19.3)] + (-50) \sin[2(19.3)] = 40.0 \text{ MPa}$$

$$\tau = -\frac{80 - 0}{2} \sin[2(19.3)] + (-50) \cos[2(19.3)] = -64.0 \text{ MPa}$$

Recuerde que las ecuaciones (3-8) y (3-9) son ecuaciones de transformación de *coordenadas*. Imagine que se están rotando los ejes x y y 19.3° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con lo que y ahora apuntará hacia arriba y a la izquierda. Entonces, sobre la cara x rotada apuntará un esfuerzo cortante negativo hacia abajo y a la derecha, como se muestra en la figura 3-11d. En consecuencia, de nuevo este resultado concuerda con el método semigráfico.

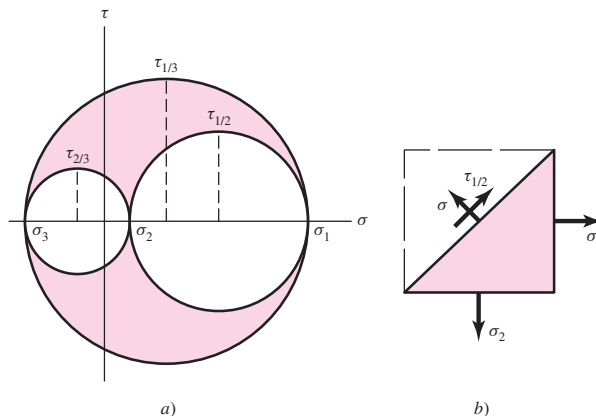
Para $\phi_s = 109.3^\circ$, de las ecuaciones (3-8) y (3-9) se obtiene $\sigma = 40.0$ MPa y $\tau = +64.0$ MPa. Usando la misma lógica para la transformación de coordenadas se encuentra que, de nuevo, concuerda con la figura 3-11d.

3-7 Esfuerzo tridimensional general

Como en el caso del esfuerzo plano, existe una orientación particular del elemento de esfuerzo en el espacio, en la que todas las componentes del esfuerzo cortante son iguales a cero. Cuando un elemento tiene esta orientación particular, las normales a las caras son mutuamente ortogonales, corresponden a las direcciones principales y los esfuerzos normales asociados con estas caras son los esfuerzos principales. Como hay tres caras, existen tres direcciones principales y tres esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 . Para el esfuerzo plano, la superficie libre de esfuerzo contiene el tercer esfuerzo principal, el cual es cero.

Cuando se estudió el esfuerzo plano fue posible especificar cualquier estado de esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} y encontrar los esfuerzos y las direcciones principales. Pero se requieren seis componentes del esfuerzo para especificar un estado general de esfuerzos en tres dimensiones, y el problema de la determinación de los esfuerzos y direcciones principales es más difícil. En diseño, las transformaciones tridimensionales casi nunca son necesarias puesto que la mayoría de los estados de esfuerzo máximo ocurren bajo condiciones de esfuerzo plano. Una excepción notable es el esfuerzo de contacto, que no es un caso de esfuerzo plano, donde los tres esfuerzos principales se dan en la sección 3-19. De hecho, *todos* los estados de esfuerzo son verdaderamente tridimensionales, donde éstos pueden describirse de manera unidimensional o bidimensional con respecto a ejes de coordenadas *específicos*. Aquí es más importan-

Figura 3-12
Círculos de Mohr para el esfuerzo tridimensional.



te entender la relación entre los *tres* esfuerzos principales, cuyo proceso para encontrarlos a partir de las seis componentes del esfuerzo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ y τ_{zx} implica determinar las tres raíces de la ecuación cúbica¹

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (3-15)$$

Cuando se grafican los círculos de Mohr de esfuerzos tridimensionales, los esfuerzos normales principales se ordenan de manera que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Entonces el resultado aparece como se muestra en la figura 3-12a. Las coordenadas del esfuerzo σ y τ para cualquier plano localizado de manera arbitraria siempre estará sobre las fronteras o dentro del área sombreada.

En la figura 3-12a también se muestran los tres *esfuerzos cortantes principales* $\tau_{1/2}, \tau_{2/3}$ y $\tau_{1/3}$.² Cada uno, ocurre en los dos planos, de los cuales uno se muestra en la figura 3-12b. La figura indica que los esfuerzos cortantes principales se obtienen mediante las ecuaciones

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3-16)$$

Por supuesto, $\tau_{\text{máx}} = \tau_{1/3}$ cuando los esfuerzos normales principales están ordenados ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), por lo que siempre debe ordenar sus esfuerzos principales. Haga esto en cualquier lenguaje de cómputo de su elección y siempre generará $\tau_{\text{máx}}$.

3-8 Deformación unitaria elástica

La deformación unitaria normal ϵ se define y analiza en la sección 2-1 para la probeta en tensión y está dada por la ecuación (2-2) cuando $\epsilon = \delta/l$, donde δ es la elongación total de la barra dentro de la longitud l . La ley de Hooke de la probeta en tensión está dada por la ecuación (2-3) como

$$\sigma = E\epsilon \quad (3-17)$$

donde la constante E se llama *módulo de Young* o *módulo de elasticidad*.

¹Para el desarrollo de esta ecuación y una mayor elaboración de las transformaciones del esfuerzo tridimensional vea Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999, pp. 46-78.

²Observe la diferencia entre esta notación y la del esfuerzo cortante, es decir, τ_{xy} . El empleo de la marca diagonal no es una práctica aceptada, pero aquí se utiliza para destacar la distinción.