

7 Elasticidad lineal plana

7.1 Introducción

Como se vio en el capítulo 6, desde el punto de vista matemático, el problema elástico consiste en un sistema de EDP's que debe ser resuelto en las tres dimensiones del espacio y en la dimensión asociada al tiempo ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$). Sin embargo, existen ciertas situaciones en las que dicho problema puede ser simplificado, reduciéndose el problema a dos dimensiones espaciales \mathbb{R}^2 , además de, eventualmente, la dimensión temporal ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$). La posibilidad de esta simplificación reside en que, en ciertos casos, la propia geometría y condiciones de contorno del problema permite identificar una *dirección irrelevante* (asociada a una dimensión del problema) de tal forma que pueden plantearse *a priori* soluciones del problema elástico *independientes de dicha dimensión*.

Si se considera un sistema local de coordenadas $\{x, y, z\}$ en el que dicha dirección irrelevante (supuesta constante) coincide con la dirección z , el análisis queda reducido al plano $\{x, y\}$, y de ahí el nombre *elasticidad plana* con el que suele denominarse a estos problemas. A su vez, éstos suelen dividirse en dos grandes grupos asociados a dos familias de hipótesis simplificativas:

- Problemas de *tensión plana*.
- Problemas de *deformación plana*.

Por simplicidad consideraremos aquí el caso *isotérmico*, aunque no hay ninguna limitación intrínseca para la generalización de los resultados que van a obtenerse al caso termoelástico.

7.2 Estado de tensión plana

El estado de tensión plana queda caracterizado por las siguientes hipótesis simplificativas:

- 1) *El estado tensional es de la forma:*

$$[\sigma]_{xyz} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

2) Las tensiones no nulas (es decir, las asociadas al plano $x - y$) no dependen de la variable z :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, t) \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, t) \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, t) \quad (7.2)$$

Para analizar bajo que condiciones las anteriores hipótesis resultan razonables, consideremos un medio elástico plano cuyas dimensiones y forma asociadas al plano $x - y$ (que denominaremos *plano de análisis*) son arbitrarias y tal que la tercera dimensión (que denominaremos al *espesor* de la pieza) queda asociada al eje z (ver Figura 7-1). Supondremos que se dan las siguientes circunstancias sobre el medio elástico en cuestión:

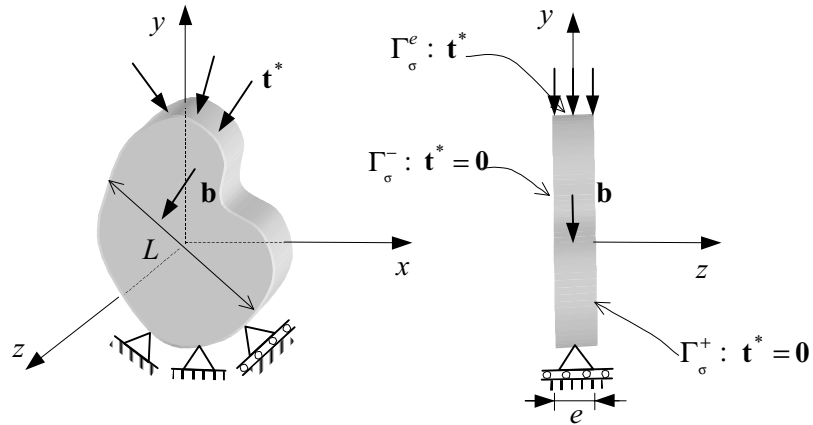


Figura 7-1– Ejemplo de estado de tensión plana

a) El espesor e es mucho menor que la dimensión típica asociada al plano de análisis $x - y$:

$$e \ll L \quad (7.3)$$

b) Las acciones (fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ y vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$) están contenidas en el plano de análisis $x - y$ (su componente z es nula) y, además, no dependen de la tercera dimensión:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ - \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_\sigma^e : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) El vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ solo es distinto de cero sobre el contorno del espesor de la pieza (contorno Γ_σ^e), mientras que sobre las superficies laterales Γ_σ^+ y Γ_σ^- es nulo (ver Figura 7-1).

$$\Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Observación 7-1

La pieza con geometría y acciones definidas por las ecuaciones (7.3) y (7.4) y el estado de tensión plana, indicado por las ecuaciones (7.1) y (7.2) y esquematizado en la figura Figura 7-2, resultan compatibles. En efecto, aplicando las condiciones de contorno Γ_σ sobre la pieza se obtiene:

- *Superficies laterales:* Γ_σ^+ y Γ_σ^- :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Canto* Γ_σ^e :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x(x, y, t) \\ t_x(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

compatibles con las suposiciones (7.4) y (7.5).

NOTA

El hecho de que todas las *tensiones* no nulas estén contenidas en el plano $x - y$ da lugar al nombre de *tensión plana*.

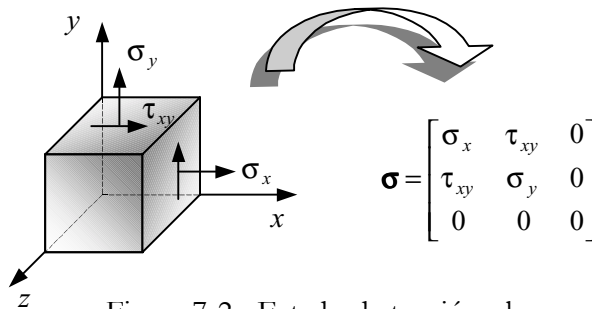


Figura 7-2– Estado de tensión plana

7.2.1 Campo de deformaciones. Ecuación constitutiva

Consideremos ahora la ecuación constitutiva elástica lineal:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \tag{7.6}$$

que aplicada al estado tensional (7.1) y en notación ingenieril proporciona las deformaciones como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde se han tenido en cuenta las condiciones $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. En vista de las ecuaciones (7.2) y (7.7) puede concluirse que tampoco las deformaciones dependen

RECORDATORIO

Las deformaciones tangenciales ingenieriles se definen como:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} \end{aligned}$$

de la coordenada z ($\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t)$). Asimismo, en la ecuación (7.7) puede resolverse la deformación ε_z como:

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \quad (7.8)$$

En definitiva el tensor de deformaciones para el caso de tensión plana resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.9)$$

y la sustitución de la ecuación (7.8) en la ecuación (7.7) conduce, tras algunas operaciones algebraicas, a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7.10)$$

que puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{T.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \Rightarrow \boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C}^{T.P.} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \quad (7.11)$$

7.2.2 Campo de desplazamientos

Las ecuaciones geométricas del problema :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \Rightarrow \quad (7.12)$$

pueden descomponerse en dos grupos:

- 1) Las que no afectan al desplazamiento u_z (y que serían hipotéticamente integrables en \mathbb{R}^2 , en el dominio $x-y$):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{integración en } \mathbb{R}^2 \\ \Rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u_x = u_x(x, y, t) \\ u_y = u_y(x, y, t) \end{array} \right. \quad (7.13)$$

2) Aquellas en las que interviene el desplazamiento u_z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (7.14)$$

La observación de las ecuaciones (7.1) a (7.14) sugiere la consideración de un *problema elástico ideal de tensión plana reducido* a las dos dimensiones del plano de análisis y caracterizado por las siguientes incógnitas:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

en el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.15), o bien no intervienen en el problema reducido:

$$\begin{aligned}\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ u_z(x, y, z, t) &\rightarrow \text{No interviene en el problema}\end{aligned}\quad (7.16)$$

Observación 7-2

El problema de tensión plana es un problema elástico *ideal* puesto que no puede reproducirse exactamente como un caso particular del problema elástico en tres dimensiones. En efecto, no hay garantía de que la solución del problema reducido de tensión plana $u_x(x, y, t)$, $u_y(x, y, t)$ permita obtener una solución $u_z(x, y, z, t)$ para las ecuaciones geométricas adicionales (7.14).

7.3 Deformación plana

El estado de deformación se caracteriza por las siguientes hipótesis simplificativas:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

También en éste caso resulta ilustrativo analizar en qué situaciones dichas hipótesis resultan plausibles. Consideremos, por ejemplo, un medio elástico cuya geometría y acciones pueden generarse a partir de una sección bidimensional (asociada al plano $x-y$ y con las acciones $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ contenidas dicho plano) que se traslada sobre una generatriz recta perpendicular a la misma, asociada al eje z (ver Figura 7-3).

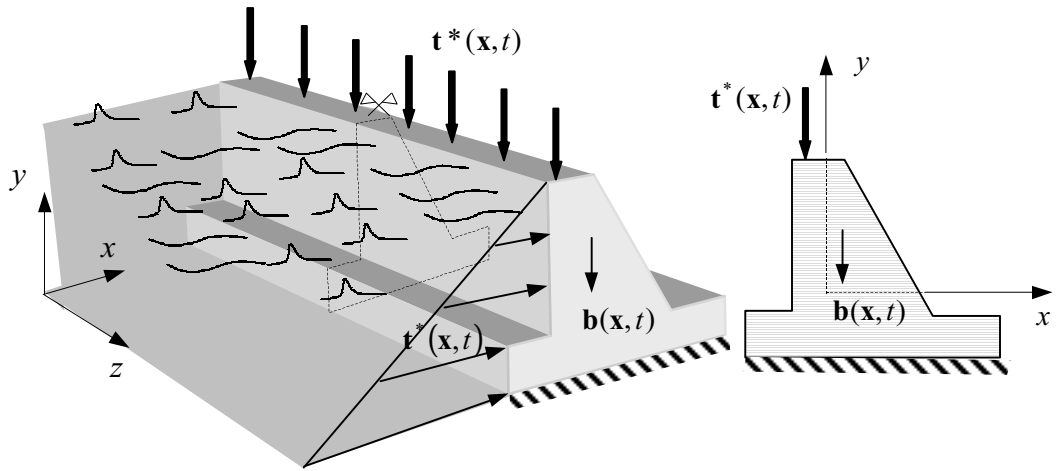


Figura 7-3– Ejemplo de estado de deformación plana

Las acciones del problema pueden caracterizarse entonces como:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

y en la sección central (que presenta la simetría respecto al eje z) se cumple que:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (7.19)$$

y, por tanto, el campo de desplazamientos en dicha sección central es del tipo:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

7.3.1 Campos de deformaciones y de tensiones

Al campo de desplazamientos propio del estado de deformación plana (7.20) le corresponde el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy}(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \gamma_{yz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

con lo que el tensor de deformaciones tiene la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

NOTA

Por analogía con el caso de tensión plana, el hecho de que todas las deformaciones no nulas estén contenidas en el plano $x - y$ da lugar al nombre de *deformación plana*.

Consideremos ahora la ecuación constitutiva elástica lineal:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2G \boldsymbol{\epsilon} \quad (7.23)$$

que aplicada al campo de deformaciones (7.21) proporciona las tensiones como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_y = (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_x & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 0 \\ \sigma_z &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

En vista de las ecuaciones (7.21) y (7.24), puede concluirse que *tampoco las tensiones dependen de la coordenada z* ($\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$). Por otra parte, en la ecuación (7.24) puede resolverse la tensión σ_z como:

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.25)$$

y el tensor de tensiones para el caso de deformación plana resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.26)$$

donde las componentes no nulas del tensor de tensiones (7.26) se escriben:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_y \right] \\ \sigma_y &= (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_x \right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7.27)$$

La ecuación (7.27) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{D.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\epsilon}\}} \Rightarrow \quad (7.28)$$

$$\boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C}^{D.P.} \cdot \{\boldsymbol{\epsilon}\}}$$

Similarmente a lo que ocurre para el problema de tensión plana, las ecuaciones (7.20), (7.21) y (7.26) sugieren la consideración de un *problema elástico de deformación plana* reducido a las dos dimensiones del plano de análisis $x-y$ y caracterizado por las siguientes incógnitas:

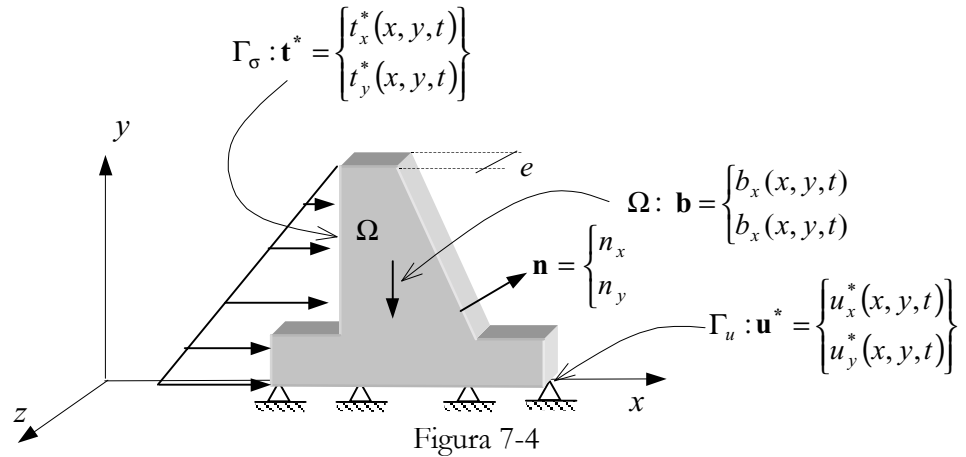
$$\boxed{\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\epsilon}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}} \quad (7.29)$$

en el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.29):

$$\begin{aligned}
 u_z &= 0 \\
 \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y)
 \end{aligned}
 \tag{7.30}$$

7.4 El problema elástico lineal en elasticidad bidimensional

A la vista de las ecuaciones de los apartados 7.2 y 7.3 el problema elástico-lineal para los problemas de tensión y deformación plana queda caracterizado como sigue (ver Figura 7-4):



a) Ecuaciones:

Ecuación de Cauchy:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho b_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}
 \end{cases}
 \tag{7.31}$$

Ecuación constitutiva:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{7.32}$$

dónde la matriz constitutiva **C** puede escribirse de forma genérica a partir de las ecuaciones (7.11) y (7.28) como:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\nu}}{2} \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \text{Tensión} \\
 \text{plana} \\
 \\
 \text{Deformación} \\
 \text{plana}
 \end{matrix}
 \rightarrow \begin{cases}
 \bar{E} = E \\
 \bar{\nu} = \nu \\
 \\
 \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \\
 \bar{\nu} = \frac{\nu}{(1-\nu)}
 \end{cases}
 \tag{7.33}$$

NOTA
 La tercera ecuación correspondiente a la componente *z*, o bien no interviene (tensión plana), o es idénticamente nula (deformación plana)

Ecuaciones geométricas:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}} \quad (7.34)$$

Condiciones de contorno en el espacio:

$$\boxed{\Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{cases} u_x^* = u_x^*(x, y, t) \\ u_y^* = u_y^*(x, y, t) \end{cases} \quad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{cases} t_x^* = t_x^*(x, y, t) \\ t_y^* = t_y^*(x, y, t) \end{cases}} \quad (7.35)$$

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales:

$$\boxed{\mathbf{u}(x, y, t)|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{u}}(x, y, t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y)} \quad (7.36)$$

b) *Incógnitas*

$$\boxed{\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}} \quad (7.37)$$

Las ecuaciones (7.31) a (7.37) definen un sistema de EDP's de 8 ecuaciones con 8 incógnitas a ser resuelto en el dominio espacio-temporal *reducido* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. Una vez resuelto el problema, pueden calcularse explícitamente:

$$\text{Tensión plana} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.38)$$

$$\text{Deformación plana} \rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

7.5 Problemas asimilables a elasticidad bidimensional

7.5.1 Tensión Plana

Serán típicamente asimilables a estados de tensión plana aquellos estados tenso-deformationales producidos en sólidos con *una dimensión sensiblemente inferior a las otras dos* (que configuran el plano de análisis $x-y$) *y con acciones contenidas en dicho plano*. La placa cargada en su plano medio y la viga de gran canto de la Figura 7-5 son típicos ejemplos de estructuras analizables en estado de tensión plana. Como caso particular, los problemas de *flexión simple y compuesta en vigas de plano medio*, considerados en la Resistencia de Materiales, pueden ser también asimilados a problemas de tensión plana.

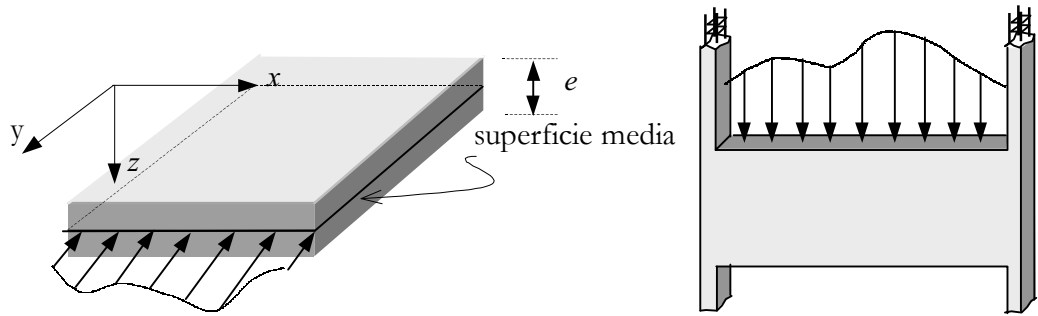


Figura 7-5—Placa cargada en su plano medio y viga de gran canto

7.5.2 Deformación plana

Serán típicamente asimilables a estados de deformación plana aquellos sólidos cuya geometría puede obtenerse como el resultado del desplazamiento de una *sección generatriz plana con acciones contenidas en su plano* (plano de análisis $x - y$) sobre una línea perpendicular a la misma. Además, la hipótesis de deformación plana $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ debe ser justificable. Típicamente, dicha situación se produce en dos circunstancias:

- 1) *La dimensión de la pieza en la dirección z es muy grande* (a efectos del análisis puede considerarse infinita). En este caso toda sección transversal central (no cercana a los extremos) puede considerarse de simetría y, por lo tanto, satisface las condiciones:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

de donde se concluyen las condiciones de partida del estado de deformación plana (7.17):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplos de este caso los encontramos en las tuberías bajo presión interna (y/o externa) de la Figura 7-6, el túnel de la Figura 7-7 o la zapata corrida de la Figura 7-8.

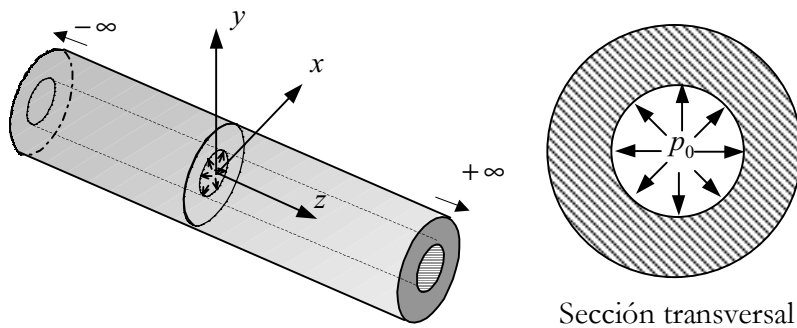
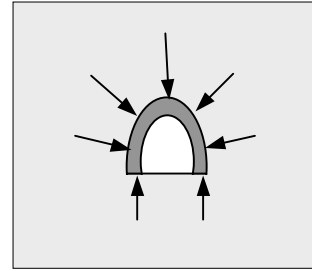
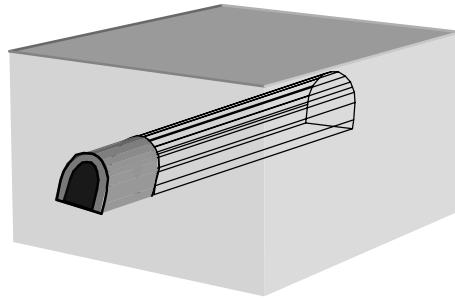


Figura 7-6—Tubo bajo presión



Sección transversal

Figura 7-7 – Túnel

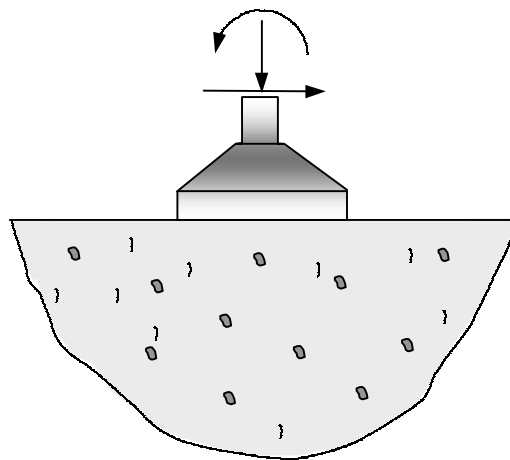
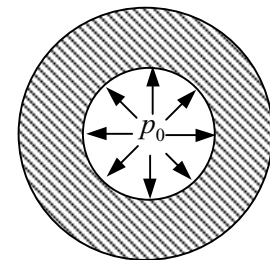
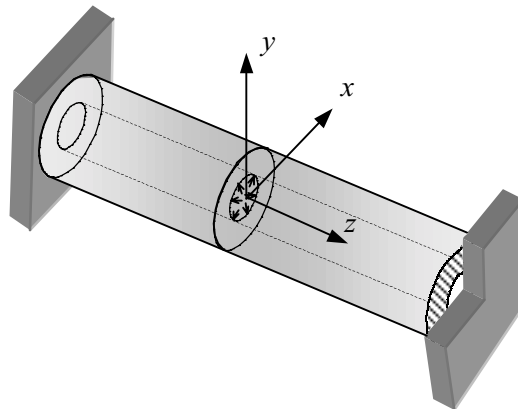


Figura 7-8– Zapata corrida

- 2) *La longitud de la pieza en la dirección longitudinal es reducida, pero el desplazamiento en la dirección z está impedido en las secciones extremas (ver Figura 7-9).*

En este caso la hipótesis de deformación plana (7.17) puede hacerse para todas las secciones transversales de la pieza



Sección transversal

Figura 7-9

7.6 Curvas representativas de los estados planos de tensión

Hay una importante tradición en ingeniería de representar gráficamente la distribución de los estados tensionales planos. Para ello se recurre a ciertas familias de curvas cuyo trazado sobre el plano de análisis proporciona información útil sobre dicho estado tensional.

7.6.1 Líneas isostáticas

Definición

Líneas isostáticas: son las *envolventes* del campo vectorial determinado por las tensiones principales.

Por definición de envolvente de un campo vectorial, las líneas isostáticas serán, en cada punto, tangentes a las dos direcciones principales y, por lo tanto, habrá dos familias de líneas isostáticas:

- *Isostáticas* σ_1 , tangentes a la tensión principal mayor.
- *Isostáticas* σ_2 , tangentes a la tensión principal menor

Además, puesto que las tensiones principales son ortogonales entre sí, *ambas familias de curvas serán también ortogonales*. Las líneas isostáticas informan sobre el modo en que transcurre sobre el plano de análisis el flujo de tensiones principales.

Como ejemplo, en la Figura 7-10 se presenta la distribución de líneas isostáticas sobre una viga apoyada con carga uniformemente distribuida.

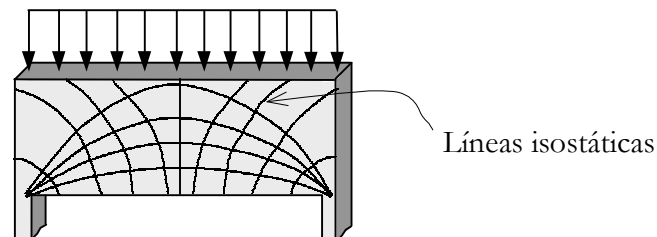


Figura 7-10

Definiciones:

Punto singular: Punto caracterizado por un estado tensional:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Su círculo de Mohr es *un punto* del eje σ (ver Figura 7-11)

Punto neutro: Punto singular caracterizado por un estado tensional:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Su círculo de Mohr es el *origen* del espacio $\sigma - \tau$ (ver Figura 7-11).

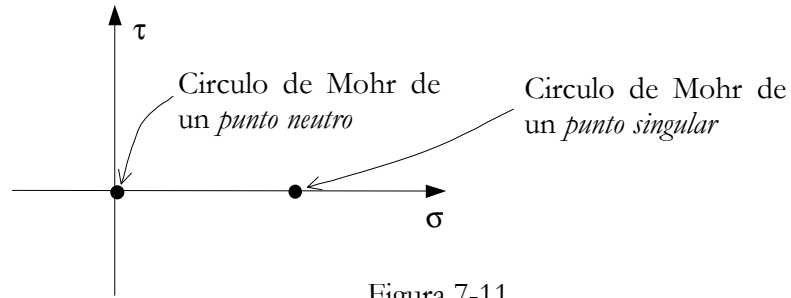


Figura 7-11

Observación 7-3

En un punto singular todas las direcciones son principales (el Polo es el propio círculo de Mohr (ver Figura 7-11). En consecuencia, en los puntos singulares las líneas isostáticas suelen perder su regularidad y pueden cambiar bruscamente de dirección.

7.6.1.1 Ecuación diferencial de las líneas isostáticas

Considerando la ecuación genérica de una isostática $y = f(x)$ y el valor de ángulo formado por la dirección principal σ_1 con la horizontal (ver Figura 7-12):

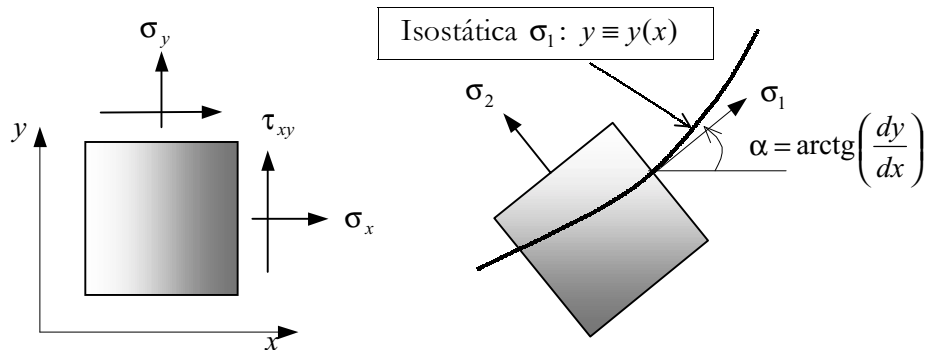


Figura 7-12

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dy}{dx} = y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2y'}{1 - (y')^2} \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$(y')^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} y' - 1 = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado de (7.39) en y' , se obtiene la ecuación diferencial de las isostáticas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación} \\ \text{diferencial de} \\ \text{las isostáticas} \end{array} \right\} \rightarrow y' = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}}_{\varphi(x,y)} \quad (7.40)$$

Conocida la función $\varphi(x, y)$ en la ecuación (7.40), puede integrarse dicha ecuación para obtener la ecuación algebraica la familia de isostáticas:

$$y = f(x) + C \quad (7.41)$$

El doble signo en la ecuación (7.40) dará lugar a dos ecuaciones diferenciales correspondientes a las dos familias ortogonales de isostáticas.

Ejemplo 7-1 – Una placa está sometida al siguiente estado tensional (ver Figura 7-13):

$$\sigma_x = -x^3 \quad ; \quad \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 3x^2y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

Obtener y dibujar los puntos singulares y la red de isostáticas.

Resolución:

a) Puntos singulares: se definen según:
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 3x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 = 0 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \quad \forall y \\ y=0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 2x^3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Luego el lugar geométrico de los puntos singulares es la recta: $x=0$. Dichos puntos singulares son además puntos neutros ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

b) Líneas isostáticas: De la ecuación (7.40):

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

que, para los datos del problema, resulta:

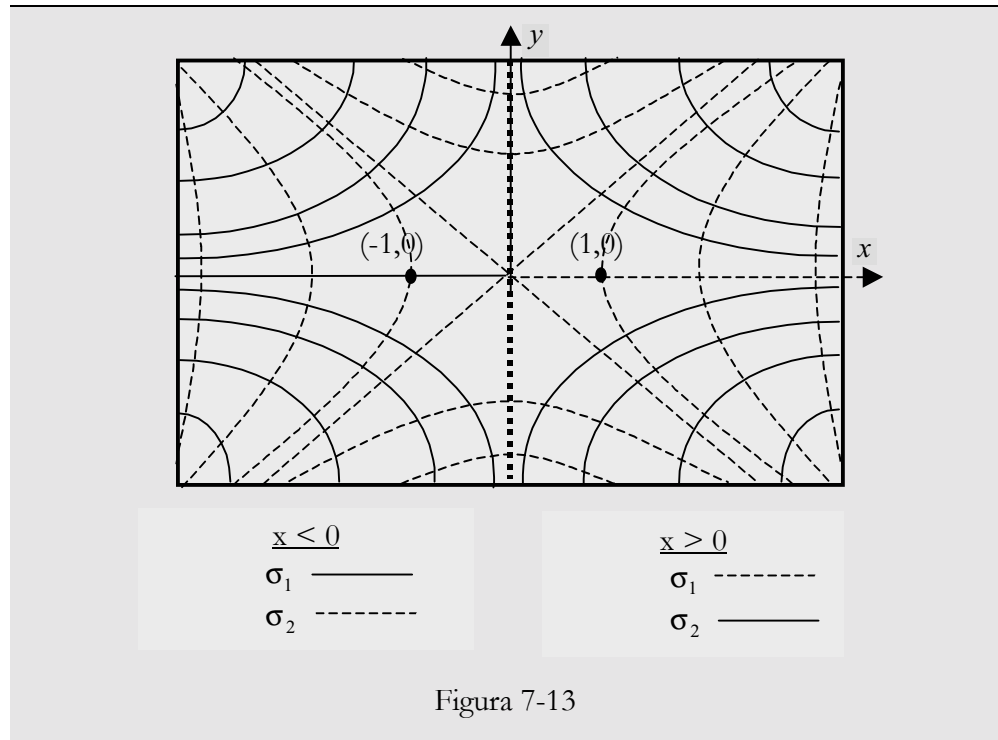
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{integrando: } \begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ xy = C_2 \end{cases}$$

por tanto, las isostáticas son dos familias de hipérbolas equiláteras ortogonales entre sí.

Sobre la recta singular de puntos singulares $x=0$ (que divide a la placa en dos regiones) las líneas isostáticas cambiarán bruscamente de pendiente. Para identificar la familia de isostáticas σ_1 tomemos un punto en cada región:

- Punto (1,0) : $\sigma_x = \sigma_2 = -1$; $\sigma_y = \sigma_1 = +2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostática σ_1 en la dirección y)
- Punto (-1,0) : $\sigma_x = \sigma_1 = +1$; $\sigma_y = \sigma_2 = -2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostática σ_1 en la dirección x)

Por tanto, la red de las isostáticas es la indicada en la Figura 7-13.

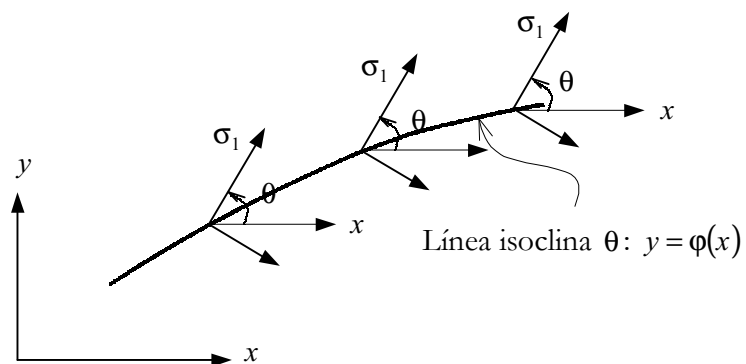


7.6.2 Líneas isoclinas

Definición

Líneas isoclinas: lugar geométrico de los puntos del plano de análisis en los que las tensiones principales forman un determinado ángulo con el eje x .

Por su propia definición, en todos los puntos de una misma isoclina las tensiones principales son paralelas entre sí, formando un ángulo constante θ (que caracteriza a la isoclina) con el eje x (ver Figura 7-14).



7.6.2.1 Ecuación de las isoclinas

Para obtener la ecuación $y = f(x)$ de la isoclina de ángulo θ , se establece que la tensión principal σ_1 forma un ángulo $\alpha = \theta$ con la horizontal, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación} \\ \text{algebraica de} \\ \text{las isoclinas} \end{array} \right\} \rightarrow \text{tg}(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\underbrace{\sigma_x - \sigma_y}_{\varphi(x,y)}} \quad (7.42)$$

ecuación algebraica que para cada valor de θ permite despejar:

$$y = f(x, \theta) \quad (7.43)$$

que constituye la ecuación de la familia de curvas isoclinas parametrizada en función del ángulo θ .

Observación 7-4

La determinación de la familia de las isoclinas permite conocer, en cada punto del medio, la dirección de las tensiones principales y, por lo tanto, plantear la obtención de las líneas isostáticas. Puesto que las isoclinas pueden ser determinadas mediante métodos experimentales (métodos basados en la fotoelasticidad) *proporcionan, indirectamente, un método para la determinación experimental de las líneas isostáticas.*

7.6.3 Líneas isobaras

Definición

Líneas isobaras: lugar geométrico de los puntos del plano de análisis con el mismo valor de la tensión principal σ_1 (o σ_2)

Por cada punto del plano de análisis pasarán dos familias de curvas isobaras: una correspondiente a σ_1 y otra a σ_2 . Las líneas isobaras dependen del valor de σ_1 , pero no de su dirección (ver Figura 7-15).

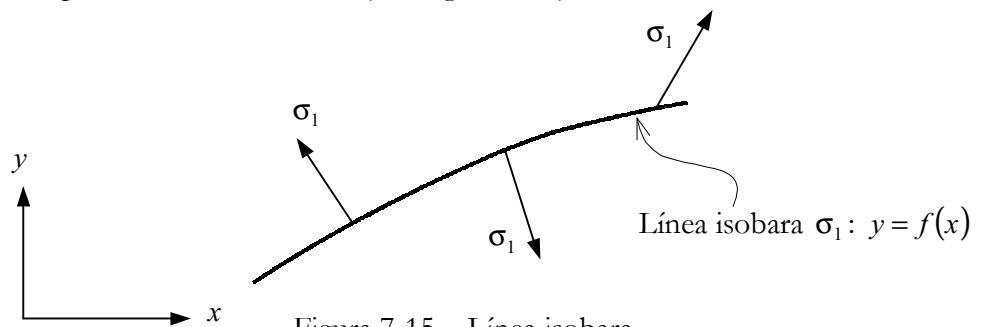


Figura 7-15 – Línea isobara

7.6.3.1 Ecuación de las isobaras

La ecuación que proporciona el valor de las tensiones principales (ver capítulo 4) define en forma implícita la ecuación algebraica de las dos familias de isobaras $y = f_1(x, c_1)$ e $y = f_2(x, c_2)$:

$$\begin{array}{l}
 \text{Ecuación} \\
 \text{algebraica de} \rightarrow \\
 \text{las isobaras}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_1(x,y)} = ctte = c_1 \\
 \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_2(x,y)} = ctte = c_2
 \end{array} \right. \quad (7.44)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x, c_1) \\ y_2 = f_2(x, c_2) \end{cases}$$

7.6.4 Líneas de máxima tensión cortante

Definición

Líneas de máxima tensión cortante (o tangencial): son las envolventes de las direcciones que, en cada punto, corresponden a la máxima (en módulo) tensión tangencial.

Observación 7-5

En cada punto del plano de análisis hay dos planos sobre los cuales las tensiones tangenciales toman el mismo valor máximo (en módulo) y signo contrario τ_{max} y τ_{min} . Estos planos pueden determinarse con ayuda del círculo de Mohr y forman un ángulo de 45° con las direcciones principales (ver Figura 7-16). Por consiguiente sus envolventes (las líneas de máxima tensión cortante) son dos familias de curvas ortogonales entre sí que forman un ángulo de 45° con las líneas isostáticas.

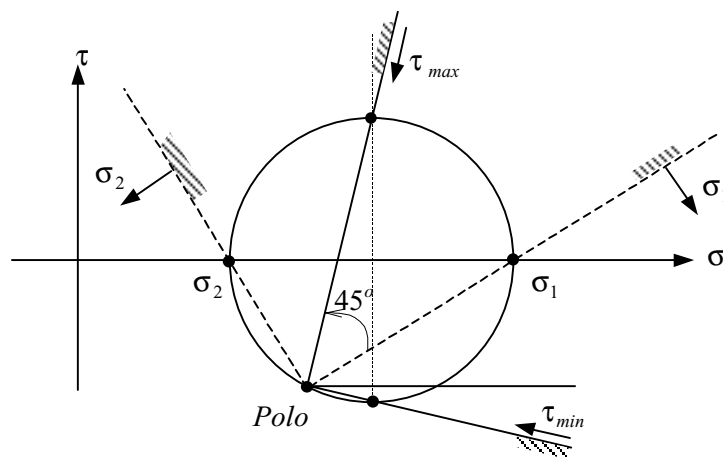


Figura 7-16— Planos de máxima tensión cortante

7.6.4.1 Ecuación diferencial de las líneas de máxima tensión tangencial

Sea β el ángulo formado por la dirección de τ_{max} con la horizontal (ver Figura 7-17). De acuerdo con la Observación 7-5, se tiene:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tang}(2\beta) = \text{tang}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\text{tang } 2\alpha} \tag{7.45}$$

donde α es el ángulo formado por la tensión principal σ_1 con la horizontal. En consecuencia, considerando la ecuación genérica de una línea de máxima tensión tangencial $y = f(x)$, la ecuación (7.45) y la relación $\text{tang } 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg}(2\beta) &= -\frac{1}{\text{tang}(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2 \text{tang } \beta}{1 - \text{tang}^2 \beta} \\ \text{tg}(\beta) &= \frac{dy}{dx} = y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2y'}{1 - (y')^2} \tag{7.46}$$

$$\Rightarrow (y')^2 - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} y' - 1 = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado de (7.46) en y' , se obtiene la ecuación diferencial de las líneas de máxima tensión cortante:

Ecuación diferencial de las líneas de máxima tensión cortante	$\rightarrow y' = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1}$	(7.47)
---	--	--------

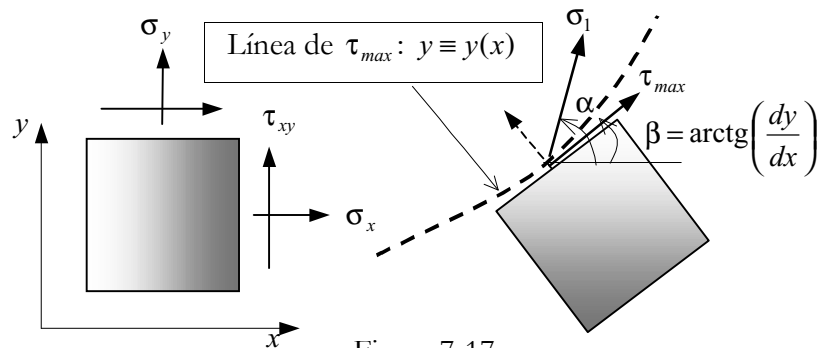


Figura 7-17

Conocida la función $\varphi(x,y)$ en la ecuación (7.47), puede integrarse dicha ecuación diferencial y obtener la ecuación algebraica de las dos familias de curvas ortogonales (correspondientes al doble signo en la ecuación (7.47)).

NOTA

Se utiliza aquí la expresión

trigonométrica:

$$\text{tang}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta = -\frac{1}{\text{tang } \theta}$$

8 Plasticidad

8.1 Introducción

Los modelos (ecuaciones constitutivas) elastoplásticos se utilizan en Mecánica de Medios Continuos para representar el comportamiento mecánico de materiales cuando se sobrepasan ciertos límites en los valores de las tensiones (o de las deformaciones) y dicho comportamiento deja de ser representable mediante modelos más simples como son los elásticos. En este capítulo se van a estudiar dichos modelos considerando, en todos los casos, que *las deformaciones son infinitesimales*.

A grandes rasgos, la Plasticidad introduce dos grandes modificaciones sobre la Elasticidad lineal estudiada en los capítulos 6 y 7:

- 1) *La pérdida de linealidad* (las tensiones ya no son proporcionales a las deformaciones).
- 2) La aparición del concepto de *deformación plástica o permanente*. Una parte de la deformación que se genera durante el proceso de carga no se recupera durante el proceso de descarga.

NOTA

Los conceptos de este apartado son un recordatorio de los considerados en el capítulo 4, apartados 4.4.4 a 4.4.7.

8.2 Nociones previas

8.2.1 Invariantes tensionales

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy y su matriz de componentes en una base asociada a los ejes cartesianos $\{x, y, z\}$ (ver Figura 8-1):

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Al tratarse de un tensor simétrico de segundo orden, diagonalizará en una base ortonormal y todos sus autovalores serán números reales. Sea entonces $\{x', y', z'\}$ un sistema de ejes cartesianos asociado a la base en el que $\boldsymbol{\sigma}$ diagonaliza (autovectores de $\boldsymbol{\sigma}$). Su matriz de componentes en dicha base será:

$$[\sigma]_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, denominadas *tensiones principales*, son los autovalores de σ y a las direcciones asociadas a los ejes $\{x', y', z'\}$ se las denomina *direcciones principales* (ver Figura 8-1).

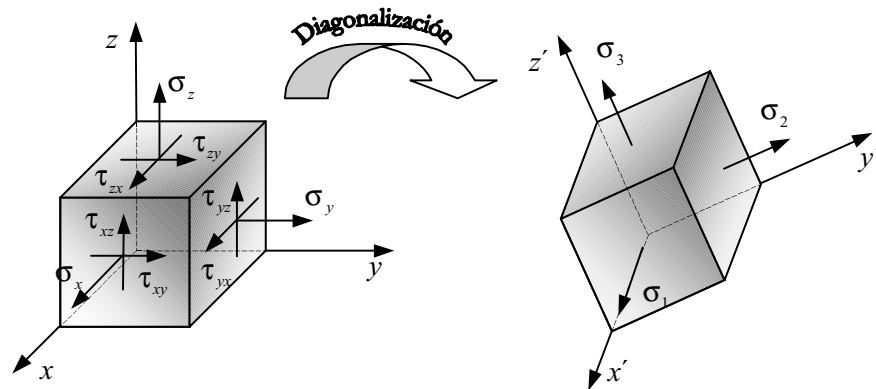


Figura 8-1 – Diagonalización del tensor de tensiones.

Para obtener las tensiones y las direcciones principales de σ , hay que resolver el correspondiente problema de autovalores y autovectores:

$$\text{Encontrar } \lambda \text{ y } \mathbf{v} \text{ tal que: } \sigma \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow [\sigma - \lambda \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

donde λ corresponde a los autovalores y \mathbf{v} a los autovectores. Condición necesaria y suficiente para que el sistema (8.3) tenga solución es que:

$$\det[\sigma - \lambda \mathbf{1}] = |\sigma - \lambda \mathbf{1}| = 0 \quad (8.4)$$

que en componentes resulta:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8.5)$$

El desarrollo algebraico de la ecuación (8.5), denominada *ecuación característica*, corresponde a una ecuación polinómica de tercer grado en λ , que puede escribirse como:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (8.6)$$

donde los coeficientes $I_1(\sigma_{ij}), I_2(\sigma_{ij})$ e $I_3(\sigma_{ij})$ son unas ciertas funciones de las componentes σ_{ij} del tensor σ en el sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$. Sin embargo, las soluciones de la ecuación (8.6), que serán función de los coeficientes de la misma (I_1, I_2, I_3), son las tensiones principales que, por otra parte, son independientes de cual sea el sistema de ejes en el cual se haya expresado σ . En consecuencia, dichos coeficientes deben de ser *invariantes* frente a cualquier cambio de base. Por este motivo, a los coeficientes I_1, I_2 e I_3 se les denomina *invariantes I* o invariantes fundamentales y su expresión (tras el correspondiente desarrollo de la ecuación (8.5)) resulta ser:

$$\text{Invariantes } I \rightarrow \begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - I_1^2) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases} \quad (8.7)$$

Evidentemente, cualquier función escalar de los invariantes será también un invariante y, por consiguiente, a partir de los invariantes I , definidos en (8.7) se pueden definir nuevos invariantes. En particular, definiremos los denominados *invariantes* J :

$$\text{Invariantes } J \rightarrow \begin{cases} J_1 = I_1 = \sigma_{ii} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ J_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 + 2I_2) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ J_3 = \frac{1}{3}(I_1^3 + 3I_1I_2 + 3I_3) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \quad (8.8)$$

Observación 8-1

- Nótese que si: $I_1 = 0 \Rightarrow J_i = I_i \quad i \in \{1,2,3\}$.
- Los invariantes J_i , $i \in \{1,2,3\}$, pueden expresarse de forma unificada y compacta mediante la expresión:

$$J_i = \frac{1}{i} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^i) \quad i \in \{1,2,3\}$$

8.2.2 Componentes esférica y desviadora del tensor de tensiones

Dado el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, se define la *tensión media* σ_m como:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_{ii}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (8.9)$$

y la *presión media* \bar{p} como:

$$\bar{p} = -\sigma_m \quad (8.10)$$

El tensor de tensiones de Cauchy puede descomponerse en una parte (o componente) *esférica* $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ y una parte (o componente) *desviadora* $\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{esf} + \boldsymbol{\sigma}' \quad (8.11)$$

donde la parte esférica del tensor de tensiones se define como:

$$\sigma_{esf} \stackrel{def}{=} \frac{1}{3} Tr(\sigma) \mathbf{1} = \sigma_m \mathbf{1}$$

$$\sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$
(8.12)

y, de las ecuaciones (8.11) y (8.12), la parte desviadora resulta ser:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$
(8.13)

Los invariantes I y J del tensor desviador σ' , que se denominarán invariantes I' y J' , resultan, tras considerar las ecuaciones (8.7), (8.8), (8.9) y (8.13):

$$\text{Invariantes } J' \rightarrow \begin{cases} J_1' = I_1' = 0 \\ J_2' = I_2' = \frac{1}{2} (\sigma' : \sigma') = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ji}' \\ J_3' = I_3' = \frac{1}{3} (\sigma_{ij}' \sigma_{jk}' \sigma_{ki}') \end{cases}$$
(8.14)

Observación 8-2

Se puede demostrar fácilmente que *las direcciones principales de σ coinciden con las de σ'* , es decir, que ambos tensores diagonalizan en la misma base. En efecto, si se trabaja en la base asociada a las direcciones principales de σ , es decir, la base en la que diagonaliza σ , y puesto que σ_{esf} es un tensor hidrostático y por lo tanto es diagonal en cualquier base, entonces σ' también diagonaliza en la misma base (ver Figura 8-2).

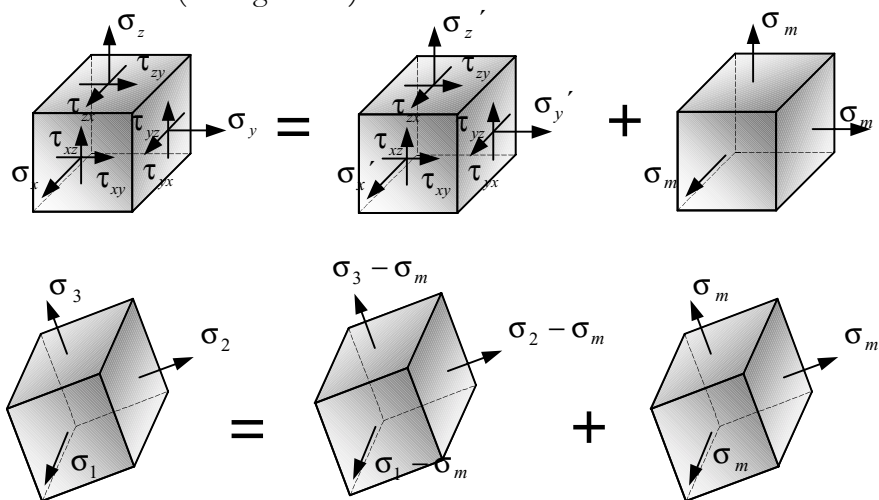


Figura 8-2. Diagonalización de las componentes esférica y desviadora

Observación 8-3

Se define como *tensión efectiva o tensión uniaxial equivalente* $\bar{\sigma}$ al escalar:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$$

La denominación tensión uniaxial equivalente se justifica porque su valor para un estado de tensión uniaxial coincide con dicha tensión uniaxial (ver Ejemplo 8-1).

Ejemplo 8-1 – Calcular el valor de la tensión uniaxial equivalente (o tensión efectiva) $\bar{\sigma}$ para un estado de tensión uniaxial definido por:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución:

a) Tensión media: $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_u}{3}$

b) Componente esférica: $\boldsymbol{\sigma}_{\text{esf}} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_u}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_u}{3} \end{bmatrix}$

c) Componente desviadora:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{esf}} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u \end{bmatrix}$$

Tensión efectiva: $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_u^2 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2}{3}} |\sigma_u| = |\sigma_u| \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{\sigma} = |\sigma_u|}$$

NOTA

El espacio de tensiones principales también es conocido con el nombre de *espacio de tensiones de Haigh-Westergaard*.

8.3 Espacio de tensiones principales

Consideremos un sistema de ejes cartesianos en $\mathbb{R}^3 \{x \equiv \sigma_1, y \equiv \sigma_2, z \equiv \sigma_3\}$ de tal forma que a cada estado tensional, caracterizado por los valores de las tres

tensiones principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, le corresponde un punto en dicho espacio al que denominaremos *espacio de tensiones principales* (ver Figura 8-3).

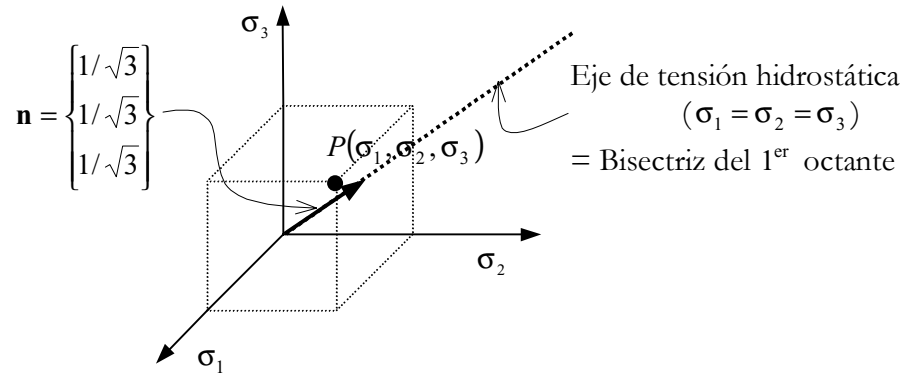


Figura 8-3 – Espacio de tensiones principales

Definición:

Eje de tensión hidrostática: Es el lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales que verifican la condición $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (ver Figura 8-3). Los puntos situados sobre el eje de tensión hidrostática representan estados tensionales hidrostáticos (ver capítulo 4, apartado 4.4.5).

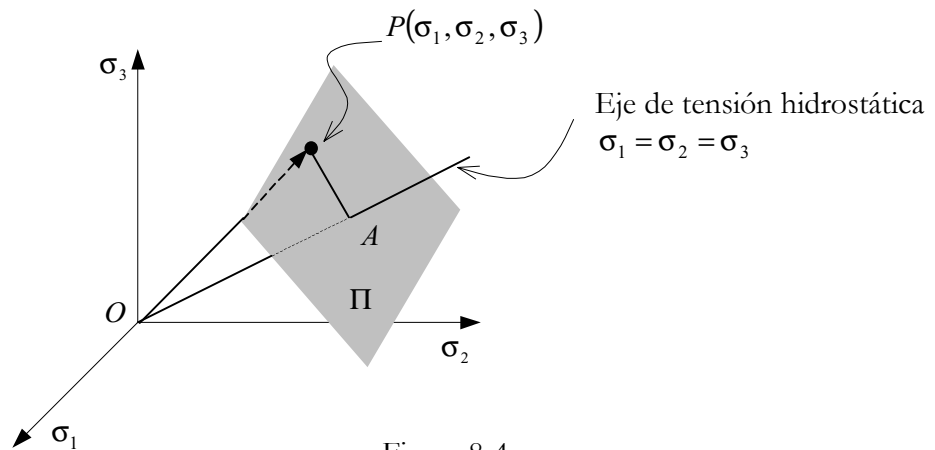


Figura 8-4

Definición:

Plano octaédrico Π : Cualquiera de los planos normales al eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-4). La ecuación de un plano octaédrico es:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = cte$$

y la normal (unitaria) al mismo es:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}^T$$

8.3.1 Tensiones sigma y tau octaedrica

Sea P un punto del espacio de tensiones principales, de coordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y vector posición $\overline{OP} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^T$ (ver Figura 8-5). Consideremos el plano octaédrico Π que pasa por el punto P , y sea A la intersección del eje de tensión hidrostática con dicho plano.

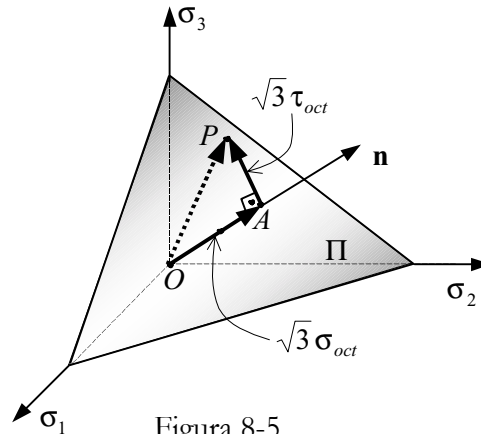


Figura 8-5

Definiciones:

- Tensión *sigma octaédrica*: $|\overline{OA}| = \sqrt{3} \sigma_{oct}$
- Tensión *tau octaédrica*: $|\overline{AP}| = \sqrt{3} \tau_{oct}$

Observación 8-4

- σ_{oct} informa de la distancia entre el origen O y el plano octaédrico que pasa por el punto P . El lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales con igual σ_{oct} es el plano octaédrico que está a una distancia $\sqrt{3} \sigma_{oct}$ del origen.
- τ_{oct} informa de la distancia entre el punto P y el eje de tensión hidrostática. Es pues una medida de la distancia que separa el estado caracterizado por el punto P de un estado de tensión hidrostática. El lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales con igual τ_{oct} es un cilindro cuyo eje es el eje de tensión hidrostática y cuyo radio es $\sqrt{3} \tau_{oct}$.

La distancia $|\overline{OA}|$ se puede calcular como la proyección del vector \overline{OP} sobre \mathbf{n} (la normal unitaria al plano octaédrico):

$$\left. \begin{aligned} |\overline{OA}| &= \overline{OP} \cdot \mathbf{n} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_m \\ |\overline{OA}| &= \sqrt{3} \sigma_{oct} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8.15)$$

$$\boxed{\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}} \quad (8.16)$$

donde se ha tenido en cuenta la definición (8.9) de la tensión media σ_m .

La distancia $|\overline{AP}|$ puede calcularse resolviendo el triángulo rectángulo OAP de la Figura 8-5:

$$|\overline{AP}|^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (8.17)$$

Mediante algunas operaciones algebraicas esta distancia puede expresarse en función del segundo invariante, J'_2 , del tensor de tensiones desviador de la ecuación (8.14) como:

$$\left. \begin{aligned} |\overline{AP}|^2 &= 2J'_2 \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{2}(J'_2)^{1/2} \\ |\overline{AP}| &= \sqrt{3} \tau_{oct} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} [J'_2]^{1/2}} \quad (8.18)$$

Expresiones alternativas de τ_{oct} en función del valor de J'_2 en la ecuación (8.14) son:

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right]^{1/2} \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Observación 8-5

- Si el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ es puramente *esférico*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{esf} = \sigma_m \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf} = \mathbf{0} \Leftrightarrow J'_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau_{oct} = 0}$$

(un estado esférico queda caracterizado por $\tau_{oct} = 0$ y, por tanto, pertenece al eje de tensión hidrostática, ver Figura 8-5).

- Si el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ es puramente *desviador*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \Leftrightarrow \sigma_m = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = Tr(\boldsymbol{\sigma}') = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{oct} = 0}$$

(un estado desviador queda caracterizado por $\sigma_{oct} = 0$ y pertenece al plano octaédrico que pasa por el origen).

Observación 8-6

Un punto P del espacio de tensiones principales queda unívocamente caracterizado por los tres invariantes $I_1 \equiv J_1, J'_2, J'_3$ (ver Figura 8-6):

- I_1 (a través de $\sigma_{oct} = \frac{1}{3}I_1$) caracteriza la distancia al origen ($=\sqrt{3} \sigma_{oct}$) del plano octaédrico Π sobre el que está el punto (sitúa al punto P sobre un cierto plano octaédrico).
- J'_2 caracteriza la distancia del punto al eje de tensión hidrostática (sitúa al punto P sobre un círculo del plano octaédrico con centro en el eje de tensión hidrostática y radio $\sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2} [J'_2]^{1/2}$).
- J'_3 caracteriza la posición del punto dentro del círculo definiendo el ángulo $\theta(J'_3)$.

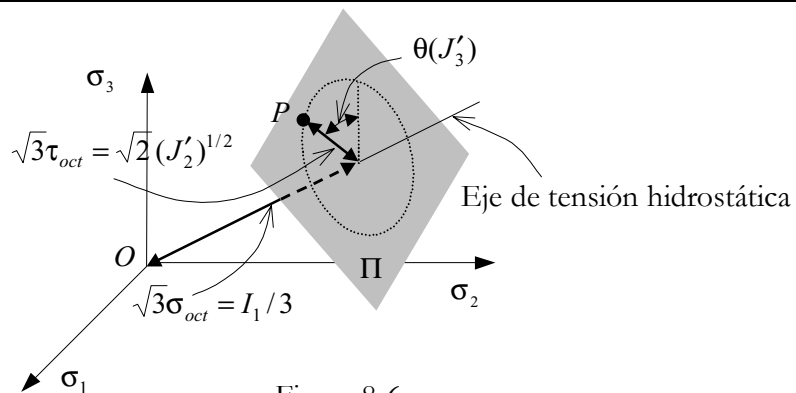


Figura 8-6

Observación 8-7

La Figura 8-7 muestra la proyección del espacio de tensiones principales sobre el plano octaédrico Π . En dicha proyección puede observarse la división del espacio de tensiones principales en seis sectores, caracterizados por las seis posibles ordenaciones distintas de dichas tensiones y separados por las proyecciones de los planos bisectores $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$ y $\sigma_1 = \sigma_2$. La elección del criterio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ reduce automáticamente el dominio de trabajo factible al sector sombreado en la figura y la intersección de cualquier superficie, del tipo $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, con el plano Π se reduce a una curva en dicho sector. Sin embargo, resulta automático extender dicha curva a los demás sectores (es decir, dibujar la curva que se obtendría con la misma función $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, pero considerando las distintas ordenaciones de las tensiones principales) sin más que aprovechar las condiciones de simetría respecto a los planos bisectores. La curva resultante, por lo tanto, presentará tres ejes de simetría respecto a cada uno de los ejes de la Figura 8-7.

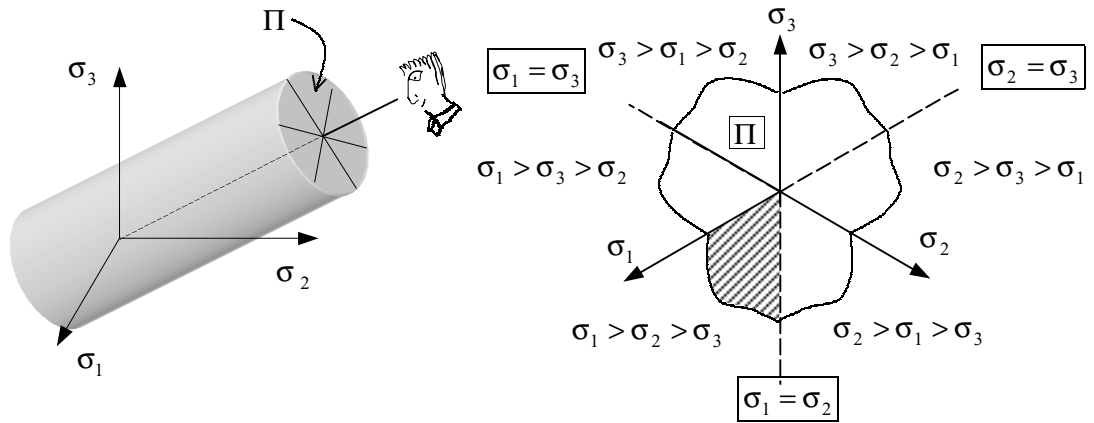


Figura 8-7 – Proyección sobre el plano octaédrico

8.4 Modelos reológicos de fricción

Los *modelos reológicos* son idealizaciones de modelos mecánicos, contruidos como combinación de *elementos* simples, cuyo comportamiento es fácilmente intuible, y que permiten percibir comportamientos mecánicos más complejos. Se utilizarán aquí modelos reológicos de fricción para introducir el concepto de deformación irre recuperable o permanente y sus consecuencias como paso previo al análisis de los modelos elastoplásticos.

8.4.1 Elemento elástico (elemento muelle)

El modelo reológico elástico viene definido por un muelle de constante E (ver Figura 8-8). El modelo establece que existe proporcionalidad entre la tensión y la deformación, tanto en carga como en descarga, siendo la constante E , el factor de proporcionalidad (ver Figura 8-8).

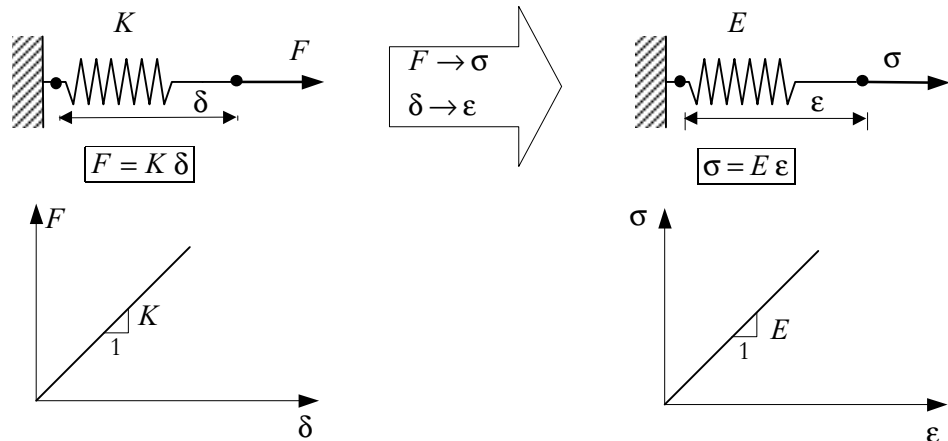


Figura 8-8 – Relación tensión-deformación para un modelo elástico

8.4.2 Elemento de fricción

NOTA

El modelo de fricción de Coulomb también recibe el nombre de *modelo de fricción seca*.

Consideremos un bloque situado sobre una superficie rugosa (ver Figura 8-9), y sometido a una fuerza de compresión N y a una fuerza horizontal F (positiva, hacia la derecha, y negativa hacia la izquierda). Sea δ el desplazamiento horizontal del bloque. El modelo de fricción de Coulomb establece que el módulo de la reacción R ejercida por la superficie de contacto

sobre el bloque no puede exceder de un cierto valor límite $F_u = \mu N$, donde $\mu \geq 0$ es el *coeficiente de rozamiento* entre el bloque y la superficie. En consecuencia, mientras el módulo de la fuerza F sea menor que dicho valor límite, el bloque no se mueve. Una vez alcanzado el valor límite $F_u = \mu N$, el bloque empieza a desplazarse en un estado de cuasi-equilibrio (sin producir aceleraciones) y, si se desea permanecer en régimen cuasi-estático, dicho valor límite no puede excederse. Estos conceptos pueden expresarse matemáticamente como:

$$\begin{aligned} |F| < \mu N &\Leftrightarrow \delta = 0 \quad (\text{No hay movimiento}) \\ |F| = \mu N &\Leftrightarrow \delta \neq 0 \quad (\text{Hay movimiento}) \\ |F| > \mu N &\quad (\text{Imposible}) \end{aligned} \quad (8.20)$$

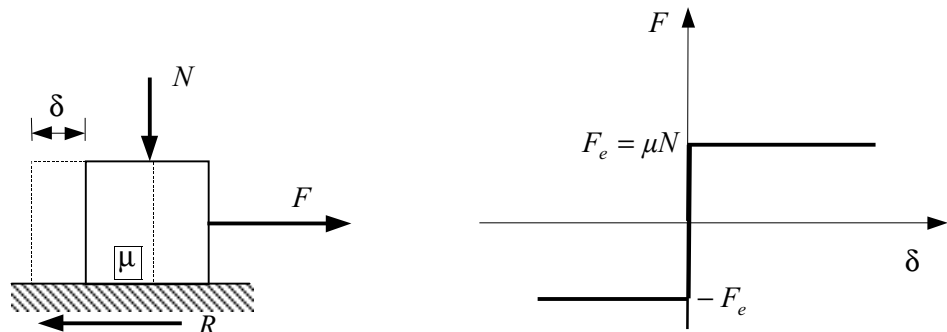


Figura 8-9 – Ley de fricción de Coulomb

El comportamiento del modelo de fricción de Coulomb, en términos de la relación fuerza-desplazamiento $F - \delta$, está representado gráficamente en la Figura 8-9, tanto para valores positivos de la fuerza F (movimiento hacia la derecha) como para valores negativos (movimiento hacia la izquierda).

Por analogía con el modelo mecánico de fricción, podemos definir el modelo reológico de fricción de la Figura 8-10 donde σ es la tensión (análoga a la fuerza F en el modelo de Coulomb) que actúa sobre el dispositivo y ε la deformación que experimenta (análoga al desplazamiento δ). Dicho modelo reológico dispone de un dispositivo friccional caracterizado por un valor límite σ_e (que juega el papel de μN en el modelo de Coulomb) cuyo valor no puede ser excedido.

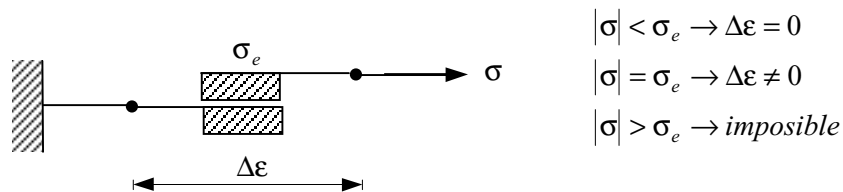


Figura 8-10 – Modelo reológico de fricción

En la Figura 8-11 se presenta la curva tensión-deformación correspondiente a dicho modelo reológico para un ciclo carga-descarga-recarga en el mismo, que puede ser descompuesta en los siguientes tramos:

- Tramo $\boxed{0-1}$: La tensión σ aumenta (a tracción) hasta alcanzar el valor umbral $\sigma = \sigma_e$. No se produce deformación.

- *Tramo 1-2*: Una vez alcanzado el umbral $\sigma = \sigma_e$, la tensión no puede aumentar, aunque sí mantenerse constante, con lo que el elemento de fricción *fluye* produciéndose una deformación ϵ que crece indefinidamente mientras se sostenga la tensión (proceso de *carga*).
- *Tramo 2-3*: En el punto 2 se invierte la tendencia de la tensión que empieza a disminuir ($\Delta\sigma < 0$) y se inicia la *descarga* ($\sigma < \sigma_e$). Automáticamente deja de producirse deformación $\Delta\epsilon = 0$. Esta situación se puede prolongar hasta que la tensión se anula ($\sigma = 0$) en el punto 3. Obsérvese que si el proceso se detiene aquí, nos encontraremos con que se ha recuperado el estado de tensión inicial pero no el estado de deformación, apareciendo una *deformación residual o permanente* ($\epsilon \neq 0$) que pone en evidencia que, para este modelo, la trayectoria en la curva tensión-deformación no es la misma en régimen de carga que en régimen de descarga y (desde el punto de vista termodinámico) el carácter irreversible del proceso de deformación.
- *Tramo 3-4*: Mas allá del punto 3 el signo de la tensión se invierte y pasa a ser de compresión. Sin embargo, puesto que $|\sigma| < \sigma_e$, no se producen cambios en la deformación ($\Delta\epsilon = 0$).
- *Tramo 4-5*: En el punto 4 se cumple el criterio $|\sigma| = \sigma_e$ y el modelo empieza nuevamente a entrar en carga y a *fluir* a tensión constante $\sigma = -\sigma_e$, produciendo deformación negativa $\Delta\epsilon < 0$, la cual reduce progresivamente la deformación acumulada. Finalmente, en el punto 5 se ha recuperado el estado de deformación inicial, pero no el de tensión. Más allá de dicho punto se podría proceder a una descarga, con la consiguiente disminución de la tensión hasta cerrar el ciclo en el punto 0, o proseguir en régimen de carga generando, ahora, deformación permanente negativa.

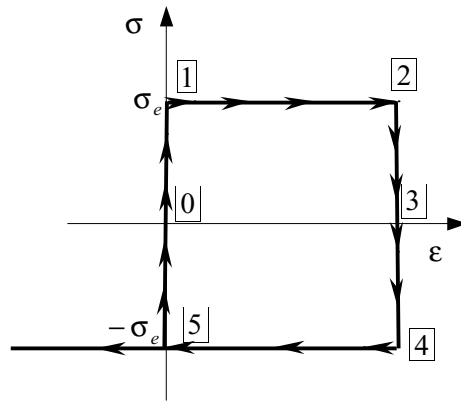


Figura 8-11 – Curva tensión-deformación en un ciclo de carga-descarga-recarga

8.4.3 Modelo elástico-friccional

Los elementos reológicos básicos, elástico y friccional pueden combinarse para producir un modelo mas complejo, que denominaremos *modelo elástico-friccional*, mediante la disposición en serie de un elemento elástico, de parámetro E , y de un elemento de fricción, de parámetro σ_e que denominaremos *límite elástico*, tal como se muestra en la Figura 8-12. Sea σ la tensión que actúa en el modelo y ϵ la deformación total del mismo. Al estar colocados los dos elementos básicos en serie, se verificará que la tensión que actúa sobre cada uno de ellos

es la misma. Por otro lado, podemos descomponer la deformación total como la suma de la deformación experimentada por el elemento elástico (ϵ^e) más la deformación experimentada por el dispositivo friccional (ϵ^f), y lo mismo podrá hacerse a nivel incremental:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma^e = \sigma^f \\ \epsilon &= \underbrace{\epsilon^e}_{\frac{\sigma}{E}} + \epsilon^f \\ \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^f \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Descomposición} \\ \rightarrow \text{aditiva de} \\ \text{la deformación} \end{array} \quad (8.21)$$

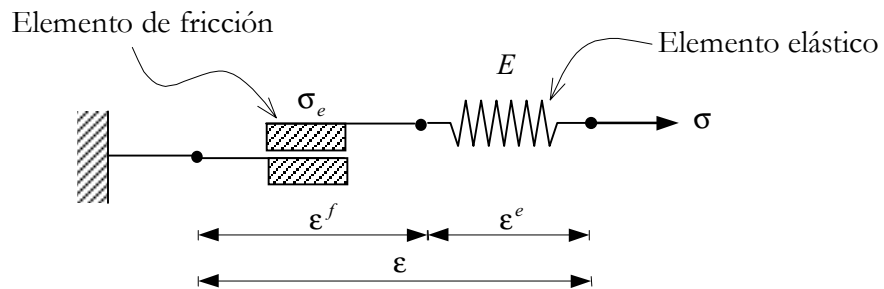


Figura 8-12 – Elemento elástico-friccional

Teniendo en cuenta el comportamiento tensión-deformación de cada uno de los elementos básicos que componen el modelo reológico, para el modelo combinado se tendrá:

- $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\epsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e \Rightarrow \begin{cases} \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e \\ \Delta\sigma = E\Delta\epsilon \end{cases}$

El elemento de fricción no se deforma para tensiones $|\sigma| < \sigma_e$, por lo que toda la deformación será absorbida por el elemento elástico.

- $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\epsilon^f \neq 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon^f \Rightarrow \begin{cases} |\sigma| = \sigma_e \\ \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^f \Rightarrow \Delta\epsilon^e = 0 \Rightarrow \Delta\sigma = 0 \end{cases}$

Todo incremento de la deformación es absorbido por el elemento de fricción con un incremento de tensión nulo.

- $|\sigma| > \sigma_e$

Es incompatible con las características del elemento de fricción.

En la Figura 8-13 se presenta la curva tensión-deformación para un ciclo carga-descarga-recarga con el modelo elástico-friccional, que puede ser descompuesto en los siguientes tramos:

– Tramo $\boxed{0-1}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\epsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *carga elástica*.

Al final del mismo, en el punto $\boxed{1}$, se tiene $\epsilon = \epsilon^e = \frac{\sigma_e}{E}$. El valor final σ_e al final de este tramo elástico justifica su denominación como *límite elástico*.

- Tramo $\boxed{1-2}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta \epsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon = \frac{\sigma_e}{E} + \epsilon^f \\ \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^f > 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de *carga*

friccional en el que no se genera deformación en el elemento elástico (*no se genera deformación elástica*) y todo el incremento de deformación es absorbido por el elemento friccional.

- Tramo $\boxed{2-3}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \epsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *descarga elástica*. Al final del mismo, en el punto $\boxed{3}$ se recobra el estado inicial de tensión nula ($\sigma = 0$). En consecuencia, en dicho punto la deformación elástica es $\epsilon^e = \frac{\sigma}{E} = 0$ y por tanto la deformación residual o irre recuperable es

$\epsilon = \epsilon^f \neq 0$; es decir, la deformación generada en el elemento de fricción durante el tramo de carga friccional $\boxed{1-2}$ no se recupera ante una eventual relajación a cero de la tensión. Este hecho permite calificar a *la componente friccional de la deformación ϵ^f como una deformación irre recuperable o irreversible*.

- Tramo $\boxed{3-4}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \epsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *recarga elástica* similar al $\boxed{0-1}$ pero con tensión de compresión ($\sigma < 0$). Durante el mismo no se modifica la componente friccional de la deformación y el valor final, en el punto $\boxed{4}$, de la deformación elástica es $\epsilon^e = -\frac{\sigma_e}{E}$.

- Tramo $\boxed{4-5}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta \epsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon = -\frac{\sigma_e}{E} + \epsilon^f \\ \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^f < 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de *recarga*

friccional durante el cual se genera deformación friccional negativa ($\Delta \epsilon^f < 0$), por lo que el valor total de la deformación de fricción va disminuyendo hasta anularse en el punto $\boxed{5}$

(caracterizado por $\epsilon = \epsilon^e = -\frac{\sigma_e}{E}$ y $\epsilon^f = 0$). Una eventual descarga elástica en dicho punto determina la vuelta al estado inicial $\boxed{0}$.

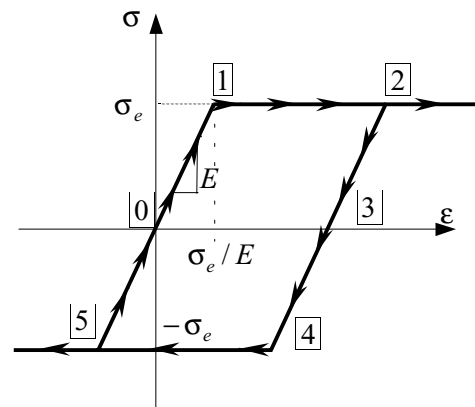


Figura 8-13 Curva tensión-deformación de un modelo elástico-friccional

8.4.4 Modelo de fricción con endurecimiento

Consideremos el modelo reológico de la Figura 8-14 compuesto por un elemento elástico (caracterizado por un parámetro H' , que denominaremos *módulo de endurecimiento*) y un elemento de fricción (caracterizado por el *límite*

elástico σ_e) dispuestos en paralelo. La disposición en paralelo motiva que ambos elementos reológicos compartan la deformación, mientras que la tensión total en el modelo será igual a la suma de la tensión sobre el elemento de fricción (σ^1) más la tensión que pasa por el elemento elástico (σ^2):

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} + \Delta\sigma^{(2)} \\ \epsilon = \epsilon^e = \epsilon^f \end{cases} \quad (8.22)$$

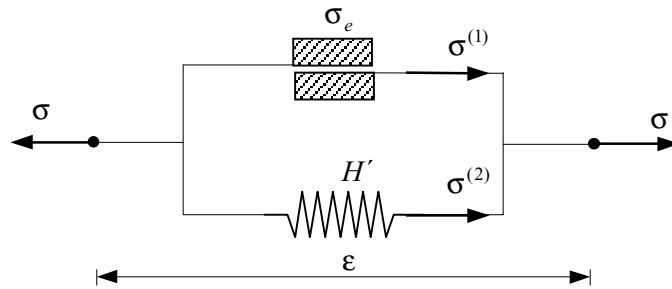


Figura 8-14 – Modelo de fricción con endurecimiento

Analizando por separado el comportamiento de cada elemento se tiene:

a) *Elemento de fricción:*

$$\begin{cases} |\sigma^{(1)}| < \sigma_e & \Delta\epsilon^f = \Delta\epsilon = 0 \\ |\sigma^{(1)}| = \sigma_e & \Delta\epsilon^f = \Delta\epsilon \neq 0 \\ |\sigma^{(1)}| > \sigma_e & \text{imposible} \end{cases} \quad (8.23)$$

b) *Elemento elástico:*

$$\begin{cases} \sigma^{(2)} = H' \epsilon^e = H' \epsilon \\ \Delta\sigma^{(2)} = H' \Delta\epsilon^e = H' \Delta\epsilon \end{cases} \quad (8.24)$$

c) Combinando las ecuaciones (8.23) y (8.24) se llega a:

$$|\sigma^{(1)}| = \left| \sigma - \underbrace{\sigma^{(2)}}_{H' \epsilon} \right| = |\sigma - H' \epsilon| \quad (8.25)$$

De acuerdo con las ecuaciones (8.23) y (8.24) pueden establecerse las siguientes situaciones para el modelo reológico:

- $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H' \epsilon| < \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \Delta\epsilon^f = \Delta\epsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(2)} = H' \Delta\epsilon^e = H' \Delta\epsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} \\ \Delta\epsilon = 0 \end{cases}$

Toda la tensión pasa por el dispositivo friccional y la deformación es nula.

- $|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H' \epsilon| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} |\sigma^{(1)}| = \sigma_e \\ |\sigma^{(2)}| = |\sigma - \sigma^{(1)}| \end{cases} \Rightarrow \Delta\sigma^{(2)} = \Delta\sigma = H' \Delta\epsilon$

Todo incremento de tensión es absorbido en su totalidad por el elemento elástico.

En la Figura 8-15 se presenta la curva tensión-deformación para un ciclo carga-descarga-recarga con el modelo propuesto y descompuesta en los siguientes tramos:

- Tramo $\boxed{0-1}$: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(2)} = E\Delta\varepsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo caracterizado porque toda la tensión es absorbida por el elemento de fricción. Al final del mismo, en el punto $\boxed{1}$, se tiene $\varepsilon = 0$ y $\sigma = \sigma_e$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{|\sigma - H'\varepsilon| < \sigma_e}$.
- Tramo $\boxed{1-2}$: $|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de carga en el que todo el incremento de tensión es absorbido por el elemento elástico. Globalmente el modelo aumenta su capacidad de resistir la tensión (y se dice que el modelo *endurece*) proporcionalmente al aumento de deformación, siendo el factor de proporcionalidad el *módulo de endurecimiento* H' . El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{|\sigma - H'\varepsilon| = \sigma_e}$.
- Tramo $\boxed{2-3}$: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \\ \Delta\sigma^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo en el que la tensión en el elemento friccional disminuye, con un incremento de deformación nulo y manteniéndose constante la tensión en el elemento elástico. Este estado puede proseguir hasta invertirse totalmente la tensión en el elemento friccional. Así, en el punto $\boxed{3}$ se tiene $\sigma^{(1)} = -\sigma_e$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{|\sigma - H'\varepsilon| < \sigma_e}$.
- Tramo $\boxed{3-4}$: $\begin{matrix} \sigma^{(1)} \\ -\sigma_e \end{matrix} = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon \end{cases} \rightarrow$ La situación es simétrica respecto al tramo $\boxed{1-2}$ con el elemento elástico disminuyendo la tensión que soporta, hasta anularse en el punto $\boxed{3}$, donde $\sigma^{(1)} = -\sigma_e$ y $\sigma^{(2)} = 0$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{|\sigma - H'\varepsilon| = \sigma_e}$. Más allá de este punto puede relajarse la tensión en el elemento de fricción hasta llegar al estado original $\boxed{0}$.

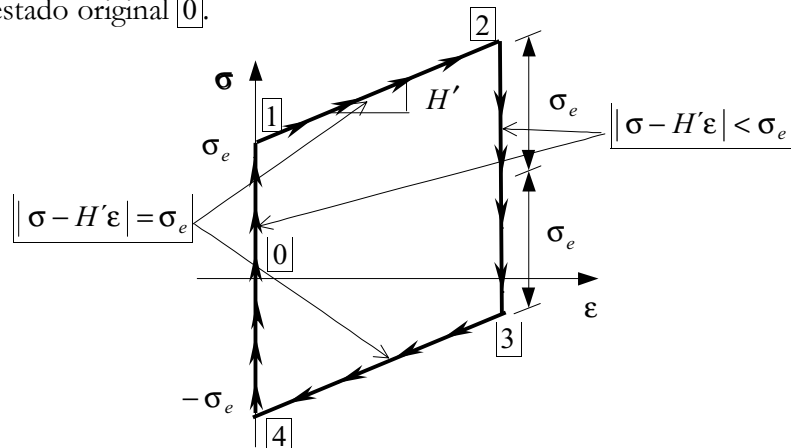


Figura 8-15 – Curva tensión-deformación de un modelo de fricción con endurecimiento

8.4.5 Modelo elástico – friccional con endurecimiento

Combinando ahora un elemento elástico, de módulo elástico E , en serie con el modelo friccional, con endurecimiento H' y límite elástico σ_e , del apartado 8.4.4, se llega al modelo elástico– fricción con endurecimiento de la Figura 8-16.

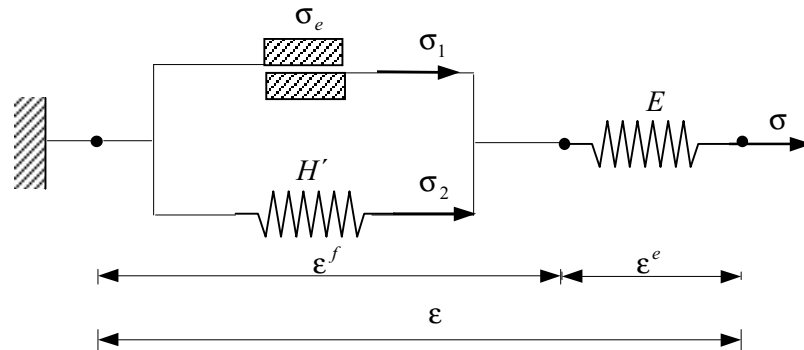


Figura 8-16 – Modelo elástico-friccional con endurecimiento.

De las ecuaciones de equilibrio de tensiones y de compatibilidad de deformaciones en el modelo, (ver Figura 8-16), tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Descomposición} \\ \rightarrow \text{aditiva de la} \\ \text{deformación} \end{array} \quad (8.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma^e = \sigma^f \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^f \end{array} \right.$$

donde σ^e y σ^f representan, respectivamente, las tensiones soportadas por el elemento elástico y el modelo de fricción con endurecimiento. Combinando ahora el comportamiento de un elemento elástico (ver Figura 8-8) con el del modelo de fricción con endurecimiento de la Figura 8-14, se tiene para el modelo reológico propuesto:

$$\bullet \quad \left| \sigma - H'\varepsilon_f \right| < \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \Delta\varepsilon^f = 0 \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \end{cases} \Rightarrow \Delta\sigma = E \Delta\varepsilon$$

El elemento de fricción con endurecimiento no se deforma y el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ es absorbido en su totalidad por el elemento elástico. Se tiene un caso que denominaremos *proceso elástico*.

$$\bullet \quad \left| \sigma - H'\varepsilon_f \right| = \sigma_e$$

$$a) \quad \left[\sigma \cdot \Delta\sigma > 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma > 0 ; \Delta\sigma > 0 \\ \text{ó} \\ \sigma < 0 ; \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma = \Delta\sigma^f = H' \Delta\varepsilon^f \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = E \Delta\varepsilon^e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f = \frac{1}{E} \Delta\sigma + \frac{1}{H'} \Delta\sigma = \frac{E + H'}{EH'} \Delta\sigma \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma = E^{ef} \Delta\varepsilon \\ E^{ef} = E \frac{H'}{E + H'} \end{cases}$$

El incremento de deformación es absorbido por los dos elementos del modelo (el friccional-endurecible y el elástico). La relación entre el

incremento de tensión $\Delta\sigma$ y el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ viene dada por el *módulo de deformación elástico-friccional* E^{ef} . Se trata de un caso que denominaremos *proceso de carga inelástica*.

$$b) \quad \boxed{\sigma \cdot \Delta\sigma < 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma > 0; \Delta\sigma < 0 \\ \text{ó} \\ \sigma < 0; \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon}$$

Todo el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ es absorbido por el elemento elástico. Se trata de un caso que denominaremos proceso de *descarga elástica*.

En la Figura 8-17 se presenta la curva tensión deformación en la que pueden distinguirse los siguientes tramos:

- Tramos $\boxed{0-1}$ y $\boxed{2-3}$: $|\sigma - H'\varepsilon_f| < \sigma_e \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon}$. Corresponden a *procesos elásticos*.
- Tramos $\boxed{1-2}$ y $\boxed{3-4}$: $\begin{cases} |\sigma - H'\varepsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \Delta\sigma > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E^{ef} \Delta\varepsilon}$. Corresponden a *procesos de carga inelástica*.
- Punto $\boxed{2}$: $\begin{cases} |\sigma - H'\varepsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon}$. Corresponde a un *proceso de descarga elástica*.

Nótese que si $H'=0$, entonces $E^{ef}=0$, y se recupera el modelo elástico-friccional de la Figura 8-13.

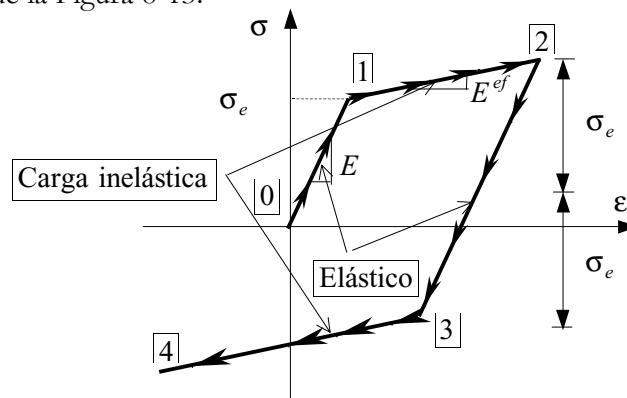


Figura 8-17 – Curva tensión-deformación de un modelo elástico-friccional con endurecimiento

8.5 Comportamiento fenomenológico elasto-plástico

Consideremos una barra de acero de longitud ℓ y sección A sometida a una fuerza de tracción F en sus extremos. La tensión en la barra será $\sigma = F/A$ (ver Figura 8-18) y la deformación de la misma puede ser estimada como $\varepsilon = \frac{\delta}{\ell}$, donde δ es el alargamiento de la barra. Sometiendo a dicha pieza a varios ciclos de carga y descarga se obtiene, típicamente, una respuesta, en términos de la curva tensión-deformación $\sigma - \varepsilon$, como la indicada en la Figura 8-19.

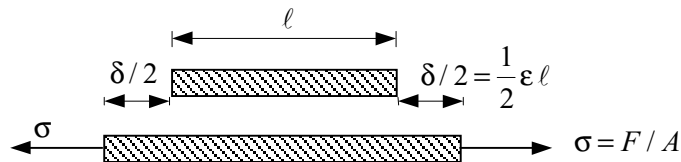


Figura 8-18 – Ensayo de tracción uniaxial

Analizando el primer ciclo se observa que, mientras la tensión no supera el valor σ_e (denominado *límite elástico*) en el punto [1], el comportamiento es elástico lineal caracterizado por el módulo elástico E ($\sigma = E\varepsilon$) y no existen deformaciones irreversibles (durante una eventual descarga se recupera la deformación producida durante la carga).

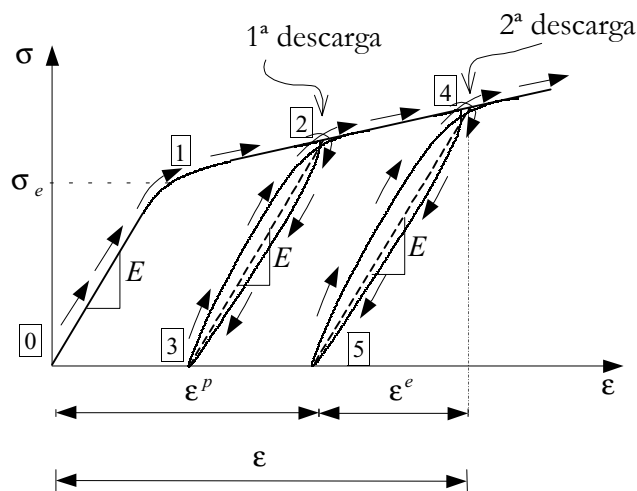


Figura 8-19 – Ciclos carga-descarga-recarga

Para tensiones superiores a σ_e , el comportamiento deja de ser elástico y parte de la deformación no se recupera ante una eventual reducción a cero de la tensión (punto [3]), apareciendo una deformación remanente denominada *deformación plástica* ε^p . Sin embargo, durante la rama de descarga [2-3] el comportamiento vuelve a ser, al menos de forma aproximada, incrementalmente elástico ($\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$). Lo mismo ocurre en la posterior recarga [3-2], produciéndose un comportamiento incrementalmente elástico, hasta que la tensión alcanza, en el punto [2], el máximo valor que había alcanzado durante el proceso de carga. A partir de este punto el comportamiento deja de nuevo de ser incrementalmente elástico (como si el material *recordase* la máxima tensión a la cual había estado sometido

previamente). Un siguiente ciclo carga-descarga-recarga [2-4-5-4] pone de nuevo de manifiesto que durante el tramo [2-4] se ha generado más deformación plástica, que aparece en forma de deformación permanente en el punto [5], y también más *deformación elástica* ε^e , entendida como aquella parte de la deformación que sí se recupera durante el tramo de descarga [4-5].

8.5.1 Efecto Bauschinger

Consideremos una probeta de un material virgen (que no ha sufrido previamente estados de deformación inelásticos) sometida a un ensayo de *tracción* uniaxial y otra probeta del mismo material virgen sometida a un ensayo de *compresión* uniaxial. Para ciertos materiales (denominados isorresistentes) las respuestas que se obtienen en ambos ensayos, en términos de la curva tensión-deformación $\sigma - \varepsilon$ de la Figura 8-20, son simétricas respecto al origen. Es decir, que en el ensayo a tracción la respuesta es elástica hasta un valor de $\sigma = \sigma_e$ (*límite elástico a tracción*) y en el ensayo a compresión la respuesta es también elástica hasta un valor de $\sigma = -\sigma_e$ (*límite elástico a compresión*), siendo el resto de ambas curvas (para un supuesto régimen de carga monótono) también simétricas. Diremos en este caso que la curva tensión-deformación del material virgen es simétrica a tracción y compresión.

NOTA

Este procedimiento se conoce como *estiramiento en frío* y tiene como fin obtener un límite elástico aparente del material superior al del material virgen

$$\sigma_f > \sigma_e.$$

Supongamos ahora que realizamos un ensayo de compresión sobre una probeta que ha estado *previamente sometida a una historia de deformaciones plásticas*, por ejemplo a un ciclo de carga-descarga a tracción como el [0-1-2-3] en la Figura 8-19 (estiramiento en frío), y sea $\sigma_f > \sigma_e$ la máxima tensión a la que ha estado sometido el material durante el proceso de carga. Un hipotético comportamiento *simétrico* llevaría a que el material tuviera ahora un comportamiento elástico en el rango de tensiones $[-\sigma^f, \sigma^f]$. Sin embargo, en ciertos casos, el comportamiento elástico a compresión termina mucho antes (ver Figura 8-20). Este es el efecto conocido como *efecto Bauschinger* o *endurecimiento cinemático*. Obsérvese que la curva tensión-deformación del modelo elástico-friccional de la Figura 8-17 exhibe éste tipo de endurecimiento.

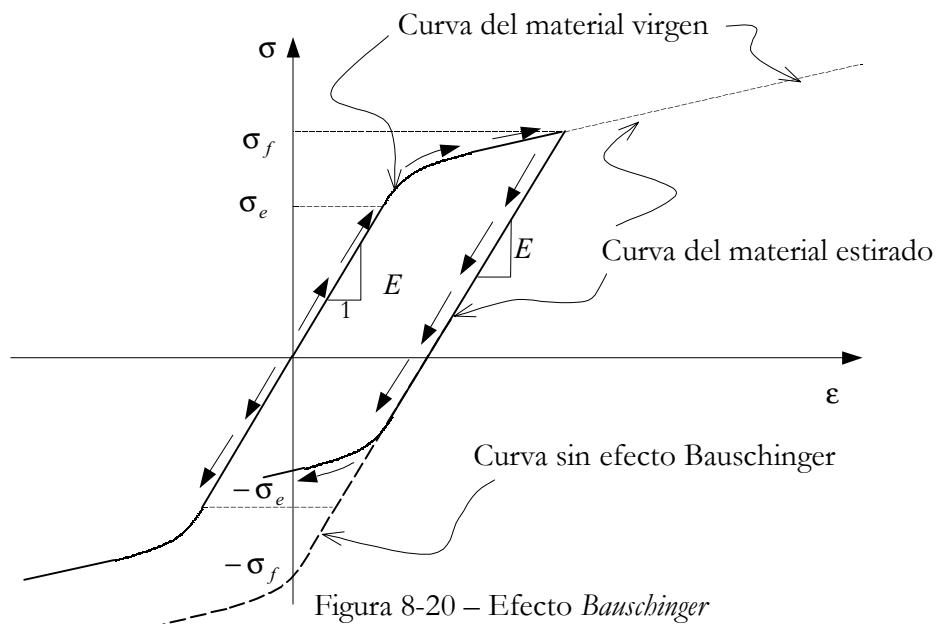


Figura 8-20 – Efecto Bauschinger

Observación 8-8

A la vista del comportamiento fenomenológico observado en la Figura 8-19 y en la Figura 8-20, el comportamiento elastoplástico se caracteriza por los siguientes hechos:

- 1) A diferencia del caso elástico, no existe unicidad en la relación tensión-deformación. Un mismo valor de la deformación puede corresponder a infinitos valores de la tensión y viceversa. El valor de la tensión depende, además de la deformación, de la historia de carga.
- 2) No hay una relación lineal entre la tensión y la deformación. A lo sumo esta linealidad puede ser incremental en ciertos tramos del proceso de deformación.
- 3) Se producen deformaciones irrecuperables o irreversibles en un ciclo carga-descarga.

8.6 Teoría incremental de la plasticidad en una dimensión

NOTA

Hasta cierto punto, dichos modelos pueden inspirarse, aunque con ciertas limitaciones, en modelos reológicos del típico elástico-friccional como los presentados en el apartado 8.4.

El comportamiento elastoplástico analizado en el apartado 8.5 puede ser modelado utilizando modelos matemáticos de cierta complejidad. Una de las aproximaciones más populares la constituye la denominada Teoría Incremental de la Plasticidad. Para el caso de una dimensión se pretende, en esencia, aproximar un comportamiento tensión-deformación como el de la Figura 8-19 mediante aproximaciones a trozos mediante ramas elásticas e inelásticas como las de la Figura 8-21. La generalización a varias dimensiones requiere la introducción de conceptos más abstractos.

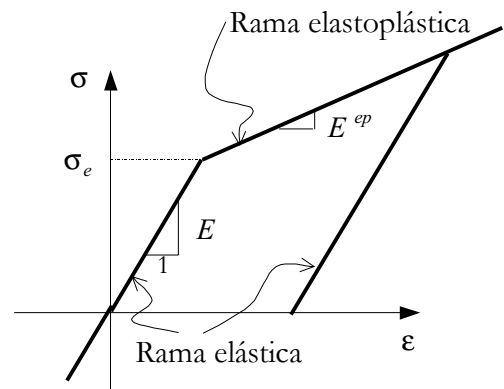


Figura 8-21 – Curva uniaxial tensión-deformación para un modelo elastoplástico

8.6.1 Descomposición aditiva de la deformación. Variable de endurecimiento

Se descompone la deformación total ϵ en la suma de una deformación elástica ϵ^e (o deformación recuperable), que se rige por la ley de Hooke, y una deformación plástica ϵ^p (o deformación irrecuperable):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Descomposición aditiva} \\ \text{de la deformación} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \end{cases} \quad (8.27)$$

donde E es el módulo elástico. Se define además la variable de endurecimiento $\alpha(\sigma, \varepsilon^p)$ mediante la ecuación de evolución:

NOTA

Se utiliza aquí la función signo definida mediante:
 $x \geq 0 \Leftrightarrow \text{sign}(x) = +1$
 $x < 0 \Leftrightarrow \text{sign}(x) = -1$

$$\boxed{\text{Variable de endurecimiento } \alpha \rightarrow \begin{cases} d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p \\ d\alpha \geq 0 \\ \alpha|_{\varepsilon^p=0} = 0 \end{cases} \quad (8.28)}$$

Observación 8-9

Nótese que la variable de endurecimiento α es siempre positiva, de acuerdo con su definición en la ecuación (8.28) y que, tomando módulos en la expresión $d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p$, se llega a:

$$d\alpha = |d\alpha| = \underbrace{|\text{sign}(\sigma)|}_{=1} |d\varepsilon^p| \Rightarrow d\alpha = |d\varepsilon^p|$$

Luego, para un proceso monótono creciente de la deformación plástica ambas variables coinciden:

$$d\varepsilon^p \geq 0 \Rightarrow \alpha = \int_0^{\varepsilon^p} |d\varepsilon^p| = \int_0^{\varepsilon^p} d\varepsilon^p = \varepsilon^p$$

Sin embargo, si el proceso no es monótono creciente la deformación plástica puede disminuir y su valor ya no coincide con el de la variable de endurecimiento α .

8.6.2 Dominio elástico. Función de fluencia. Superficie de fluencia

Se define como *dominio elástico en el espacio de tensiones* al interior del dominio encerrado por la superficie $F(\sigma, \alpha) = 0$:

$$\boxed{\text{Dominio elástico} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) < 0\}} \quad (8.29)$$

donde a la función $F(\sigma, \alpha): \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ se la denomina *función de fluencia plástica*.

Se define como *dominio elástico inicial* \mathbb{E}_σ^0 al dominio elástico correspondiente a una deformación plástica nula ($\varepsilon^p = \alpha = 0$):

$$\boxed{\text{Dominio elástico inicial} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, 0) < 0\}} \quad (8.30)$$

Un requerimiento adicional al dominio elástico inicial es que contenga al estado de tensión nula:

$$0 \in \mathbb{E}_\sigma^0 \Rightarrow F(0,0) < 0 \tag{8.31}$$

y ello se consigue definiendo la función de fluencia plástica mediante:

$$\text{Función de fluencia plástica} \rightarrow F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \tag{8.32}$$

donde $\sigma_f(\alpha) > 0$ es la denominada *tensión de fluencia*. El valor inicial (para $\alpha = 0$) de la tensión de fluencia es el límite elástico σ_e (ver Figura 8-22). A la función $\sigma_f(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se la denomina *ley de endurecimiento*.

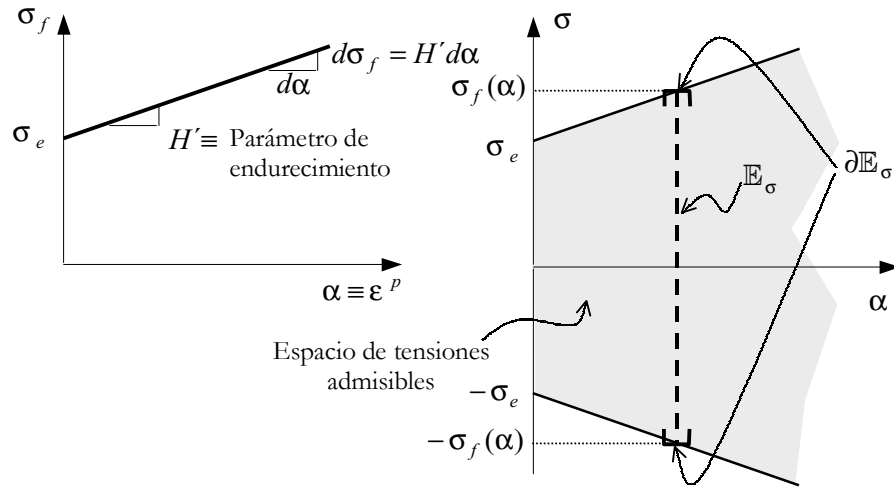


Figura 8-22. Ley de endurecimiento y espacio de tensiones admisibles

Se define la *superficie de fluencia* como el contorno del dominio elástico:

$$\text{Superficie de fluencia} \rightarrow \partial \mathbb{E}_\sigma := \{ \sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \} \tag{8.33}$$

El dominio elástico \mathbb{E}_σ junto con su contorno $\partial \mathbb{E}_\sigma$ determinan el espacio (dominio) de tensiones admisibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espacio de} \\ \text{tensiones} \\ \text{admisibles} \end{array} \right\} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial \mathbb{E}_\sigma = \{ \sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \leq 0 \} \tag{8.34}$$

y se *postula* que todo estado tensional factible (admissible) debe pertenecer al espacio de tensiones admisibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$. De acuerdo con las definiciones del dominio elástico en (8.29), de la superficie de fluencia (8.33) y del espacio de tensiones admisibles (8.34), puede establecerse lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F(\sigma, \alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| < \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ en el dominio elástico} \\ (\sigma \in \mathbb{E}_\sigma) \end{array} \right. \\ F(\sigma, \alpha) = 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ en la superf. de fluencia} \\ (\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma) \end{array} \right. \\ F(\sigma, \alpha) > 0 \Leftrightarrow |\sigma| > \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \text{estado tensional no admisible} \end{array} \right. \tag{8.35}$$

Observación 8-10

Nótese en la ecuación (8.34) la dependencia del espacio de tensiones admisibles con la variable de endurecimiento α . El dominio admisible evoluciona con la tensión de fluencia $\sigma_f(\alpha)$ de la forma:

$$\bar{\mathbb{E}}_\sigma \equiv [-\sigma_f(\alpha), \sigma_f(\alpha)] \text{ (ver Figura 8-22).}$$

8.6.3 Ecuación constitutiva

Para caracterizar la respuesta del material se definen las siguientes situaciones:

- *Régimen elástico:*

$$\sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow \boxed{d\sigma = E d\varepsilon} \quad (8.36)$$

- *Régimen elastoplástico en descarga:*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma, \alpha) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E d\varepsilon} \quad (8.37)$$

- *Régimen elastoplástico en carga plástica:*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E^{ep} d\varepsilon} \quad (8.38)$$

donde E^{ep} es el denominado *módulo de deformación elastoplástico*.

Observación 8-11

La situación $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ y $dF(\sigma, \alpha) > 0$ no puede darse, puesto que si $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ (de la ecuación (8.33)) $F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0$.

Si además $dF(\sigma, \alpha) > 0 \Rightarrow$

$$F(\sigma + d\sigma, \alpha + d\alpha) = \underbrace{F(\sigma, \alpha)}_{=0} + \underbrace{dF(\sigma, \alpha)}_{>0} > 0$$

y, de acuerdo con la ecuación (8.35) el estado tensional $\sigma + d\sigma$ sería no admisible.

8.6.4 Ley de endurecimiento. Parámetro de endurecimiento

La ley de endurecimiento proporciona la evolución de la tensión de fluencia plástica $\sigma_f(\alpha)$ con el parámetro de endurecimiento α (ver Figura 8-22).

Aunque dicha ley de endurecimiento puede ser mas general, es frecuente (y muchas veces suficiente) considerar una ley de endurecimiento *lineal* del tipo:

$$\sigma_f = \sigma_e + H' \alpha \Rightarrow \boxed{d\sigma_f(\alpha) = H' d\alpha} \quad (8.39)$$

donde H' recibe el nombre de *parámetro de endurecimiento*.

8.6.5 Módulo de deformación elastoplástico

El valor del módulo de deformación elastoplástico E^{ep} de la ecuación (8.38) puede calcularse como sigue. Considerando el régimen elastoplástico en carga plástica, de la ecuación (8.38):

NOTA

Se utiliza aquí la propiedad:

$$\frac{d|x|}{dx} = \text{sign}(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \\ dF(\sigma, \alpha) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8.40)$$

$$d|\sigma| - d\sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{sign}(\sigma) d\sigma - H' d\alpha = 0$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (8.39). Considerando ahora la ecuación (8.28) ($d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p$) y substituyendo en la ecuación (8.40):

$$\text{sign}(\sigma) d\sigma - H' \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p = 0 \Rightarrow \quad \boxed{d\varepsilon^p = \frac{1}{H'} d\sigma} \quad (8.41)$$

Considerando ahora la descomposición aditiva de la deformación (8.27) y la ecuación (8.41):

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon &= d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e &= \frac{1}{E} d\sigma \\ d\varepsilon^p &= \frac{1}{H'} d\sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{1}{H'} d\sigma = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right] d\sigma \Rightarrow \quad (8.42)$$

$$d\sigma = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{H'}} d\varepsilon \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} d\sigma &= E^{ep} d\varepsilon \\ E^{ep} &= E \frac{H'}{E + H'} \end{aligned}}$$

8.6.6 Curva tensión-deformación uniaxial

Con la ecuación constitutiva definida por las ecuaciones (8.36) a (8.38), podemos obtener la correspondiente curva tensión-deformación para un proceso uniaxial de carga-descarga-recarga (ver Figura 8-22) en el que podemos observar los siguientes tramos:

– Tramo $\boxed{0-1}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ Régimen elástico. De acuerdo con la ecuación (8.36), $d\sigma = E d\varepsilon$ y el comportamiento es elástico-lineal definiendo una rama elástica del diagrama tensión-deformación.

– Tramo $\boxed{1-2-4}$: $F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \left. \vphantom{F(\sigma, \alpha)} \right\} \Rightarrow$ Régimen elastoplástico

en carga plástica. De acuerdo con la ecuación (8.38), $d\sigma = E^{ep} d\varepsilon$ definiendo una rama elastoplástica.

– Tramo $\boxed{2-3-2}$: $F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) < 0 \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ Régimen elástico.

De acuerdo con la ecuación (8.36), $d\sigma = E d\epsilon$ y el comportamiento es elástico-lineal definiendo una rama elástica.

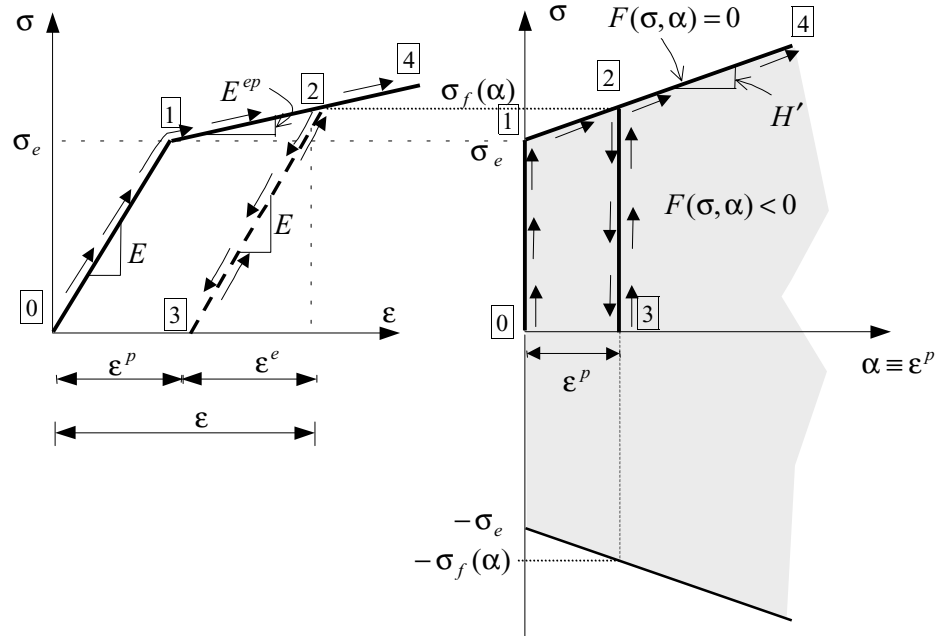


Figura 8-23 – Diagrama tensión-deformación uniaxial correspondiente a la teoría incremental de la plasticidad

Observación 8-12

En el punto [2] de la Figura 8-23 pueden diferenciarse los siguientes dos procesos:

$$\begin{cases} F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \rightarrow \text{Descarga elástica por la} \\ dF(\sigma, \alpha) < 0 \Rightarrow \\ \text{rama [2-3].} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \rightarrow \text{Carga plástica por la rama} \\ dF(\sigma, \alpha) = 0 \end{cases}$$

[2-4].

Observación 8-13

Nótese que sólo se genera deformación plástica durante el proceso de carga plástica sobre la rama elastoplástica (ver Figura 8-24).

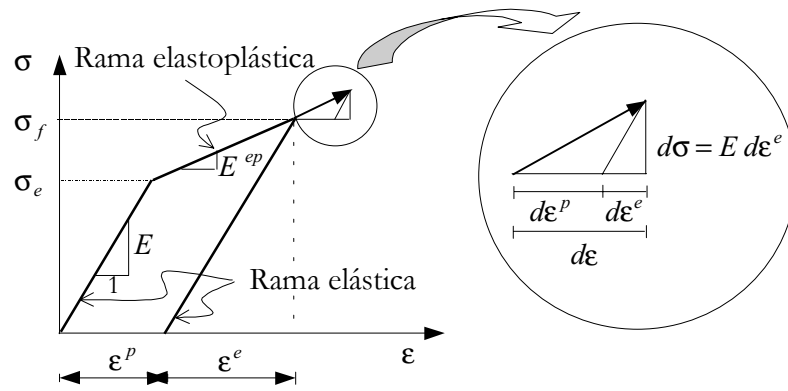


Figura 8-24. Generación de deformación plástica en la rama elastoplástica

Observación 8-14

Nótese la similitud del diagrama tensión deformación de la Figura 8-23 con el obtenido con el modelo reológico elástico-friccional con endurecimiento en el apartado 8.4.5 (Figura 8-17). La deformación de fricción ϵ^f en dicho modelo es equivalente a la deformación plástica ϵ^p en la teoría incremental de la plasticidad.

NOTA

El caso de plasticidad con ablandamiento por deformación presenta una problemática específica, respecto a la unicidad de la solución del problema elastoplástico, que queda fuera del alcance de este texto.

Observación 8-15

El parámetro de endurecimiento H' juega un papel fundamental en la definición de la pendiente E^{ep} de la rama elastoplástica. De acuerdo con la ecuación (8.42):

$$E^{ep} = E \frac{H'}{E + H'}$$

y, en función del valor de H' , pueden definirse las siguientes situaciones (ver Figura 8-25):

$H' > 0 \Rightarrow E^{ep} > 0 \rightarrow$ Plasticidad con endurecimiento por deformación. El caso límite $H' = \infty \Rightarrow E^{ep} = E$ recobra el comportamiento elástico lineal.

$H' = 0 \Rightarrow E^{ep} = 0 \rightarrow$ Plasticidad perfecta.

$H' < 0 \Rightarrow E^{ep} < 0 \rightarrow$ Plasticidad con ablandamiento por deformación. El caso límite se encuentra en $H' = -E \Rightarrow E^{ep} = -\infty$.

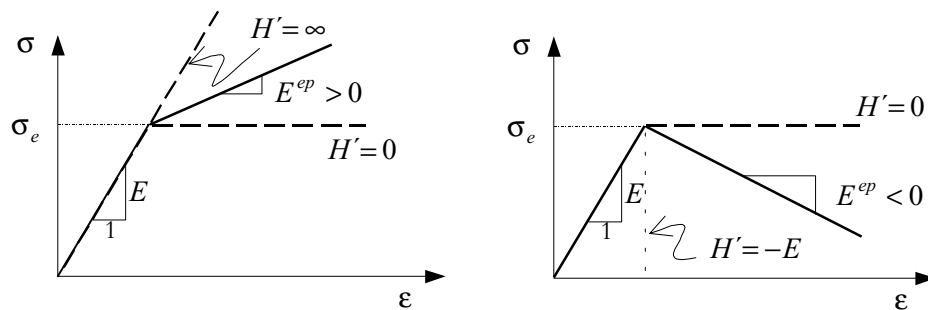


Figura 8-25

8.7 Plasticidad en tres dimensiones

La teoría incremental de la plasticidad, planteada en una dimensión en el apartado 8.6, puede generalizarse al caso de un estado tensional multiaxial (tres dimensiones) utilizando los mismos ingredientes, es decir:

1. *Descomposición aditiva de la deformación:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Descomposición aditiva} \\ \text{de la deformación} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} \end{cases}} \quad (8.43)$$

donde \mathbf{C}^{-1} es ahora el tensor de propiedades elásticas definido en el capítulo 6.

2. *Variable de endurecimiento α y regla de flujo* (ecuaciones de evolución):

$$\boxed{\text{Regla de flujo} \rightarrow \begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ d\alpha = \lambda \quad \alpha \in [0, \infty) \end{cases}} \quad (8.44)$$

donde λ recibe el nombre de *multiplicador plástico* y $G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ el de *función de potencial plástico*.

3. *Función de fluencia. Dominio elástico y superficie de fluencia.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Función de fluencia} \\ \text{plástica} \\ \text{Dominio elástico} \\ \text{Dominio elástico inicial} \\ \text{Superficie de fluencia} \\ \text{Espacio de tensiones} \\ \text{admisibles} \end{array} \rightarrow \begin{cases} F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_f(\alpha) \\ \sigma_f(\alpha) = \sigma_e + H' \alpha \text{ (ley de endurecimiento)} \\ \mathbb{E}_\sigma := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0\} \\ \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, 0) < 0\} \\ \partial\mathbb{E}_\sigma := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0\} \\ \bar{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial\mathbb{E}_\sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0\} \end{cases}} \quad (8.45)$$

donde $\phi(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$ recibe el nombre de *tensión uniaxial equivalente*, σ_e es el límite elástico obtenido en un ensayo uniaxial del material (una propiedad del mismo) y $\sigma_f(\alpha)$ es la tensión de fluencia. El parámetro de endurecimiento H' juega el mismo papel que en el caso uniaxial y determina la expansión o contracción del dominio elástico \mathbb{E}_σ , en el espacio de tensiones, a medida que crece α . En consecuencia:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet H' > 0 \Rightarrow \text{Expansión de } \mathbb{E}_\sigma \text{ con } \alpha \rightarrow \text{Plasticidad con endurecimiento} \\ \bullet H' < 0 \Rightarrow \text{Contracción de } \mathbb{E}_\sigma \text{ con } \alpha \rightarrow \text{Plasticidad con ablandamiento} \\ \bullet H' = 0 \Rightarrow \text{Dominio elástico constante } (\mathbb{E}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma^0) \rightarrow \text{Plasticidad perfecta} \end{array}} \quad (8.46)$$

4. *Condiciones de carga-descarga* (condiciones de Kuhn-Tucker) *y de consistencia*:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condiciones de} \\ \text{carga - descarga} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda \geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0 \quad ; \quad \lambda F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condición de} \\ \text{consistencia} \end{array} \right\} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$
(8.47)

Las condiciones de carga-descarga y de consistencia son un ingrediente adicional, respecto al caso uniaxial, que permiten obtener, tras alguna manipulación algebraica adicional, el multiplicador plástico λ en la ecuación (8.44).

8.7.1 Ecuación constitutiva

De forma similar al caso uniaxial, la ecuación constitutiva distingue entre las siguientes situaciones:

- *Régimen elástico*:

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow \boxed{d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : d\boldsymbol{\epsilon}}$$
(8.48)

- *Régimen elastoplástico en descarga*:

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbb{E}_\sigma \\ dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : d\boldsymbol{\epsilon}}$$
(8.49)

- *Régimen elastoplástico en carga plástica*:

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbb{E}_\sigma \\ dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : d\boldsymbol{\epsilon}}$$
(8.50)

donde \mathbf{C}^{ep} es el denominado *tensor constitutivo elastoplástico* que, tras algunas operaciones algebraicas teniendo en cuenta las ecuaciones (8.43) a (8.47), se escribe:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{H' + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \\ \mathbf{C}_{ijkl}^{ep} = \mathbf{C}_{ijkl} - \frac{\mathbf{C}_{ijpq} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} \mathbf{C}_{rskl}}{H' + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \mathbf{C}_{pqrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad i, j, k, l, p, q, r, s \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right\}$$
(8.51)

8.8 Superficies de fluencia. Criterios de fallo

Un ingrediente fundamental de la teoría de la plasticidad es la existencia de un dominio elástico inicial \mathbb{E}_σ^0 (ver Figura 8-26) que puede escribirse de la forma:

$$\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e < 0\} \tag{8.52}$$

y que determina un dominio en el espacio de tensiones delimitado por la superficie de fluencia inicial $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = 0\} \tag{8.53}$$

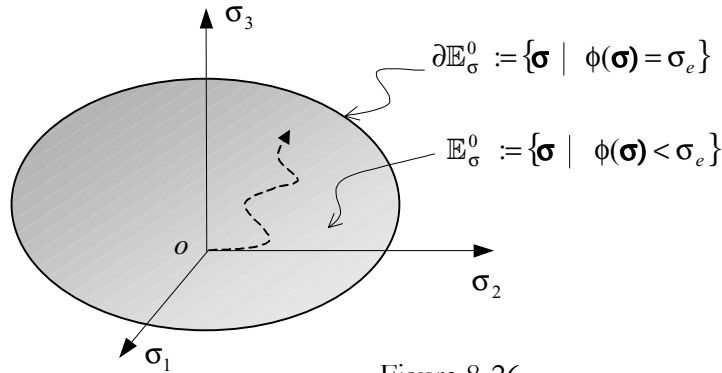


Figura 8-26

Puesto que el dominio elástico inicial contiene el origen del espacio de tensiones ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$), todo proceso de carga en cualquier punto del medio incluirá un régimen elástico (mientras la trayectoria de tensiones permanezca en el interior de \mathbb{E}_σ^0 , ver Figura 8-26) que terminará en el instante en que dicha trayectoria alcance la superficie de fluencia $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$. La superficie de fluencia inicial ejerce entonces un papel indicador del instante de *fallo* (entendido como fin del comportamiento elástico) independientemente del posible comportamiento post-fallo (comportamiento plástico) que se inicie más allá de dicho instante. De ahí la importancia de la superficie de fluencia inicial y el interés de formular las ecuaciones matemáticas que la determinan de forma adecuada para los distintos materiales de interés en la ingeniería.

NOTA

El hecho de que la superficie de fluencia, entendida como un ingrediente adicional de la ecuación constitutiva, sea independiente del sistema de referencia, caracteriza un comportamiento elastoplástico isotrópico.

Con el fin de hacer la superficie de fluencia independiente del sistema de referencia (material isotrópico), aunque se formule en el espacio de tensiones principales, su ecuación matemática suele plantearse en función de los invariantes tensionales:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv F(I_1, J'_2, J'_3) \tag{8.54}$$

y, puesto que se adopta el criterio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, su definición sólo afectará al primer sector del espacio de tensiones principales, extendiéndose automáticamente, por las condiciones de simetría (ver Observación 8-7), a los restantes sectores de la Figura 8-7.

8.8.1 Criterio de von Mises

En el criterio de von Mises se define la superficie de fluencia mediante:

$$\text{Criterio de Von Mises} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = \sqrt{3J'_2} - \sigma_e = 0 \tag{8.55}$$

donde $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J'_2}$ es la *tensión efectiva* (ver Observación (8.3)). Una expresión alternativa se obtiene considerando las ecuaciones (8.18) y (8.19) y substituyéndolas en la ecuación (8.55), obteniéndose:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} - \sigma_e = 0 \quad (8.56)$$

La representación gráfica de la superficie de fluencia de von Mises puede verse en la Figura 8-27.

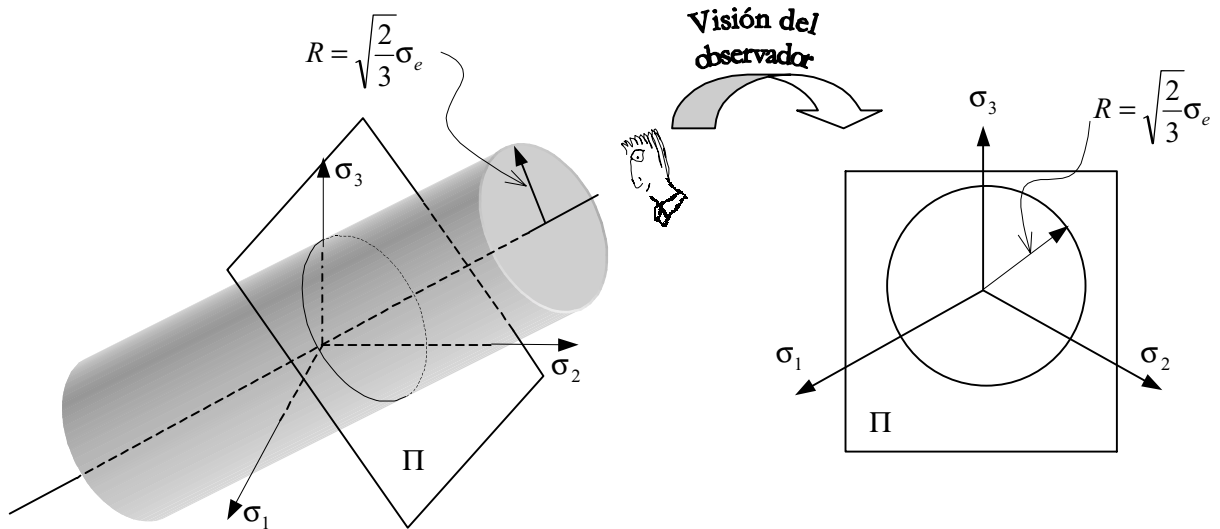


Figura 8-27 – Criterio de von Mises

Observación 8-16

La ecuación (8.55) pone de manifiesto la única dependencia de la superficie de fluencia de von Mises del segundo invariante del tensor de tensiones J'_2 . En consecuencia, todos los puntos de la superficie vendrán caracterizados por un mismo valor de J'_2 , lo que define un cilindro cuyo eje es el eje de tensión hidrostática.

Observación 8-17

El criterio de von Mises es adecuado como criterio de fallo o de rotura en metales, en los que, típicamente, estados de tensión hidrostática (tanto de tracción, como de compresión) tienen un comportamiento elástico y la rotura se produce debido a la presencia de componentes desviadoras de la tensión.

Ejemplo 8-2 – Obtener la expresión del criterio de von Mises para un caso de tensión uniaxial.

Resolución:

Para un caso de tensión uniaxial, caracterizado por el estado tensional:



$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta ser (ver Ejemplo 8-1) $\bar{\sigma} = |\sigma_u|$ y substituyen en la ecuación (8.55):

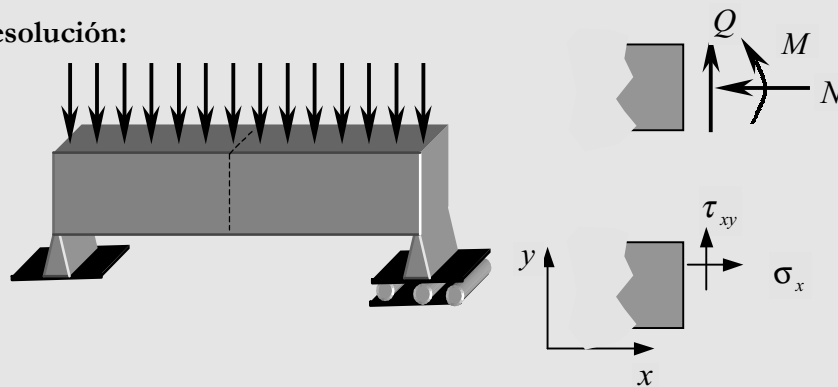
$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e$$

y el dominio elástico inicial queda caracterizado, de la misma forma que para el caso de plasticidad unidimensional del apartado 8.6.2 por la condición:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e$$

Ejemplo 8-3 – Obtener la expresión del criterio de von Mises par un estado tensional típico de flexión compuesta en vigas.

Resolución:



El estado tensional para un caso de flexión compuesta resulta ser:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_x \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_x \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\frac{1}{3} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \sigma_x^2 + \frac{1}{9} \sigma_x^2 + \frac{1}{9} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^2 \right) = \frac{1}{3} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J'_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \Rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \bar{\sigma} < \sigma_e \Rightarrow$$

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_e$$

donde la tensión de comparación $\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$, que puede entenderse como un escalar de comparación frente al límite elástico uniaxial σ_e , es frecuentemente utilizada en las normas de diseño de estructuras metálicas.

8.8.2 Criterio de Tresca o de la máxima tensión tangencial

El criterio de Tresca, se conoce también como *criterio de la máxima tensión cortante*, y establece que el dominio elástico finaliza, para un cierto punto del medio, cuando la máxima tensión tangencial actuante en cualquiera de los planos que pasan por el punto, $\tau_{\text{máx}}$, alcanza la mitad del límite elástico uniaxial σ_e :

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \quad (8.57)$$

En la Figura 8-28 se esquematiza la situación de fallo en términos de círculo de Mohr en tres dimensiones. En un proceso de carga en el que dicho círculo va creciendo desde el origen, el comportamiento elástico termina cuando el círculo de radio $\tau_{\text{máx}}$ se hace tangente a la recta $\tau = \tau_{\text{máx}} = \sigma_e/2$.

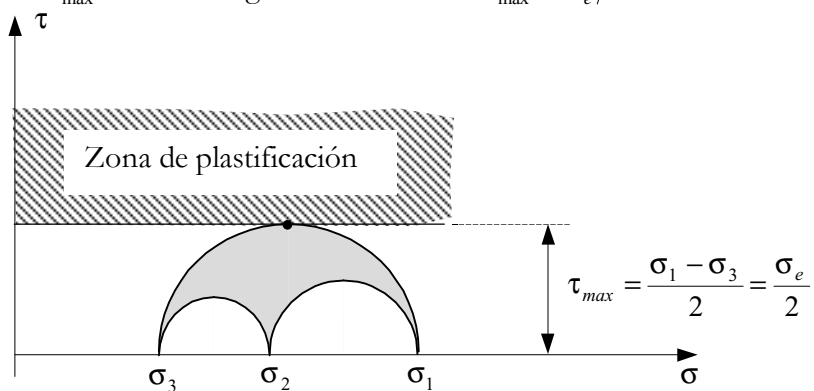


Figura 8-28

Es evidente que, a la vista de la ecuación (8.57), el criterio de Tresca puede escribirse como:

$$\text{Criterio de Tresca} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = 0 \quad (8.58)$$

Observación 8-18

Puede comprobarse que el criterio de Tresca se escribe de forma unívoca como una función de J_2' y J_3' y que no depende del primer invariante I_1 :

$$\text{Criterio de Tresca} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e \equiv \mathcal{F}(J_2', J_3')$$

En la Figura 8-29 se presenta la correspondiente superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales, que resulta ser un prisma hexaédrico con eje el eje de tensión hidrostática.

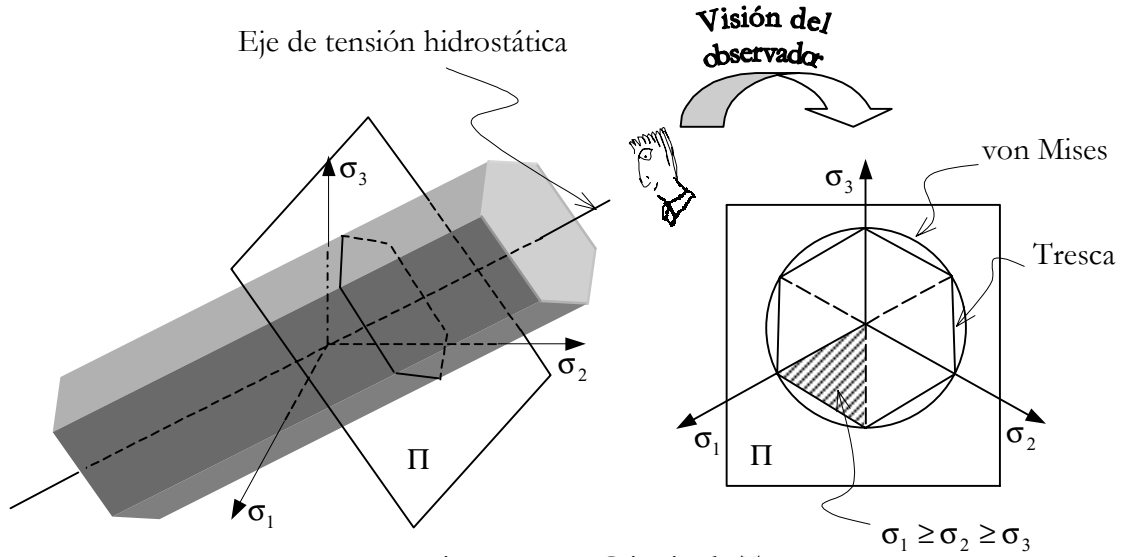


Figura 8-29 – Criterio de Tresca

Observación 8-19

Al no depender del primer invariante de tensiones (y por tanto de la tensión σ_{oct} , ver ecuación (8.16)), la superficie de fluencia del criterio de Tresca no depende de la distancia del origen al plano octaédrico que pasa por el punto (ver Observación 8-4), por lo que si un punto del espacio de tensiones, caracterizado por sus invariantes (I_1, J'_2, J'_3) , está sobre dicha superficie de fluencia, también lo estarán todos los puntos del espacio de tensiones con los mismos valores de (J'_2, J'_3) . Esta circunstancia cualifica a la superficie de fluencia como una superficie prismática cuyo eje es el eje de tensión hidrostática. Por otra parte, la dependencia de los dos invariantes (J'_2, J'_3) , impide que, como ocurre con el caso de la superficie de von Mises, se trate de una superficie cilíndrica. En definitiva, las condiciones de simetría establecen que la superficie del criterio de Tresca sea un prisma hexagonal inscrito en el cilindro de von Mises (ver Figura 8-29).

Ejemplo 8-4 – Obtener la expresión del criterio de Tresca para un caso de tensión uniaxial.

Resolución:

Para un caso de tensión uniaxial, caracterizado por el estado tensional:



$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma_u \geq 0 \quad & \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_u \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = \sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e \\
 \text{b) } \sigma_u < 0 \quad & \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_u \end{array} \right\} \Rightarrow F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = -\sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e
 \end{aligned}$$

y el dominio elástico inicial queda caracterizado, de la misma forma que para el caso de plasticidad unidimensional del apartado 8.6.2, por la condición:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e$$

Observación 8-20

El criterio de Tresca se utiliza para modelar el comportamiento de los metales de forma similar al caso del criterio de von Mises (ver Observación 8-17).

8.8.3 Criterio de Mohr-Coulomb

El criterio de Mohr-Coulomb puede considerarse una generalización del criterio de Tresca, en el que la máxima tensión tangencial resistida depende del propio estado tensional en el punto (ver Figura 8-30). La línea de fallo, en el espacio del círculo de Mohr, es una recta caracterizada por la cohesión c y el ángulo de rozamiento interno ϕ , considerados propiedades del material:

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (8.59)$$

El fin del comportamiento elástico (fallo) en un proceso de carga creciente, se produce cuando un primer punto del círculo de Mohr (correspondiente a un cierto plano) alcanza la mencionada línea de fallo.

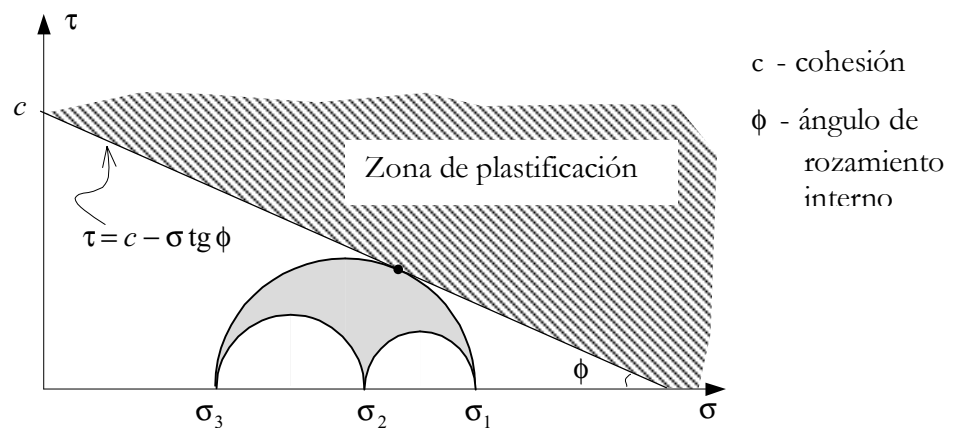


Figura 8-30 – Criterio de Mohr-Coulomb

La tensión tangencial en dicho plano, τ , será tanto menor cuanto mayor sea la tensión normal en el mismo σ y, en este caso, resulta evidente que el comportamiento de este modelo a tracción será muy distinto del comportamiento a compresión. Tal como se ve en la Figura 8-30, la línea de fallo corta al eje de las tensiones normales en el lado positivo de las mismas, limitando de esta manera la capacidad del material de resistir tracciones.

Para obtener la expresión matemática de la superficie de fluencia, consideremos un estado tensional para el cual se produce el inicio de la plastificación. En este caso, el círculo de Mohr definido por las tensiones principales mayor y menor, será tangente a la línea de fallo (ver Figura 8-31) en el punto A , verificándose:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tau_A = R \cos \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi \\ \sigma_A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + R \sin \phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \end{cases} \quad (8.60)$$

y substituyendo la ecuación (8.60) en la (8.59), se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_A = c - \sigma_A \operatorname{tg} \phi &\Rightarrow \tau_A + \sigma_A \operatorname{tg} \phi - c = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi + \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right] \operatorname{tg} \phi - c = 0 &\Rightarrow \quad (8.61) \\ \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \phi - 2c \cos \phi = 0 \end{aligned}$$

Criterio de Mohr - Coulomb	$\rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \phi - 2c \cos \phi = 0$	(8.62)
-------------------------------	--	--------

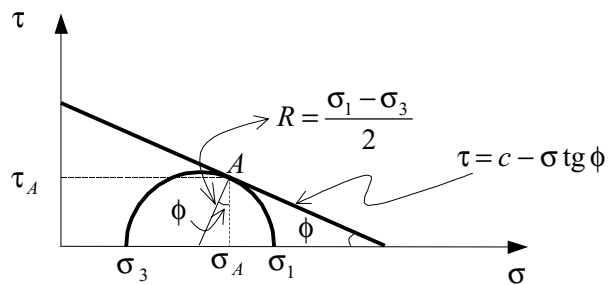


Figura 8-31

Observación 8-21

La ecuación $F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \phi - 2c \cos \phi = 0$ (lineal en σ_1, σ_3) define *un plano* el espacio de tensiones principales restringido al sector $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La extensión, por simetrización, a los otros seis sectores (ver Observación 8-7) define seis planos que constituyen una pirámide, de longitud indefinida, cuyo eje es el eje de presión hidrostática (ver la Figura 8-32). La distancia del vértice de la pirámide al origen del espacio de tensiones es $d = \sqrt{3} c \cot \phi$.

Observación 8-22

La particularización $\phi = 0$ y $c = \sigma_e / 2$ en el criterio de Mohr-Coulomb recobra el criterio de Tresca (ver ecuaciones (8.58) y (8.62)).

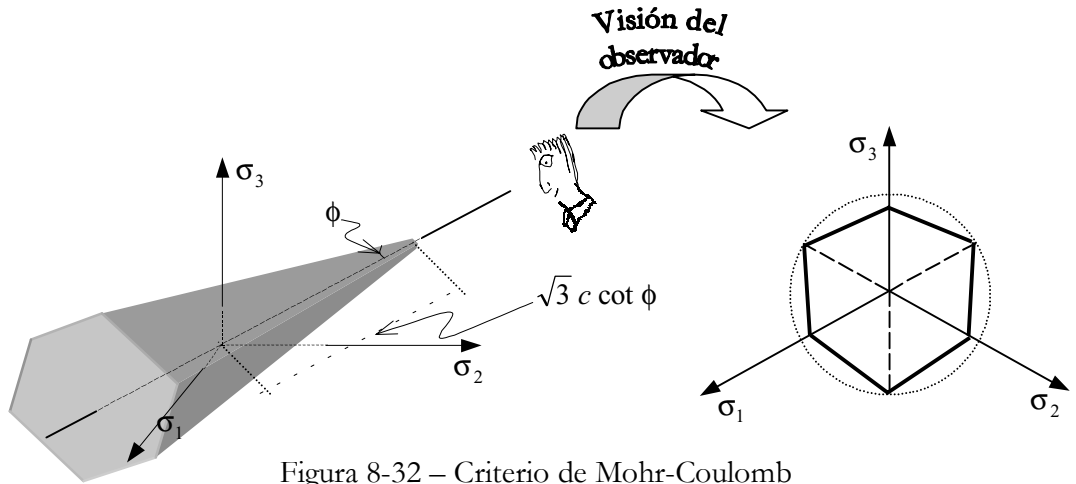


Figura 8-32 – Criterio de Mohr-Coulomb

Observación 8-23

En Mecánica de Suelos, el criterio de signos de las tensiones normales es el contrario que en Mecánica de Medios Continuos ($\sigma \equiv -\sigma$, ver capítulo 4) $\Rightarrow \sigma_1 \equiv -\sigma_3$ y $\Rightarrow \sigma_3 \equiv -\sigma_1$, por lo que el criterio de Mohr-Coulomb de la ecuación (8.62) se escribe:

$$F(\sigma) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \text{sen } \phi - 2c \text{cos } \phi$$

y las correspondientes representaciones gráficas se presentan en la Figura 8-33 y Figura 8-34.

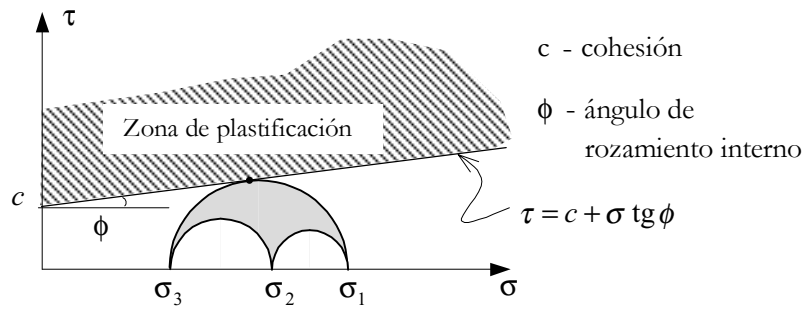


Figura 8-33

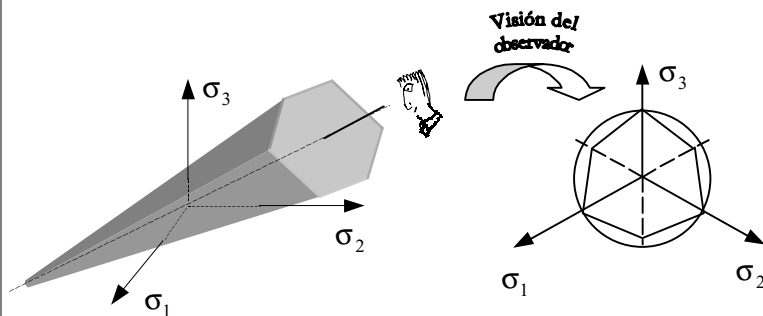


Figura 8-34 – Criterio de Mohr-Coulomb en Mecánica de suelos

Observación 8-24

Tras algunas operaciones algebraicas, el criterio de Mohr-Coulomb puede escribirse en función de los tres invariantes tensionales:

$$\begin{array}{l} \text{Criterio de} \\ \text{Mohr - Coulomb} \end{array} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \mathcal{F}(I_1, J_2', J_3')$$

Observación 8-25

El criterio de Mohr-Coulomb resulta especialmente adecuado para materiales friccionales (hormigón, rocas y suelos) caracterizados por exhibir sustanciales diferencias entre los límites elásticos uniaxiales a tracción y a compresión.

8.8.4 Criterio de Drucker-Prager

La superficie de fluencia que define el criterio de Drucker-Prager viene dada por la expresión:

$$\begin{array}{l} \text{Criterio de} \\ \text{Drucker - Prager} \end{array} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv 3\alpha\sigma_m + (J_2')^{1/2} - \beta = 0 \tag{8.63}$$

donde:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad ; \quad \beta = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \tag{8.64}$$

siendo c y ϕ , la cohesión y ángulo de rozamiento interno, respectivamente, que son considerados propiedades del material. Teniendo en cuenta las expresiones (8.16) ($\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \sigma_{oct}$) y (8.18) ($\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} [J_2']^{1/2}$), el criterio puede escribirse:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \alpha I_1 + (J_2')^{1/2} - \beta = 3\alpha\sigma_{oct} + \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{oct} - \beta = \mathcal{F}(I_1, J_2', \dots) = 0 \tag{8.65}$$

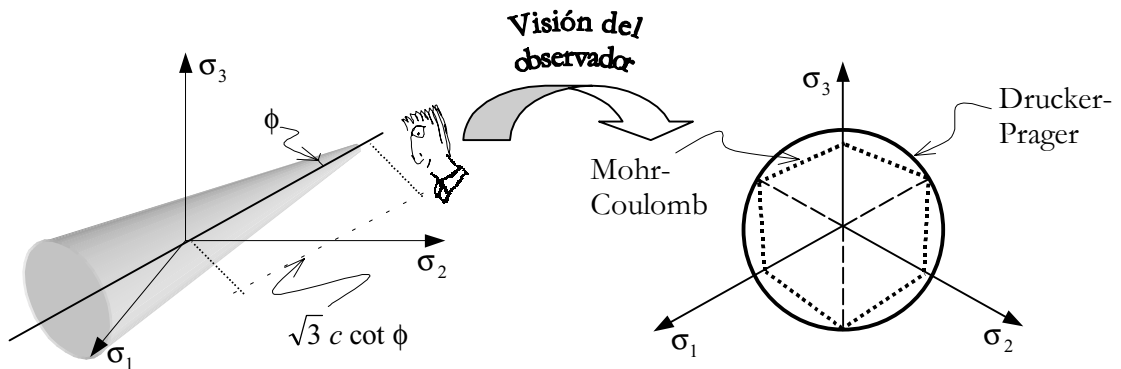


Figura 8-35 – Criterio de Drucker-Prager

Observación 8-26

La independencia del tercer invariante, J_3' , establece que si un determinado punto del espacio de tensiones está sobre la superficie de fluencia, todos los demás puntos con el mismo valor de los invariantes I_1, J_2' también estarán sobre aquella, independientemente del valor del tercer invariante J_3' . Puesto que valores constantes de dichos invariantes corresponden a puntos del plano octaédrico situados a la misma distancia del eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-6), puede concluirse que la superficie de fluencia será una superficie de revolución alrededor de dicho eje. Además, al ser lineal la relación entre σ_{oct} y τ_{oct} en la ecuación (8.65), se tratará de una superficie cónica cuyo eje es el eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-5 y Figura 8-35)). La distancia del vértice del cono al origen del espacio de tensiones resulta ser $d = \sqrt{3} c \cot \phi$. Puede comprobarse también que la superficie de Drucker-Prager tiene seminscrita una superficie de Mohr-Coulomb con los mismos valores de cohesión, c , y ángulo de rozamiento interno, ϕ .

Observación 8-27

La situación del vértice del cono de Drucker-Prager en el lado positivo del eje de tensión hidrostática establece una limitación del rango de comportamiento elástico para estados de tensión hidrostática de tracción (mientras que no hay limitación en el límite elástico para el caso de compresión hidrostática). Esta situación, que también se produce en el criterio de Mohr-Coulomb, es característica de las materiales cohesivos-friccionales (hormigón, rocas y suelos) para los que resultan especialmente adecuados ambos criterios.

Observación 8-28

En Mecánica del suelo, donde el criterio de signos para las tensiones normales se invierte, la superficie de fluencia de Drucker-Prager sería la indicada en la Figura 8-36:

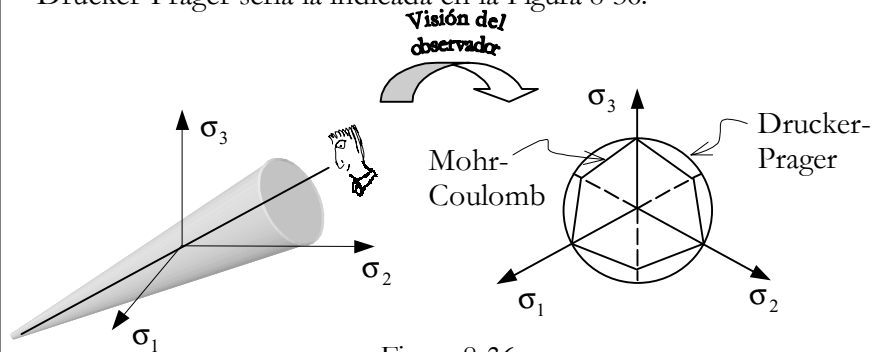


Figura 8-36

Observación 8-29

La particularización $\phi=0$ y $c=\sigma_e/2$ en el criterio de Drucker-Prager recobra el criterio de von Mises (ver ecuaciones (8.55), (8.63) y (8.64)).