

**Figura 3-30**

Extremo con saliente de sujeción redonda de una varilla de sección transversal rectangular. El esfuerzo de tensión máximo en la saliente ocurre en los puntos A y B. El área neta  $A = (w - d)t$  se usa en la definición de  $K_t$ , pero se obtienen beneficios si se utiliza el área total  $wt$ .

Una curva de ajuste por regresión de los datos de la tabla anterior en la forma  $K_t = a(d/w)^b$ , da el resultado  $a = \exp(0.204\ 521\ 2) = 1.227$ ,  $b = -0.935$  y  $r^2 = 0.9947$ . Así, se tiene que

$$K_t = 1.227 \left(\frac{d}{w}\right)^{-0.935} \tag{e}$$

que es monótona decreciente (y sin interés). Sin embargo, de la ecuación (d),

$$K'_t = \frac{1.227}{1 - d/w} \left(\frac{d}{w}\right)^{-0.935} \tag{f}$$

Si se forma otra tabla a partir de la ecuación (f), se tiene:

$d/w$	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$K'_t$	8.507	6.907	5.980	5.403	5.038	4.817	4.707	4.692	4.769	4.946

en la cual se presenta un mínimo de punto estacionario para  $K'_t$ , el cual se determina derivando la ecuación (f) con respecto a  $d/w$  e igualándola a cero:

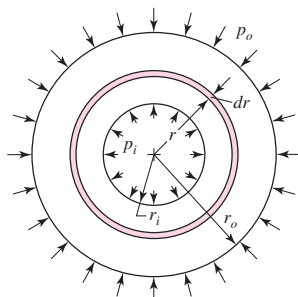
$$\frac{dK'_t}{d(d/w)} = \frac{(1 - d/w)ab(d/w)^{b-1} + a(d/w)^b}{[1 - (d/w)]^2} = 0$$

donde  $b = -0.935$ , a partir de lo cual se obtiene

$$\left(\frac{d}{w}\right)^* = \frac{b}{b - 1} = \frac{-0.935}{-0.935 - 1} = 0.483$$

con una  $K'_t$  correspondiente de 4.687. Se sabe que la sección  $w \times t$  permite que el diseñador especifique la saliente de sujeción más resistente y establezca un diámetro del pasador de  $0.483w$  (o, como regla básica, de la mitad del ancho). Los datos del  $K_t$  teórico en su forma original, o una gráfica basada en los datos que utiliza el área neta, no sugeriría esto. El punto de vista correcto tal vez sugiera aproximaciones.

### 3-14 Esfuerzos en cilindros presurizados



**Figura 3-31**

Cilindro sometido a presión interna y externa.

En los recipientes cilíndricos presurizados, cilindros hidráulicos, cañones de pistolas y tubos de conducción de fluidos a altas presiones se desarrollan esfuerzos radiales y tangenciales con magnitudes que dependen del radio del elemento bajo consideración. Al determinar el esfuerzo radial  $\sigma_r$  y el esfuerzo tangencial  $\sigma_t$ , se supone que la elongación longitudinal es constante alrededor de la circunferencia del cilindro. En otras palabras, una sección recta (plana) del cilindro permanece plana después de ser sometida a un esfuerzo.

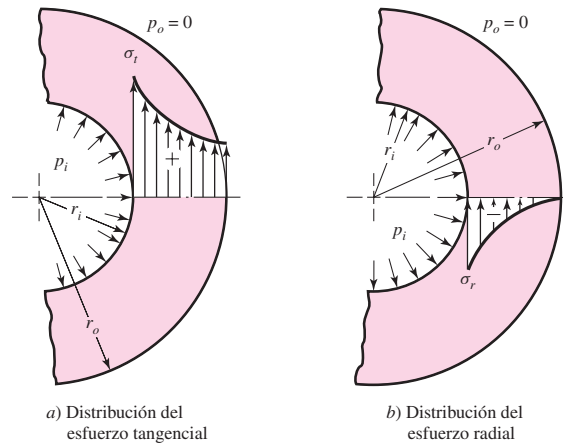
Con referencia a la figura 3-31, el radio interior del cilindro se designa como  $r_i$ , el radio exterior como  $r_o$ , la presión interna como  $p_i$  y la presión externa como  $p_o$ . Entonces se prueba que los esfuerzos tangencial y radial existen, y que sus magnitudes son<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2} \\ \sigma_r &= \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2} \end{aligned} \tag{3-49}$$

<sup>9</sup>Vea Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999, pp. 348-352.

**Figura 3-32**

Distribución de esfuerzos en un cilindro de pared gruesa sometido a presión interna.



Como es usual, los valores positivos indican tensión y los negativos compresión. El caso especial de  $p_o = 0$  da

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \\ \sigma_r &= \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \end{aligned} \tag{3-50}$$

En la figura 3-32 se grafica el par de ecuaciones (3-50) para mostrar la distribución de los esfuerzos en el espesor de la pared. Debe considerarse que existen esfuerzos longitudinales cuando el propio recipiente a presión toma las reacciones en los extremos debidas a la presión interna. Este esfuerzo resulta ser

$$\sigma_l = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{3-51}$$

Además, se hace notar que las ecuaciones (3-49), (3-50) y (3-51) sólo se aplican a secciones que se toman a distancias significativas desde los extremos y alejadas de cualquier área de concentración de esfuerzos.

**Recipientes de pared delgada**

Cuando el espesor de la pared de un recipiente cilíndrico a presión se acerca a un vigésimo de su radio o menos, el esfuerzo radial que resulta de la presurización del recipiente es muy pequeño comparado con el esfuerzo tangencial. Bajo estas condiciones, el esfuerzo tangencial se obtiene como sigue: sea  $p$  una presión interna ejercida sobre la pared de un cilindro de espesor  $t$  y con un diámetro interior  $d_i$ . La fuerza que tiende a separar dos mitades de una longitud unitaria del cilindro es  $p d_i$ . Dicha fuerza es resistida por el esfuerzo tangencial, también llamado *esfuerzo circunferencial*, que actúa de manera uniforme sobre el área esforzada. Entonces, se tiene  $p d_i = 2 t \sigma_t$ , o

$$(\sigma_t)_{\text{prom}} = \frac{p d_i}{2t} \tag{3-52}$$

Esta ecuación proporciona el esfuerzo tangencial *promedio* y es válida sin importar el espesor de la pared. Para un recipiente de pared delgada, una aproximación del esfuerzo tangencial mínimo es

$$(\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{p(d_i + t)}{2t} \tag{3-53}$$

donde  $d_i + t$  es el diámetro promedio.

En un cilindro cerrado, el esfuerzo longitudinal  $\sigma_l$  se produce debido a la presión sobre los extremos del recipiente. Si se supone que este esfuerzo también está uniformemente distribuido sobre el espesor de la pared, su valor se calcula con facilidad mediante

$$\sigma_l = \frac{pd_i}{4t} \quad (3-54)$$

**EJEMPLO 3-14**

Un recipiente a presión fabricado con una aleación de aluminio consiste de un tubo que tiene un diámetro exterior de 8 pulg y un espesor de pared de  $\frac{1}{4}$  pulg.

a) ¿Cuál es la presión que puede soportar el cilindro si el esfuerzo tangencial permisible es 12 kpsi y se supone que se cumple la teoría de los recipientes de pared delgada?

b) Con base en la presión determinada en el inciso a), calcule todas las componentes del esfuerzo mediante la teoría para cilindros de pared gruesa.

**Solución**

a) Aquí  $d_i = 8 - 2(0.25) = 7.5$  pulg,  $r_i = 7.5/2 = 3.75$  pulg y  $r_o = 8/2 = 4$  pulg. Entonces  $t/r_i = 0.25/3.75 = 0.067$ . En vista de que esta relación es mayor que  $\frac{1}{20}$ , la teoría para recipientes de pared delgada quizá no produzca resultados seguros.

Primero se resuelve la ecuación (3-53) para obtener la presión permisible. Ésta da

**Respuesta**

$$p = \frac{2t(\sigma_t)_{\text{máx}}}{d_i + t} = \frac{2(0.25)(12)(10)^3}{7.5 + 0.25} = 774 \text{ psi}$$

Luego, de la ecuación (3-54) se tiene que el esfuerzo longitudinal promedio es

$$\sigma_l = \frac{pd_i}{4t} = \frac{774(7.5)}{4(0.25)} = 5\,810 \text{ ps}$$

b) El esfuerzo tangencial máximo ocurrirá en el radio interior, por lo cual se usa  $r = r_i$  en la primera ecuación del par (3-50). De esto se obtiene:

**Respuesta**

$$(\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_o^2}{r_i^2} \right) = p_i \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = 774 \frac{4^2 + 3.75^2}{4^2 - 3.75^2} = 12\,000 \text{ psi}$$

El esfuerzo radial máximo se determina de manera similar, por medio de la segunda ecuación (3-50), y es

**Respuesta**

$$\sigma_r = -p_i = -774 \text{ psi}$$

La ecuación (3-51) proporciona el esfuerzo longitudinal como

**Respuesta**

$$\sigma_l = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{774(3.75)^2}{4^2 - 3.75^2} = 5\,620 \text{ psi}$$

Estos tres esfuerzos,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_l$ , son esfuerzos principales, puesto que en estas superficies no hay cortante. Note que no hay una diferencia significativa entre los esfuerzos tangenciales de los incisos a) y b), por lo cual la teoría para recipientes de pared delgada se puede considerar satisfactoria.