

FI UNCuyo Arquitectura	Estadística Problemas adicionales y resolución	2023
---------------------------	---	-------------

Unidad II: Probabilidad

El secretario de acción social del gobierno se encuentra preparando la presentación de su presupuesto anual al congreso para que este órgano le dé su aprobación y especula con respecto a las probabilidades de obtenerla en forma completa o parcial. Observando los informes de los últimos veinte años ha establecido que las probabilidades de obtener la aprobación de entre 50 y 74 % son el doble de las posibilidades de obtener entre 75 y 99 % y dos veces y media la probabilidad de obtener entre 25 y 49 %. Además ha observado que nunca se ha aprobado menos de 25% y sólo una vez se ha aprobado el 100%. El secretario no espera observar cambios en este patrón. ¿Cuál es la probabilidad de que se apruebe el presupuesto en los rangos de porcentajes indicados?

Definición de eventos y asignación de probabilidades

A: “aprobación de entre 50 y 74% del presupuesto solicitado”

B: “aprobación de entre 75 y 99% del presupuesto solicitado”

C: “aprobación de entre 25 y 49% del presupuesto solicitado”

D: “aprobación de menos del 25% del presupuesto solicitado”

E: “aprobación del 100% del presupuesto solicitado”

De acuerdo a la experiencia del secretario:

$$P(A) = 2 \cdot P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}P(A)$$

$$P(A) = 2,5 \cdot P(C) \rightarrow P(C) = \frac{2}{5}P(A)$$

$$P(D) = 0$$

$$P(E) = \frac{1}{20}$$

Resolución

El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los casos posibles de aprobación. Es decir:

$$\Omega = (A \cup B \cup C \cup D \cup E)$$

Todos estos sucesos son mutuamente excluyentes ya que el presupuesto se aprueba por año de una única manera: A o B o C o D o E

Calcularemos la probabilidad sobre la expresión anterior, por lo que lo hacemos a ambos lados de la igualdad

Estadística

Problemas adicionales y resolución

$$P(\Omega) = P(A \cup B \cup C \cup D \cup E)$$

Recordemos que

$$P(\Omega) = 1 \text{ por axioma de probabilidad}$$

y que en el miembro derecho tenemos la probabilidad para la unión de eventos mutuamente excluyentes, por lo que la regla de la suma nos dice

$$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E)$$

Reemplazando en esta expresión por las relaciones obtenidas entre las probabilidades de los eventos obtenemos una nueva expresión en función de P(A):

$$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E)$$

$$1 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) + \frac{2}{5}P(A) + 0 + \frac{1}{20}$$

Sacando factor común y reordenando:

$$\frac{19}{20} = \frac{19}{10}P(A)$$

Despejando P(A):

$$\frac{1}{2} = P(A)$$

A partir de este resultado podemos obtener las restantes reemplazando en las relaciones dadas:

$$P(A) = 2 \cdot P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = 2,5 \cdot P(C) \rightarrow P(C) = \frac{2}{5}P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, expresando en porcentajes:

- P(A) = 50%. **Se lee:** “La probabilidad de obtener la aprobación de entre 50 y 74% del presupuesto solicitado es 50%”
- P(B) = 25%. **Se lee:** “La probabilidad de obtener la aprobación de entre 75 y 99% del presupuesto solicitado es 25%”
- P(C) = 20%. **Se lee:** “La probabilidad de obtener la aprobación de entre 25 y 49% del presupuesto solicitado es 20%”
- P(D) = 0%. **Se lee:** “La probabilidad de obtener la aprobación de menos del 25% del presupuesto solicitado es 0%”
- P(E) = 5%. **Se lee:** “La probabilidad de obtener la aprobación del 100% del presupuesto solicitado es 5%”

Notar que la suma de las probabilidades da 1, que es lo correcto ya que hemos sumado las probabilidades sobre todos los eventos posibles del espacio muestral.

Estadística

Problemas adicionales y resolución

Una corporación que fabrica computadoras personales desea mejorar la resistencia con respecto a las fallas en la unidad de disco y la memoria RAM. En la actualidad el diseño es tal que las fallas de la unidad de disco ocurren un tercio de las veces que la falla de la memoria. La probabilidad de que se presente una falla conjunta en la unidad de disco y en la memoria es de 0,05.

- a) Si el modelo tiene una probabilidad de resistir de 0,80 a fallas del disco y/o memoria, ¿qué tan baja debe ser la probabilidad de que se presente una falla en la unidad de disco?
- b) Si la memoria se mejoró de tal modo que sólo falla el doble de veces que la unidad de disco (y la probabilidad de falla conjunta sigue siendo la misma) ¿la probabilidad de falla en el disco del inciso a) producirá una resistencia a fallas en el disco y/o memoria mayor o menor que 0,80?

Datos, eventos y probabilidades

D: "Fallas en la unidad de disco"

M: "Fallas en la unidad de memoria"

$D \cap M$: "Fallas conjuntas (en la unidad de disco y de memoria)"

$$P(D) = \frac{1}{3}P(M) \rightarrow P(M) = 3 \cdot P(D)$$

$$P(D \cap M) = 0,05$$

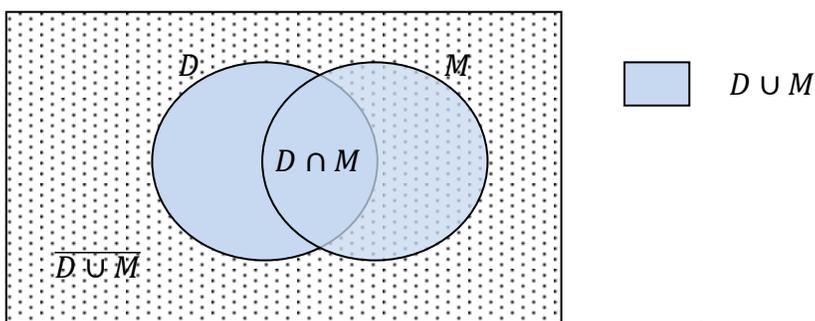
Resolución

- a) Utilizando la notación de complemento de un evento para indicar su opuesto

$(\overline{D \cup M})$: "Resistencia a las fallas en el disco y/o memoria (es decir, en uno u otro o en ambos)"

$$P(\overline{D \cup M}) = 0,80$$

Representando gráficamente nuestro espacio muestral vemos que:



La unión de los eventos M y D representa alguna o ambas fallas mientras que todo lo que está fuera de ellos representa lo opuesto, la resistencia a fallas en uno de los componentes o en ambos.

De aquí:

$$P(D \cup M) = 0,20$$

Estadística

Problemas adicionales y resolución

Aplicando la regla de la suma para la unión de eventos no mutuamente excluyentes:

$$P(D \cup M) = P(D) + P(M) - P(D \cap M)$$

Reemplazando en esta expresión las relaciones y valores de probabilidad establecidos tenemos:

$$\begin{aligned} 0,20 &= P(D) + 3 \cdot P(D) - 0,05 \\ 0,25 &= 4 \cdot P(D) \\ 0,0625 &= P(D) \end{aligned}$$

Respuesta: la probabilidad de que se presente una falla en la unidad de disco es 6,25%

b) De acuerdo a los datos

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{1}{2}P(M) \rightarrow P(M) = 2 \cdot P(D) \\ P(D \cap M) &= 0,05 \end{aligned}$$

Se desea saber si

$$P(\overline{D \cup M}) > 0,90$$

Entonces:

$$P(D \cup M) = P(D) + P(M) - P(D \cap M)$$

la cual usaremos con los nuevos datos

$$\begin{aligned} P(D \cup M) &= P(D) + 2 \cdot P(D) - 0,05 \\ P(D \cup M) &= 3 \cdot P(D) - 0,05 \\ P(D \cup M) &= 3 \cdot 0,0625 - 0,05 \\ P(D \cup M) &= 0,1375 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(\overline{D \cup M}) &= 1 - P(D \cup M) = 1 - 0,1375 \\ P(\overline{D \cup M}) &= 0,8625 > 0,80 \end{aligned}$$

Respuesta: la probabilidad de falla en el disco del inciso (a) producirá una resistencia a fallas en el disco y/o memoria mayor a 0,80