UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA

GUÍA DE TRABAJOS PRACTICOS

Prof. Titular: NARVÁEZ, Ana María
Prof. Asociado: VEGA, Noemí
Prof. Adjunto: TOMAZELLI, Gabriela
Prof. Adjunto: NODARO, Verónica
JTP: RUEDA. Analía
JTP: PANELLA, Eugenia
JTP: BERNALDO DE QUIRÓS, Carolina
JTP: FERRARO, Enzo
JTP: OJEDA; Juan Pablo

2024

NOTA PARA EL ESTUDIANTE

En esta guía de trabajos prácticos encontrará una PARTE A y una PARTE B.

La PARTE A se desarrollará durante las clases presenciales junto al docente. La PARTE B corresponde a actividades autónomas que tienen el objetivo de reforzar los saberes vistos en clase.

Al finalizar cada PARTE B, encontrará una grilla de autoevaluación cuya finalidad es que pueda escribir sus dudas.

Al avanzar en los contenidos de esta asignatura, encontrará autoevaluaciones integradoras que le permitirán poner a prueba sus conocimientos y verificar la consolidación de saberes.

TRABAJO PRÁCTICO N° 1: LÓGICA

PARTE A

1) Escriba en forma simbólica los siguientes enunciados:

a) Está lloviendo y está nublado
b) Está lluvioso o está seco
c) El número cuatro es par ya que es divisible por dos.
d) Serás buen jugador si y sólo si eres disciplinado.
e) El número dos es par pero el número tres es impar
f) Se llama isósceles siempre que tenga dos lados iguales.
g) Es falso que le juez sea fiscal y escribano.
h) Al papá de Susana le falta carácter y determinación o no sabe lo que debe hacer

2) Confeccione tabla de verdad de las siguientes proposiciones lógicas e indique si se trata de una Tautología, Contradicción o Contingencia.

a) $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \vee \sim q$
b) $\sim (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim p)$
c) $[\sim p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$
d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
e) $\{(p \Rightarrow q) \wedge [q \Rightarrow (r \wedge \sim s)]\} \Rightarrow [p \Rightarrow (r \vee s)]$
f) $p \Rightarrow \sim(q \quad \sim p)$

3) Escriba el valor de verdad de las proposiciones simples que correspondan según el valor de verdad de la proposición compuesta dada.

PROPOSICIÓN	Valor de verdad de p	Valor de verdad de q	Valor de verdad de r
$(q \wedge \sim r) \Rightarrow p$ es falsa			
r ⇒ (q ∨ p) ∧ r es falsa			
$[(q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow r$ es verdadera			*V*

4) Simplifique las siguientes proposiciones lógicas y realice el circuito lógico original y de la forma simplificada del inciso a y b.

a) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$
b) $[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
c) $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p)] \wedge \sim (p \wedge q)$
d) $\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \sim r]\} \vee (\sim p \wedge q)$
e) $(\sim p \wedge q) \wedge (p \,\Delta \sim q)$

5) Dados los siguientes enunciados verdaderos, exprese su enunciado contrarrecíproco.

a) Si una figura geométrica es un cuadrilátero entonces no es un triángulo.
b) Si un número par es natural entonces es un número real.

6) Complete las siguientes proposiciones:

a) La negación de $\exists x / [Q(x) \vee P(x) \Rightarrow (R(x) \vee \sim P(x))]$ es ……………………………………………………………………….
b) La negación de $\forall x: \sim[\sim P(x) \wedge \sim Q(x) \Rightarrow \sim R(x)]$ es ……………………………………………………………………………
c) La negación de $\exists x / [P(x) \Leftrightarrow R(x)]$ es ……………………………………………………………………………………………

PARTE B

1) Escribe proposiciones compuestas que representen en forma coloquial :

a) Una disyunción.
b) Una conjunción.
c) Una implicación.
d) Una doble implicación.
e) Una disyunción, con una implicación.
f) Una negación, una conjunción y una implicación.

2) Confeccionar las tablas de verdad de:

a) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \Rightarrow \sim q)]$
c) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

3) Probar que las tres proposiciones son equivalentes:

a) $p \Rightarrow (q \vee r)$
b) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$
c) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

4) Simplifique e indique la proposición equivalente a la dada:

$[p \wedge (r \vee \sim q)] \vee (q \wedge \sim r)$

☐ $p \vee (\sim r \vee q)$ ☐ $p \vee (\sim r \wedge q)$ ☐ $p \vee r \wedge \sim q$ ☐ NRC

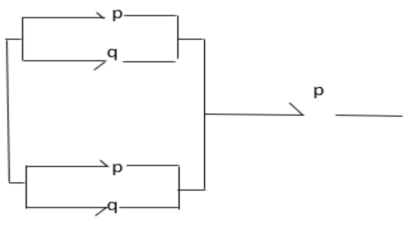
$\{p \wedge [q \wedge (p \wedge \sim q)]\} \vee [(p \wedge q) \vee \sim p]$

☐ $p \wedge \sim q$ ☐ p ☐ $\sim p \vee q$ ☐ NRC

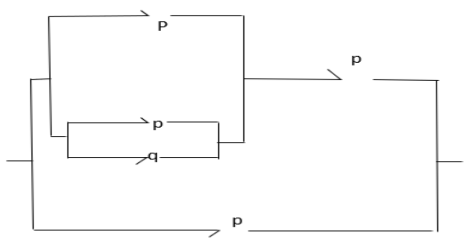
5) Busque e investigue teoremas, propiedades o leyes matemáticas en donde se presenten implicaciones o doble implicaciones de manera que pueda identificar condiciones suficientes y condiciones necesarias. Transforme las proposiciones a lenguaje simbólico.

6) Dado los siguientes circuitos lógicos, exprese la proposición lógica equivalente en forma simbólica, suponiendo que la misma está sólo en función de dos proposiciones simples p y q:

a)



b)



7) Exprese las siguientes funciones proposicionales y niéguelas:

a) Hay números reales que son pares
b) Todas las leyes lógicas son tautologías.

Autoevaluación Trabajo Práctico N°1-Parte B

Ejercicio	*Resolución*			*Comentarios*
	Correcta	*Incorrecta*	*Dudosa*	
1a				
1b				
1c				
1d				
1e				
1f				
2 a				
2b				
2c				
3 a				
3b				
3c				
4 a				
4b				
5				
6 a				
6b				
7a				
7b				

TRABAJO PRÁCTICO N° 2: MATRICES

PARTE A

1) Determine la matriz e identifíquela, si es posible, según las condiciones de sus elementos dadas en forma simbólica:

a) $D_{3x3} = [d_{ij}]$, donde $\begin{cases} d_{ij} = 0 & si \quad i \leq j \\ d_{ij} = \frac{1}{2} & si \quad i > j \end{cases}$

b) $M_{3x3} = [m_{ij}]$, donde $\begin{cases} m_{ij} = i\,.j & si \quad i > j \\ m_{ij} = i^2 + j^2 & si \quad i = j \\ m_{ij} = 2i^2 - j & si \quad i < j \end{cases}$

c) $T_{4x2} = [t_{ij}]$, donde $\begin{cases} t_{ij} = i + j & si \quad i = j \\ t_{ij} = 2i - j & si \quad i \neq j \end{cases}$

2) Realice las operaciones que sean posibles con las matrices dadas a continuación. Identifique cuál de ellas son combinaciones lineales (puede usar https://matrixcalc.org/es/ para la verificación de algunos cálculos:

$A = \begin{bmatrix} -1 & -.2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1/2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, matriz D,M y T del ejercicio anterior.

a) A +2M
b) B.C
c) C.B
d) (A.C)-C
e) $2.(B - C^t)$
f) $-1/2.C + (3B)^t$
g) $D^2 + M$
h) $(2.I_{3x3} - A)^t + ½ .D$
i) $[4.(½ .A - 1/8.I_{3x3}).M]^t$
j) $-1.[(M.D)^t - 2.A]$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, de ser posible, para obtener la expresión de la matriz X. Aplique propiedades. Todas las matrices son cuadradas, del mismo orden e invertibles.

a) A.B.X.C.D = A.D
b) $[2.(A.X^{-1}) + B^{-1}] = -3B$
c) $(-2X + 2A)^t - 3B^{-1} = B^{-1}$
d) $[(-3X)^{-1} + 2.(ABC)^{-1}]^t = [C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}]^t$
e) $(A^t.X)^t - 2X^t.A + 3(A.B)^{-1} = 1/2.B^{-1}.A^{-1}$
f) $(X.\ B^{-1})^{-1} = (A^{-1}.\ B^2)^{-1}.\ A$

4) Indique cuáles de las siguientes matrices son elementales e indique la operación elemental realizada:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5) Encuentre la matriz elemental E tal que E.A = B o A.E = B. Verifique si la E propuesta es la correcta, realizando el producto con las herramientas digitales propuestas anteriormente. Indique la operación elemental que define a la matriz E.

Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

a) $E.A = B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $E.A = B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -17 \end{bmatrix}$ c) $E.A = B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

d) $E.A = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e) $E.A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ f) $A.E = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$

6) Determine qué matrices están en forma escalonada, en forma escalonada reducida o ninguna de ellas e indique el rango de aquellas que están en forma escalonada, o escalonada reducida:

a) Matrices del ej. 4   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) Escalone y reduzca las matrices del ejercicio 4 (A,B,C) y las matrices A de los incisos a) y b) del ejercicio 5.

8) Encuentre los valores de los parámetros, necesarios para que las matrices tengan rango igual a su orden o menor

$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9) Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $C= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10) Dada la matriz $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$, calcule las siguientes operaciones:

$a)\ \frac{1}{3}.(A^t)^{-1}$ $b)\ [(2.A)^2]^{-1}$ $c)\ (A.A^t)^{-1}$

11) Sea S = $\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \right\}$ incluido en el espacio vectorial de las matrices R^{2x2} con las operaciones usuales.

a) Determine si S es LI o LD.
b) ¿Qué espacio genera S?
c) ¿Es posible completar S de manera que sea (o siga siendo) LI? En caso afirmativo, indique el espacio generado.

12) Demuestre:

a) Si A y B son matrices inversibles de orden nxn, entonces A.B es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Si A es una matriz inversible de orden nxn y k un escalar real no nulo, kA es inversible y $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

c) Si A es una matriz de nxn, entonces $A+A^t$ es una matriz simétrica.

<u>Ejercicio de aplicación (resuelto)</u>:

Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea M la matriz de ventas de enero:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

a) Interpretar la matriz M, explicando cómo han sido las ventas.

La matriz M representa las ventas de enero, donde cada columna representa a los 3 artículos producidos por la fábrica y cada fila a un cliente distinto. Así tenemos:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

De acuerdo a esto interpretamos que, durante el mes de enero, el cliente C1 compró 9 artículos del primer tipo, 5 del segundo y 2 del tercero. El segundo cliente compró 3 artículos del primer tipo, 8 del segundo y ninguno del tercero. Observamos que el tercer cliente, durante el mes de enero, no compró ningún artículo y el cuarto cliente compró 6 artículos del primer tipo, 7 del segundo y 1 del tercero.

b) Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero.

Siguiendo el mismo criterio anterior, para armar la matriz B correspondiente a las ventas del mes de febrero. Es decir, la primera columna de B representa a la cantidad de artículos del primer tipo, la segunda columna, cantidad de artículos del segundo tipo y tercera columna, cantidad de artículos del tercer tipo. Mientras que cada fila corresponde a un cliente distinto: C_1, C_2, C_3 y C_4. Así, obtenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero.

Para hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero, debemos sumar las ventas del mes de enero y las ventas del mes de febrero, es decir debemos hallar M + B:

$$M + B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Hallar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

Para determinar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero, debemos hallar B – M:

$$B - M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto indica que el primer cliente, en el mes de febrero, compró 4 artículos del primer tipo menos que en el mes de enero, tres artículos menos del segundo tipo y un artículo más del tercer tipo. El segundo cliente, en el mes de febrero, compró tres artículos más del primer tipo que en el mes de enero, dos artículos menos del segundo tipo y seis más del tercer tipo. El tercer cliente, compró artículos más del primer tipo en febrero respecto a enero y no compró en ninguno de estos meses artículos del segundo y tercer tipo. El cuarto cliente, en febrero respecto a enero, compró 6 artículos menos del primer tipo, 7 menos del segundo tipo y uno menos del tercer tipo.

e) ¿Cuál sería la matriz de ventas del mes que la fábrica se toma vacaciones?

En el mes que la fábrica se toma vacaciones, no se producen ventas y en consecuencia la matriz que representa las ventas durante el mes de vacaciones, es la matriz nula:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f) Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo. ¿Cuál habrá sido el total de ventas en el primer cuatrimestre?

Para responder a esta última pregunta, debemos determinar, en primer lugar, las matrices C y D que representan las ventas de los meses de marzo y abril, respectivamente:

$$C = 2M = 2.\begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} =. \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = 4.C = 4.\begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} =. \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

Luego el total de ventas del cuatrimestre, lo obtenemos resolviendo:

$$\mathrm{M + B + C + D} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Total de ventas</u> = $\begin{bmatrix} 104 & 57 & 25 \\ 39 & 94 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 66 & 77 & 11 \end{bmatrix}$

PARTE B

1) Enuncie en forma simbólica, las condiciones que deben cumplir los elementos de una matriz de orden 4x4 para ser diagonal, escalar y antisimétrica.

2) Defina una operación matricial que represente una combinación lineal de matrices y otra operación matricial que no sea una combinación lineal.

3) Indique las matrices elementales por las que se tuvo que premultiplicar a $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ para obtener a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Una vez que encontró las matrices elementales postmultiplique a A por esas mismas matrices e indique el resultado hallado.

4) Encuentre un ejemplo de matrices cuadradas y rectangulares:

a) Escalonadas no reducidas.
b) Escalonadas reducidas.
c) No escalonadas.

5) Explique y justifique por simple inspección, a partir de la definición de inversa y sus propiedades, por qué las siguientes matrices no son inversibles.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 8\\ 5 & -10 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

6) Calcule la inversa si es posible de las siguientes matrices y corrobore con un software.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

7) Aplique propiedades de manera tal de colocar la operación en función de la inversa de A y B y en su forma más simplificada, sabiendo que A y B son del mismo orden e inversibles.

$a)\ \ [(2.A.B^t)^t]^{-1}$ $\qquad b)\ [(A^{-1}.B+B).B^{-1}]^t$ $\qquad c)\ \ [(B.A^2)^{-1}].B$

8) Demuestre:

a) Si A es una matriz de orden nxn inversible y k es un entero positivo, entonces A^k es inversible y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

b) Si A es una matriz inversible de orden nxn, entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

c) Si A es una matriz de mxn, $A.A^t$ es simétrica.

9) Modelice el problema a partir de lenguaje matricial:

Un fabricante de aspas de aerogeneradores o molinos de viento requiere como materiales para la obtención de cada una de las tres aspas (también llamadas palas) de un molino, 0,9 kg de epoxy, 62,2 kg de fibra de vidrio, 4,6 kg de fibra de carbono y 7,2 kg de núcleo de espuma o madera de balsa.

a) Coloque la información precedente ordenándola en una matriz conveniente a la que se denominará matriz de materiales, denotada como M.

b) Investigue los costos actuales del kilogramo de cada uno de los materiales y ordénalos en una matriz conveniente que se denominará matriz de costos, denotada como C.

c) ¿De qué modo relacionaría la información anterior, ordenada en las matrices M y C, para obtener el costo total de un aspa? Obtenga el resultado.

d) El mismo fabricante presenta un "modelo alternativo de aspas" con características similares a la anterior pero construido con 1 kg de epoxy, 70,8 kg de fibra de vidrio, 12,7 kg de fibra de carbono y 7,2 kg de núcleo de espuma. Obtenga el costo de las aspas de un molino usando matrices.

e) Una industria "B" fabrica aspas de molinos de viento utilizando compuestos de madera como madera-epoxy, para lo cual se necesita 0.75kg de este material para la obtención de un aspa (considera el precio del epoxy, ya que el costo de la madera es despreciable). El resto de los materiales, son los mismos que el primer fabricante. Obtenga el costo de un aspa considerando el uso de madera-epoxy.

f) Teniendo en cuenta los tres modelos de aspas posibles, escriba una matriz A con la información obtenida, ordenada de tal modo que al realizar el producto de las matrices A y C el resultado sea una matriz B de orden 3x1 donde se lea el valor de un aspa de un molino según los modelos propuestos por los fabricantes.

Autoevaluación Trabajo Práctico N°2-Parte B

Ejercicio	Resolución			Comentarios
	Correcta	Incorrecta	Dudosa	
1				
2				
3				
4a				
4b				
4c				
5 a				
5b				
5c				
6 a				
6b				
7 a				
7 b				
7 c				
8 a				
8 b				
8 c				
9 a				
9 b				
9c				
9d				
9e				
9f				

TRABAJO PRÁCTICO N°3: DETERMINANTES

PARTE A

1) Dados los siguientes productos elementales, complete los subíndices faltantes, determine su signo, indique el orden de la matriz de la cual se obtuvieron y la cantidad total de productos elementales que tiene dicha matriz.

a) $a_{32}.\ a_{43}.a_{51}.\ a_{24}.a_{....}$ b) $a_{24}.a_{13}.\ a_{......}.a_{42}$

2) Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique indicando el nombre de la propiedad aplicada.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1/2 & 3 \\ 8 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} -1 & -1/2 & 2 & 3/2 \\ 3 & -1 & 15 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $d)$ $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ -9 & -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} =$ $e)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

3) Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ y det(A) = -3. Calcule el valor de los determinantes de las siguientes matrices:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 2a_4 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 2b_4 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & 2c_4 \\ 2d_1 & 2d_2 & 2d_3 & 2d_4 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & 3d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 3b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 3c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 3a_4 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 3d_1 & 3d_2 & 3d_3 & 3d_4 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 & 3c_4 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 & 3b_4 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 & 3a_4 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 & 2d_4 \\ 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 & 2d_4 \\ 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 & 2d_4 \\ 2a_1 & 3d_2 & 2c_3 & 2d_4 \end{vmatrix} =$ e) $\begin{vmatrix} -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} =$ f) $\begin{vmatrix} a_1+3d_1 & a_2+3d_2 & a_3+3d_3 & a_4+3d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} =$

4) Sabiendo que A y B son matrices de orden n, inversibles, desarrolle aplicando propiedades:

a) $det(-2.A.B^2) =$

b) $det[A^{-1}.(-B).B^T] =$

c) $det[\left(\frac{1}{2}A^T.B^{-1}\right)^{-1}] =$

d) $det[(-1A^2.3B)^T] =$

e) $det[A+3B] =$

f) $det[A.(2A^{-1})+I]^T =$

5) Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

a) Encuentre el menor complementario y cofactor correspondiente al elemento 4 y al elemento a_{21}.

b) Evalúe el determinante de la matriz A mediante cofactores.

c) Indique si la matriz A es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de A.

6) Halle,de ser posible, los valores de k para los cuales las matrices admiten inversa.

$A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & -2 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ a & -a & a \\ a & -a & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcule la inversa de la matriz A por método de determinantes, para una valor de k =-1.

7) Encuentre el determinante de A por regla de Chío

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique la respuesta usando determinantes:

a) El determinante del producto de una matriz de 2x1 por una de 1x2 siempre es cero.

b) El conjunto {(1,1,1),(-1,0,0),(0,0,2)} es linealmente dependiente.

c) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar siempre es cero.

PARTE B

1) Escriba y analice la definición de determinante de una matriz.

2) Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Escalone la matriz A y a partir de las propiedades de determinantes aplicadas a las operaciones elementales, calcule los determinantes de cada una de las matrices equivalentes encontradas durante el escalonamiento.

3) Sea A una matriz de orden 3, ortogonal con determinante negativo y sea B de orden 3 con det(B)=4. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $det(3A.B^{-1})$

b) $det(-B^t.(2A)^{-1}.A^t)$

c) $det[\frac{1}{2}.(A^{-1}.B^2).A^2]$

d) $det\{[A^2(3B)^{-1}]^2\}$

e) $[det\,(\frac{1}{2}.A.A^{-1} + 4I_3\ )]^{-1} + det\,(4B^{-1})$

f) det (-2$B^2.(B^2)^{-1}.A^t) + det\,A^2$

4) Demuestre :

a) $det\,[Adj(A)] = [det(\,A)]^{n-1}$, siendo A cuadrada e inversible.

b) El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

c) El determinante de (A.B) es igual al determinante de (B.A).

5) Escriba tres proposiciones sobre determinantes que sean falsas y proponga un contraejemplo.

6) Encuentre la inversa de las siguientes matrices por el método de determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7) Sea A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x+1} \end{pmatrix}$**. Determine todos los valores de x para los cuales la matriz A es invertible.**

8) Sea B = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{4-x} & \boldsymbol{2\sqrt{5}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2\sqrt{5}} & \boldsymbol{4-x} & \boldsymbol{\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sqrt{5}} & \boldsymbol{4-x} \end{pmatrix}$**. Determine todos los valores de x para los cuales el rango de la matriz B es menor a 3.**

Autoevaluación Trabajo Práctico N°3-Parte B

Ejercicio	*Resolución*			*Comentarios*
	Correcta	*Incorrecta*	*Dudosa*	
1				
2				
1c				
3 a				
3b				
3c				
3d				
3e				
3f				
4 a				
4b				
4c				
5				
6 a				
6b				
7				
8				

AUTOEVALUACIÓN N° 1
MATRICES, DETERMINANTES Y SEL

1) Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso.

a) Sea A.X=B un sistema compatible determinado entonces A es cuadrada y su determinante distinto de cero.

b) Sea A.X=0 un sistema compatible indeterminado entonces A no es cuadrada.

c) Dado un sistema de ecuaciones lineales en R^5 $\{x_1 + x_4 = 3$ la cantidada de variables libres del sistema es igual 4.

d) El sistema A.x=B donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y el conjunto solución es $S = \{(1,0,-2)\}$ entonces el vector $B = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

e) El determinante de toda matriz simétrica es siempre distinto de cero.

2) Complete

a) Si un sistema de ecuaciones A.X=B de 3x5 tiene dos grados de libertad entonces el rango de A es…………..

b) Si A.X=0 con A antisimétrica de orden 2, entonces la dimensión del espacio solución puede ser………………

c) Sea $k.\mathbf{I} = \mathbf{C}$, siendo k escalar distinto de cero e $\mathbf{I}$ la matriz identidad de orden 3 entonces el conjunto solución de $C.x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es ………

d) Si A y B son matrices de orden 4, en los cuáles det A=3 y el det B=5, entonces $\det(-1\, A^T.2B^{-1})^{-1}$=………………..

e) El conjunto $\{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,2)\}$ es linealmente………………………………………………………………………

3) Demuestre, justificando en cada paso:

a) Una propiedad de determinantes.

b) El conjunto solución del sistema A.X=0 con A ϵ R^{mxn} es subespacio vectorial de R^n.

c) La matriz $A-A^T$ es antisimétrica, siendo A cuadrada.

d) Sea el sistema AX=B, con A cuadrada.Si X_1 es solución del sistema y X_2 es solución del sistema, entonces X_1+X_2 no es solución del sistema.

4) Resuelva

a) Calcule el/los valores de λ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. o −2. Evalúe el determinante de A mediante cofactores y verifique calculando por Sarrus.

c) Determine, si es posible, el/los valores de λ para que los siguientes sistemas tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución.

$$\begin{cases} 1x - \lambda y = 3 \\ \lambda x - 9y = \lambda^2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

d) Dado el siguiente sistema rectangular: $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ \quad y + 2z = 0 \end{cases}$

d.1) Determine el conjunto solución.

d.2) En cada uno de los siguientes casos responda y proporcione un ejemplo: ¿Es posible agregar una ecuación al sistema dado de manera que el sistema 3 × 3 resultante: tenga única solución? Tenga infinitas soluciones? No tenga solución?

TRABAJO PRÁCTICO N° 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PARTE A

1) Para cada uno de los siguientes sistemas lineales:

I) Halle la matriz ampliada, el vector de incógnitas y el de términos independientes y exprese el SEL en forma matricial.

II) Analice por el Teorema de Rouché – Frobenius y encuentre, si es posible, el conjunto solución. Verifique los resultados usando https://matrixcalc.org/es/slu.html

a) $\begin{cases} x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 = 1 \\ -x_5 + x_3 + 3x_2 - 2 = 0 \\ x_3 + 7x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$ en R^5 b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - z + 2y = 4 \\ 3y = 1 + 3z \end{cases}$ en R^3 c) $\begin{cases} -x_3 + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7 = 2x_3 \end{cases}$ en R^3

2) Analice y resuelva los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del ejercicio anterior. Verifique que el conjunto solución obtenido, para el ítem a, es subespacio vectorial de R^5.

3) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **la matriz de coeficientes del sistema A.X = B. Y sean** $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $y\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ **matrices de términos independientes. Para cada una de ellas:**

a) Analice el sistema, determine (si es posible) el conjunto solución y concluya.

b) ¿El vector de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz?

4) Dadas las siguientes matrices ampliadas en forma escalonada reducida correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales.

I) Si corresponde, escriba el sistema.

II) Clasifique el sistema según el Teorema de Rouché Frobenius.

III) Determine, si existen, las incógnitas principales y libres.

IV) Encuentre, de ser posible, el conjunto solución. Verifique los resultados usando https://matrixcalc.org/es/slu.html

i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

5) Para la siguiente matriz ampliada determine los posibles valores de α, si existen, tales que el sistema A X = B no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones dependiendo de un parámetro o dos parámetros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\alpha & -\alpha^2 & 5\alpha + 4 & -16 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \end{array}\right]$$

6) Sea el sistema dado por: $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \\ ax_4 + x_5 = -b \\ (b^2 - b)x_4 = b \end{cases}$

a) Plantee el sistema en forma matricial

b) Construya la matriz ampliada y encuentre, si existen, los posibles valores de *a* y *b* para que el sistema no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones.

7) Determine un vector x tal que A.x = b si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \ y\ b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Similarmente, encuentre x tal que A.x = 0.

8) ¿Qué relación existe entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 2x + 3z + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y - z = 6 \\ x - y + 2 = -2z \\ -9 - 4z - y = 0 \end{cases}$$

9) Indique si las siguientes proposiciones son (V) o (F). Justifique.

a) ( )Si A es una matriz rectangular y el sistema AX=O es compatible determinado, el sistema $A^T X$=O también es compatible determinado.

b) ( )Si en AX=O, *S* es solución, entonces *kS* es solución, *k* es un número real.

c) ( )Si en AX=B, S_1 y S_2 son soluciones, entonces (S_1+S_2) es solución.

d) ( )Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución.

PARTE B

1) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -10 \\ -\frac{3}{2}y + z - 5 = x \end{cases} \quad \text{en } R^3$$

a) Determine si las ternas (-4,0,1); (-6,1,-1); (-3,0,2) y (-8,2,0) son solución del sistema.

b) Muestra que toda terna de la forma (t – 5, 0, t), donde t es un número real, es solución del sistema.

c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es S = {(t − 5, 0, t) ϵ R^3}. Justifique su respuesta.

d) Utiliza GeoGebra para validar tus respuestas.

2) Sean *a*, *b* ϵ *R.* Considere los planos cuyas ecuaciones son:

$$\mathbf{4x - ay + z + 4 = 0}$$
$$\mathbf{2x - y + z - 1 = 0}$$
$$\mathbf{2x - y + 2bz + 4 = 0}$$

Determine los valores de *a* y *b* que corresponden a cada uno de los siguientes casos:

a) La intersección de los tres planos es vacía.

b) La intersección de los tres planos es exactamente un punto.

c) La intersección de los tres planos es exactamente una recta. (En este caso, encuentre el conjunto solución)

d) Utiliza GeoGebra para validar las respuestas obtenidas en a), b) y c).

3) Defina SEL Homogéneo, indique qué tipo de solución admiten, nombre y explique los posibles métodos de resolución.

4) Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

(A – λI) X = 0 siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) Determine el conjunto solución del sistema A.X = 0 y verifique en cada caso, que el conjunto solución obtenido es un subespacio vectorial de R^3. Interprete geométricamente usando GeoGebra.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

6) Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) Dadas las proposiciones p: “Sea A_{nxn} tal que A.X = B es un SCD” y q: “det(A) ≠ 0”. Entonces q es condición……… para p.

b) Si la solución de un SEL de 5x4 es S = $\left\{(t, 3-s, 2+2s, s) \in R^4\right\}$ entonces la matriz ampliada del SEL en forma escalonada reducida es…….

c) Si A es de orden 5 x 3 y rango(A)=1 entonces el sistema AX = B tiene………………………………variables principales y ………………………………………variables libres.

d) Un ejemplo de una matriz ampliada escalonada reducida correspondiente a un SEL con más ecuaciones que incógnitas y con un número infinito de soluciones es……………………………………………………………………

e) Si A es la matriz nula de 7x5, entonces el conjunto solución de A.X = 0 es………………………………………………

f) Si AX = B con A $\neq$ O, es un SEL (3 x 7), no homogéneo, entonces el rango de la matriz del sistema puede tomar los valores ……….

7) Plantee, resuelva e interprete los siguientes problemas matemáticos:

a) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 4*
Máquina 1	*1*	*2*	*1*	*2*
Máquina 2	*2*	*0*	*1*	*1*
Máquina 3	*1*	*2*	*3*	*0*

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1, la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

b) Un viajero recién regresado de Europa gastó en alojamiento, por día, $30 dólares en Inglaterra, $20 en Francia y $20 en España. En comidas, por día, gastó $20 en Inglaterra, $30 en Francia y $20 en España. Adicionalmente, desembolsó $10 por día en cada país en gastos varios. El registro de nuestro viajero indica que gastó un total de $340 en alojamiento, $320 en alimentación y $140 en gastos varios en su recorrido por estos tres países. Calcule el número de días que permaneció el viajero en cada país o muestre que el registro debe ser incorrecto, pues las cantidades gastadas son incompatibles entre sí.

Autoevaluación Trabajo Práctico N°4-Parte B

Ejercicio	*Resolución*			*Comentarios*
	Correcta	*Incorrecta*	*Dudosa*	
1a				
1b				
1c				
2a				
2b				
2c				
3				
4				
5a				
5b				
6a				
6b				
6c				
6d				
6e				
6f				
6g				
7a				
7b				

TRABAJO PRÁCTICO N° 5: TRANSFORMACIONES LINEALES

PARTE A

1) En cada uno de los siguientes casos determine si la función dada es o no transformación lineal.

a) $T: R^5 \to R^2 / T((x, y, z, w, p, q)) = (-2,1)$

b) $T: R^3 \to R^4 / T((x, y, z)) = (x - y, z, y - z, x)$

c) $T: R^3 \to R^2 / T((x, y, z)) = (x^2 + y, x - z)$

d) $T: R^4 \to R^2 / T((x, y, z, w)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

e) $T: P_2 \to R^2 / T((ax^2 + bx + c)) = (b + c, a - b)$

f) $T: R^{nxn} \to R^{nxn} / T(A) = A$

2) Para las funciones del ejercicio 1 que sean transformaciones lineales:

a) Determine el núcleo y la imagen.

b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo.

c) Encuentre una base y la dimensión de la imagen. Además, verifique el teorema de la dimensión en cada caso.

d) Clasifique las transformaciones según sean endomorfismo, monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

3) Sea T el operador lineal en $\boldsymbol{R^2}$ $\boldsymbol{tal\ que\ T}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$

a) Halle $T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ e interprete geométricamente. Concluya.

b) Determine su núcleo, nul(T) y rango(T).

4) Sea R el rectángulo con vértices en (0, 0); (1, 0); (1, 2) y (0, 2). ¿Cuál es la imagen de R bajo la multiplicación por $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Interprete geométricamente.

5) Sea A una matriz de 7x6 tal que Ax = 0 tiene únicamente la solución trivial y supóngase que $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R^6} \to \boldsymbol{R^7}$ es la multiplicación por A. Halle el rango y la nulidad de T.

6) Sea $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^2}$ una TL y $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

a) Halle $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

b) Encuentre la ley de la transformación lineal.

7) <u>Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.</u>

a) La dimensión del núcleo de la transformación lineal matricial definida por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es 0.

b) Si $T: R^3 \to R^6$ una transformación lineal, entonces puede ocurrir que dim N(T) = 4.

c) Si $T: R^4 \to R^7$ es una transformación lineal, entonces la dimensión de la imagen de T es cómo máximo 4

d) Si $T: R^5 \to R^4$ es una transformación lineal, entonces la nulidad de T puede ser 0.

e) El núcleo del operador lineal identidad sobre R^3 {(0, 0, 0)}.

f) El rango de la transformación lineal $T: R^2 \to R^{2x2} / T(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & 0 \\ 0 & x + y \end{bmatrix}$ es igual a 2.

g) El operador derivación sobre funciones reales de una variable, es un operador lineal.

h) El operador integración sobre funciones reales de una variable, es un operador lineal.

i) Si T es una TL tal que T(X) = A X , siendo A_{3x3} una matriz fija, tal que N(T) = {0} , entonces A es no inversible.

PARTE B

1) Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ la multiplicación por la matriz $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, para un ángulo fijo θ.

a) Encuentre la transformación matricial para $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b) Halle T(- 3, 4) e interprete geométricamente. Use GeoGebra.

2) Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ $tal\ que\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ la proyección de un vector en R^3 sobre el plano "xy". Verifique que T es un operador lineal y luego determine su imagen, rango (T) y nul (T). Demuestre que el conjunto imagen obtenido es un subespacio vectorial de R^3. Use GeoGebra para representar gráficamente la imagen del vector (1, -2, 3).

3) Para $T: R^3 \rightarrow R^4$ tal que T(X) = A.X con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine N(T) e Im(T). Verifique el Teorema de la dimensión.

4) Sea el rectángulo con vértices en los puntos A(0, 0); B(3, 0); C(0, 2) y D(3, 2). Si la región que se obtiene, al aplicar la TL al rectángulo dado, es el paralelogramo de vértices E(0, 0); F(3, 0); G(4, 2) y H(7, 2), respectivamente. Entonces:

a) Represente gráficamente usando GeoGebra.

b) Determine la ley de la transformación lineal aplicada, indique dominio y codominio e identifique la TL obtenida.

c) Clasifique la TL en monomorfismo – epimorfismo – isomorfismo - endormorfismo según corresponda. Justifique.

5) Sea la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3 / T(x, y, z) = (x - ky, ky + z, kx - y)$.

a) Encuentre todos los valores de $k \in R$, si existen, tales que T sea un monomorfismo.

b) Halle todos los valores de $k \in R$, si existen, tales que T no sea un epiformismo.

c) Para k = 1, encontrar el núcleo y la imagen de la transformación. Para cada uno de ellos, determine una base.

6) Sea $T: V \rightarrow R^4$ una transformación lineal.

a) Si T es un epimorfismo y la nulidad de T es 2, ¿cuánto vale la dimensión de *V*?

b) Si T es un isomorfismo, ¿cuánto vale la dimensión de *V*?

7) Para la transformación lineal $T: R^{3x3} \rightarrow R^{3x3}$ dada por T(A) = A – A^t

a) Determine el Núcleo. ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen al núcleo de la transformación lineal?

b) Demuestre que el núcleo de la TL es un subespacio vectorial de R^{3x3}.

c) Determine la Imagen. ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen a la imagen de la transformación lineal?

d) Verifique teorema de la dimensión.

8) Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) La proposición "el transformado del vector nulo del dominio es igual al vector nulo del codominio" es condición…………………………………………………………………………………para que T sea transformación lineal.

b) La transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^3$ tal que T(x, y) = (x + y, x, y) tiene por imagen al espacio generado por el conjunto………..

c) Sea T: $R^2 \rightarrow R^4$ $tal\ que\ T(x) = A.x$, entonces los posibles valores del rango de T son…………………………….

d) El núcleo de la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^{2x2}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es………………………………… y Im(T) =……

e) El operador lineal en R^2 reflexión respecto al eje de ordenadas representado en forma matricial es……..

Autoevaluación Trabajo Práctico N°5-Parte B

Ejercicio	***Resolución***			***Comentarios***
	Correcta	***Incorrecta***	***Dudosa***	
1a				
1b				
2				
3				
4a				
4b				
4c				
5a				
5b				
5c				
6a				
6b				
7a				
7b				
7c				
7d				
8ª				
8b				
8c				
8d				
8e				

TRABAJO PRÁCTICO N° 6: MATRIZ ASOCIADA - PARTE A

1) Encuentre la matriz estándar asociada a las siguientes transformaciones lineales y escriba su representación matricial:

a) $T: R^2 \to R^{2x2}/T((x,y)) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$

b) $T: R^3 \to R/T((x,y,z)) = x - y + z$

c) $T: R^2 \to R^2/T((x,y)) = (x-2y, x+2y)$

2) Determine la matriz asociada al operador lineal en R^2 "reflexión respecto a la recta identidad" respecto de la base $B = \{(-1,2);(2,0)\}$ del dominio y $B' = \{(1,-1),(0,1)\}$ del codominio.

3) Dada la transformación lineal $T: R^3 \to R^2/T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}$. Halle la matriz asociada a T respecto a las bases B = {(1, 1, 0), (0, 1, 0), (- 1, 1, 1)} y B´= {(- 1,1), (1, 2)}, respectivamente. Calcule $T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ y verifique usando la matriz asociada encontrada.

4) Sea T un operador lineal en R^2 dado por $T\big((x,y)\big) = (x+2y, 2x-y)$.

a) Encuentre la matriz estándar A asociada al operador lineal T.

b) Encuentre la matriz M asociada a T respecto a la base B = {(1, 0), (1, -2)} en los conjuntos de partida y de llegada.

c) Encuentre la matriz de pasaje (P´), respecto de la base canónica en el conjunto de partida y la base B = {(1, 0), (1, -2)} en el conjunto de llegada.

d) Encuentre la matriz de pasaje (P), respecto de la base B = {(1, 0), (1, -2)} en el conjunto de partida y la base canónica en el conjunto de llegada.

e) Utilizando los resultados anteriores analice y responda: i. ¿Qué relación existe entre P´y P? ii. A partir de observar el cálculo de P´AP, ¿qué relación existe entre A y M?

f) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$ utilizando la matriz A y la matriz M. Extraiga conclusiones.

5) Sean P_2 y P_3 los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual a dos unido al polinomio nulo y menor o igual a tres unido al polinomio nulo, respectivamente, y sea $T: P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por

$$T\big(p(x)\big) = x.p(x)$$

a) Determine la matriz estándar asociada a T.

b) Obtenga la matriz asociada a T y referida a las bases: $B = \{1-x^2, 1+3x+2x^2, 5+4x+4x^2\}$ en el dominio y $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ en el codominio.

c) Con las matrices de los incisos anteriores, calcule la imagen del vector $\vec{u} = 2 - x + x^2$.

6) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto a la base $B = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y la base canónica en el codominio. Encuentre la matriz estándar asociada a la transformación lineal.

7) Sea $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y la base $B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el codominio. Encuentre la ley de la transformación.

8) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique

a) Si A y B son matrices cuadradas de orden nxn semejantes, entonces tr(A) – tr(B) = 0.

b) Si A es una matriz ortogonal de orden nxn, entonces A es semejante a una matriz con determinante nulo.

c) Si T: $R^3 \to R^5$ es una transformación lineal, entonces los vectores columna de la matriz asociada a T son linealmente dependientes.

d) La matriz $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ es la matriz de pasaje de la base canónica de R^2 a la base B = {(1, -1); (2, 3)}.

PARTE B

1) Anote la matriz asociada al operador lineal en R^2, contracción horizontal con k = 1/2, respecto de la base B = {(1, -1), (2, 2)} para el dominio y codominio.

2) Sea T: $P_2 \to P_1$/ T $((a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) = a_1 + a_0 x$. Encuentre la matriz estándar asociada a T y calcule T $((3 - 2x + x^2))$. ¿T es un isomorfismo?

3) Encuentre la matriz asociada al operador lineal rotación, en R^2, en sentido anti horario, con un ángulo de 45°, seguida de una reflexión respecto del eje x. Utilizando la matriz hallada, mapee el triángulo cuyos vértices son (0, 2) y (1, -1), (4, 2). Grafique usando GeoGebra.

4) Sea T un operador lineal en R^3 dado por $T\big((x, y, z)\big) = (x - y, y - x, x - z)$.

a) Encuentre la matriz estándar A asociada al operador lineal T.

b) Encuentre la matriz M asociada a T respecto a la base B = {(1, 0,1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)} en los conjuntos de partida y de llegada.

c) Encuentre la matriz de pasaje (P´), respecto de la base canónica en el conjunto de partida y la base B en el conjunto de llegada.

d) Encuentre la matriz de pasaje (P), respecto de la base B en el conjunto de partida y la base canónica en el conjunto de llegada.

e) Calcule T((2, 0,0)) utilizando la matriz A y la matriz M. Extraiga conclusiones.

5) Sea la matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ asociada a una transformación lineal, respecto a las bases B = {(1, 0), (1, 1)} del conjunto de partida y $B´$ = {(0, 1), (2, 1)} del conjunto de llegada. Encuentre la matriz estándar A, asociada a dicha transformación.

6) Sea A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación respecto de la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y $B´ = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el codominio. Halle la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases $C = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ y $C´ = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y codominio, respectivamente.

7) Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) La primera columna de la matriz asociada a la transformación lineal T: $R^2 \to R^3$ tal que T (x, y) = (x + y, 2y, 0) respecto de la base B = {(0, 5); (- 2, 3)} en el dominio y la base canónica en el codominio es……….

b) Sea T: $R^3 \to R^2$ tal que T (x, y, z) = (x + z, y – x) y sea B = {(2, 1); (- 1, 1)} una base de R^2, entonces el $[T(2,1,0)]_B$=……

c) Si la matriz estándar asociada a una TL es A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces un vector que pertenece a la imagen de la transformación lineal es…………………………………………………………………………………………………..

d) Sean las proposiciones p: "A y B matrices cuadradas de orden nxn semejantes" y q: "det(A) = det(B), entonces q es condición……………………………………………………………………………………………………para p.

e) La matriz de pasaje de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es……………………………………………………………………………………

Autoevaluación Trabajo Práctico N°6-Parte B

Ejercicio	Resolución			Comentarios
	Correcta	Incorrecta	Dudosa	
1				
2				
3				
4a				
4b				
4c				
4d				
4e				
5				
6				
7a				
7b				
7c				
7d				
7e				

AUTOEVALUACIÓN N° 2
TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRIZ ASOCIADA

1) Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso.

f) Sea T: $V \to W$ una transformación lineal tal que T(u) = T(v) entonces u – v pertenece al núcleo de la transformación lineal.

g) La matriz asociada al operador lineal "reflexión respecto al eje de abscisas" en R^2 es inversible y su inversa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

h) La función T: $P_2 \to R$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a$ es una transformación lineal.

i) La matriz de pasaje de la base canónica de R^3 a la base B = {(1,2,1); (0,1,0); (0, - 1,1)} es $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

j) La transformación lineal con matriz asociada estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es un isomorfismo.

k) Si T:$V \to W$ es una transformación lineal, entonces Im(T) = W.

l) Si $T: R^5 \to R^3$ es una transformación lineal entonces cualquier matriz asociada a T es de orden 5x3.

m) La nulidad del operador "proyección sobre el eje de ordenadas" en R^2 es igual a 0.

2) Escriba la forma matricial de una TL y verifique que es una transformación lineal.

3) Enuncie y demuestre una propiedad de matrices semejantes. Justifique.

4) Explique cuándo las matrices asociadas a un mismo operador lineal son semejantes.

5) Dé un ejemplo de una transformación lineal tal que:

$$Im(T) = gen\{(2, -1, 1); (-1, 3, 2)\}$$

6) Sea T: $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^3}$ una transformación lineal cuya matriz asociada estándar es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Sabiendo que T no es monomorfismo y que (4, 2, 1) es un vector de la imagen de T, determine los valores de "*a*" y "*b*".

7) Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

a) El núcleo de la transformación lineal nula definida de R^4 en R^2 es……………………………………………………………

b) Si la matriz estándar asociada a una transformación lineal es A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, entonces el $rango(T) =$…………

c) Sea M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto a la base $B = \{(2,0,0);\ (0,-1,0); (0,0,1)\}$ en el dominio y $B' = \{(1,1,0); (0,1,-1); (0,0,-2)\}$ en el codominio. La ley de la transformación lineal es…….

d) La matriz asociada al operador lineal "expansión vertical con factor k = 3" en R^2, respecto a la base canónica en el dominio y la base B = {(2, 1); (-1,0)} en el codominio es…………………………………………………….

e) Sea una transformación lineal tal que T(X) = A.X donde A es una matriz de orden 7x4. Si el rango de A es igual a 4, entonces el/los posible/s valor/es del rango de T son………………………………………………….…………..

f) Una condición necesaria y suficiente para que las matrices A y B cuadradas de orden nxn sean semejantes es……..

TRABAJO PRÁCTICO N° 7: DIAGONALIZACIÓN - PARTE A

1) Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y los vectores $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$:

a) Grafique u y *A*u, determinando a partir de la gráfica si u es vector característico de *A*. Realice el mismo análisis para v y *A*v.

b) Corrobore utilizando el link https://www.geogebra.org/m/w55zgqgf

c) Evalúe la misma situación en forma analítica y determine el valor característico.

2) Sea T: $IR^3 \to IR^3$ la transformación lineal "proyección ortogonal sobre el plano xz".

a) Grafique y conjeture cuáles son los espacios característicos asociados a T.

b) Encuentre en forma analítica los espacios característicos de la matriz asociada a T.

3) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre:

a) Los espacios característicos y determine su dimensión.

b) Una matriz diagonal semejante a *A*.

c) Otra matriz semejante a *A.*

4) Sea C la matriz asociada estándar al operador lineal en IR^2, rotación en sentido antihorario, con ángulo π.

a) Determine si *C* es diagonalizable. En caso afirmativo escriba la matriz *P* que diagonaliza a *C*. ¿*P* es única?

b) Verifique la existencia de una matriz diagonal, semejante a *C*.

5) Sea T el operador lineal nulo en IR^2.

a) Escriba el esquema de la transformación lineal.

b) Encuentre los valores y vectores característicos de la matriz asociada a la transformación.

c) Halle el/los espacios característicos de la matriz asociada al operador lineal, su base y dimensión.

d) ¿La matriz asociada a T, es diagonalizable?

6) Sea B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Determine espacios característicos y dé dos vectores característicos de cada subespacio y dos que no lo sean.

b) Justifique si *B* es diagonalizable.

7) Dado el operador lineal T: $IR^2 \to IR^2$, tal que T((x, y))= (3x-2y, -2x)

a) Sin realizar cálculos, determine si la matriz asociada a T es inversible, simétrica, diagonalizable.

b) Calcule los valores y vectores característicos.

c) En caso de que sea posible, obtén una matriz ortonormal que diagonalice a la matriz asociada a T.

Investigue los siguientes links, a fin de verificar cálculos.

https://www.youtube.com/watch?v=QNHKYP0hm7E

https://www.youtube.com/watch?v=KEX-WL5xBJo

https://matrixcalc.org/es

8) Sea P(λ) el polinomio característico de la matriz *A*, P(λ) = $(\lambda + \frac{1}{2})^3 \; \lambda \; (\lambda - 5)$. Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas.

a) El orden de la matriz *A* es……………………………………………………………………………………………

b) ¿Qué puede asegurar acerca de $det(A - 3I)$?……………………………………………………………………………

c) Los valores característicos de B = 5A son ………………………………………………………………………………………………...
d) Los valores característicos de A^T son……………………………………………………………………………………………………..
e) *det* (A^t) es……
f) Si M es una matriz semejante a A, entonces los valores característicos de *M* son…………………………………………
g) ¿A es inversible? Justifique su respuesta ………………………………………………………………………………………..
h) En caso de serlo, los valores característicos de A^{-1} son ………………………………………………………………………..
i) Una condición necesaria pero no suficiente para que *A* sea diagonalizable, es……………………………………………..
j) Los valores característicos de A^4 son…………………………………………………………………………………………………

9) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique

a) El espacio característico de A es el espacio nulo de la transformación lineal cuya matriz asociada es (A - λI)
b) La matriz *A* y una matriz escalonada de *A*, tienen los mismos valores característicos.
c) Si v_1 y v_2 son vectores característicos linealmente independientes, entonces corresponden a valores característicos distintos.

10) Actividad grupal (trabajar en grupos de 3 o 4 alumnos)

Si A de orden n, es una matriz triangular superior o inferior entonces los valores característicos son los elementos de la diagonal principal.

a) Dé un ejemplo.
b) Demuestre la propiedad.

11) Demuestre que:

a) La transformación semejanza T: $IR^{nxn} \rightarrow IR^{nxn}$, tal que, T(A) = C^{-1}.A.C es una transformación lineal, siendo *C* una matriz fija de orden nxn.
b) Si u y v son vectores propios de la matriz *A*, asociados al valor propio λ, entonces α u + β v $\neq$ 0 es vector propio de *A* asociado a λ, siendo α, β y λ escalares.

PARTE B

1) Investigue y determine los valores y vectores característicos del operador lineal rotación en IR^2.

2) En la matriz *A* del Ejercicio 3 de la parte A: demuestre que los espacios característicos, son subespacios de IR^3, con la suma y producto usual.

3) Calcule A^5, siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, utilizando propiedades de matrices semejantes a una matriz diagonal.

4) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique

a) Los vectores columna de una matriz *P* que diagonaliza a una matriz *A*, son vectores linealmente independientes.
b) Si $P^{-1} A P = D$, entonces $A^3 = P^3 D^3 (P^{-1})^3$. Siendo *A, P* y *D* matrices de orden nxn
c) $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$, siendo las proposiciones p: “A es simétrica” y q: “A es diagonalizable ortogonalmente”
d) Si A es una matriz inversible y ortogonalmente diagonalizable, entonces A^{-1} es ortogonalmente diagonalizable.

5) Sea *A* = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

a) Entonces la solución de la ecuación característica es λ = $\frac{1}{2}[(\ldots\ldots\ldots)\underline{+}\sqrt{(\ldots)^2+\ldots}]$ Complete para que el enunciado resulte verdadero.

b) Asigne valores a los elementos de *A* para que tenga valores característicos reales distintos y valores característicos iguales.

6) Complete el siguiente enunciado de manera tal que resulte verdadero:

Sean *A* y *C* matrices semejantes y $\lambda = -2$ es valor característico de una matriz *C* de 2x2, entonces ………………………..es un valor característico de la matriz $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$

7) Si los pares de valores y vectores característicos de una matriz *A*, son (1, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$), $(4, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix})$, entonces:

a) Escriba la ley de la transformación cuya matriz asociada es *A*.

b) Determine los subespacios característicos.

Autoevaluación Trabajo Práctico N°7-Parte B

Ejercicio	**Resolución**			**Comentarios**
	Correcta	**Incorrecta**	**Dudosa**	
1				
2				
3				
4.a				
4.b				
4.c				
4.d				
5.a				
5.b				
6				
7.a				
7.b				

AUTOEVALUACIÓN N° 3
DIAGONALIZACIÓN

1) Determine y argumente la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

- Un espacio característico de una matriz cuadrada correspondiente a un autovalor es el conjunto formado por todos los autovectores asociados al valor característico unido el vector nulo.
- La multiplicidad algebraica de un valor propio coincide con la dimensión del espacio propio asociado al valor propio.

2) Si *A* es una matriz de orden n y λ es un autovalor de *A*:

a) λ^3 es un autovalor de A^3 asociado al mismo autovector.
b) La multiplicidad algebraica y geométrica de λ es la misma.
c) Si A es inversible, λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} asociado al mismo autovector.
d) A es diagonalizable.

3) En cada caso, indique la (o las) respuestas correctas:

- Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces:
  a) A y B son diagonalizables.
  b) $det(A - \lambda I) = det(B - \lambda I)$
  c) A y B son inversibles
  d) *A* y *B* tienen los mismos vectores característicos.

- Sea P(λ) el polinomio característico de A, $P(\lambda) = (\lambda-1)^2 (\lambda-3)^2 (\lambda-4)^3$ entonces:
  a) A es de orden 7x7
  b) A es diagonalizable
  c) A tiene entre 2 y 7 vectores característicos
  d) A es una matriz simétrica

- A es una matriz de orden 5 y λ = 0 es el único valor característico, entonces:
  a) E_λ es un subespacio de IR^5.
  b) E_λ puede ser el subespacio trivial nulo.
  c) A no es inversible
  d) A es simétrica

TRABAJO PRÁCTICO 8: NÚMEROS COMPLEJOS

PARTE A

1) Resuelva las ecuaciones de los incisos b, c, d y calcule el resultado de los incisos a, e y f.

a) Re $\left(\frac{-1+3i}{(-i+4).i}\right) + Im(4 - 2i\,.\,\overline{i^{35}}) =$

b) $(i - z) + (2z - 3i) = -2 + 7i$

c) $z^2 + 2z + 2 = 0$

d) $(4 - 3i).\,(-\overline{z}\,) = i$

e) $\begin{bmatrix} 3+2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} =$

f) Im (det $\begin{bmatrix} -2i & 4i \\ 5 & 6i+1 \end{bmatrix}$)=

Represente en el plano complejo los números obtenidos en los incisos (a), (c) y (d); sus opuestos y sus conjugados.

2) Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

a) El módulo de la potencia cuadrada de (1+i) es ....

b) Siendo $z_1 = i,\ z_2 = 1 - \sqrt[2]{3}\,i, z_3 = \sqrt[2]{3} + i$, el argumento de $\frac{{z_1}^2.z_3}{z_2}$ es...

c) La forma binómica del complejo dado en coordenadas polares z = $(5,\frac{\pi}{4})$ es igual a ....

d) Sea z un número complejo del tercer cuadrante tal que su módulo es igual a 2 y Re(z) = -1. Exprese z en forma trigonométrica.......................................y en forma exponencial..

e) El módulo del complejo z = $-3.e^{5i}$ es .... , su argumento es................................ y su potencia cúbica es ....

3) Encuentre:

a) La potencia quinta del número complejo z=1-i. Exprese el resultado en forma binómica y exponencial.

b) Las raíces cuartas del complejo z = -8 + 8$\sqrt[2]{3}$ i. Grafique.

c) El logaritmo natural de z= $-e^{\frac{\pi}{2}i}$ y represente gráficamente.

d) Las raíces cúbicas de -8.

e) La forma exponencial del logaritmo principal del complejo z = $(1, -\sqrt{3})$ dado en coordenadas cartesianas.

4) Calcule y exprese los resultados en coordenadas polares:

a) $\omega = (3 + 2i)^{-i+1}$

b) $\omega = \left(\frac{2i}{4-3i}\right)^{1-2i}$

5) Encuentre la solución y escriba el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $-3x^4 - 135x^2 - 972 = 0$

b) $2x^5 - 16x^2 = 0$

c) $9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$

d) $5x^3 + 15x^2 + 15x + 5 = 0$

e) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$

f) $x^8 - 26x^4 + 25 = 0$

g) $(x+1)\, x^8 - (x+1)\, x^4 = 0$
h) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$
i) $-2(x+2)^4 + 6(x+2)^2 + 8 = 0$
j) $7x^3 - 4x^2 - 4x + 7 = 0$

6) Determine gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones, siendo z = x+yi.

$$a)\begin{cases} x \le 2y \\ Im(z) < 3 \\ 1 < Re(z) \le 4 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} \dfrac{(z+\overline{z})^2}{36} + \left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 < 1 \\ 0 < Im(z) < 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} |x| < 1 \\ |z| \ge 1 \\ x^2 \le y \end{cases}$$

PARTE B

1) Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\boldsymbol{i} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{i} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$.

a) Halle, de ser posible, la inversa de la matriz A. Justifique.
b) Analice el sistema de ecuaciones lineales A.X = B, B = $\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$, y si es posible, encuentre el conjunto solución.

2) Dada la expresión $\omega = (i-2)^{i+3}$,

a) Calcule y exprese el resultado en forma binómica.
b) Calcule en forma exponencial.
c) Verifique la igualdad de los resultados hallados en los ítem anteriores.

3) Halle el espacio nulo de A, siendo A=$\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & -\mathbf{1}-\boldsymbol{i} \\ -\mathbf{1}+\boldsymbol{i} & -\mathbf{2} \end{bmatrix}$.

4) Halle los valores de *a* y *b*, que satisfaga:

$(2 + i)\, a + b\, (1 + i) = 3 - 2i$

5) Calcule la matriz P que diagonaliza a la matriz A= $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$.

6) Encuentre el conjunto solución $\begin{cases} \boldsymbol{xi - yi = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = i} \end{cases}$

Autoevaluación Trabajo Práctico N°8-Parte B

Ejercicio	Resolución			Comentarios
	Correcta	Incorrecta	Dudosa	
1.a				
1.b				
2.a				
2.b				

2.c				
3				
4				
5				
6				

TRABAJO PRÁCTICO Nº 9
ÁLGEBRA COMBINATORIA

1) Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $C_{n,6} = 7.\ C_{n,4}$

b) $3.\ V_{n,4} = V_{n-1,5}$

c) $7.\ V_{m,4} = 84.\ C_{m,2}$

d) La diferencia entre el número de variaciones de n objetos tomados de a dos y el número de combinaciones de esos mismos objetos tomados también de a dos es 21. ¿Cuántos objetos hay?

e) $C_{4,n+1} = C_{5,n+2}$

f) $\frac{P_{2n+1}}{P_{2n-1}} = 96 - P_3.V_{n,1}$

2) Analice cada situación y resuelva.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar tres chicas y dos chicos en una fila de butacas de un cine teniendo en cuenta que no pueden estar dos chicos juntos ni dos chicas juntas?

b) En una pastelería se vende 4 tipos de pasteles: de crema, chocolate, naranja y selva negra.

b.1) ¿De cuántas formas diferentes se puede comprar 15 de estos pasteles?

b.2) ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse si se incluyen por lo menos ocho pasteles de selva negra?

c) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 libros diferentes en un estante si:

c.1) es posible cualquier ordenación?

c.2) 3 libros determinados deben estar juntos?

c.3) dos libros determinados deben ocupar los extremos?

c.4) tres libros son iguales entre sí?

d) ¿De cuántas formas se puede distribuir 11 canicas blancas idénticas en 4 recipientes diferentes?

e) Debemos ubicar a 3 personas de un grupo de 7 (Luis, Ana, Juan, Ely, Luz, Cris y Tavo) en 3 asientos: pasillo, centro o ventanilla.

e.1) ¿De cuántas maneras pueden elegirse las 3 personas?

e.2) ¿En cuántas de ellas está Ely en la primera posición (pasillo)?

e.3) ¿En cuántas de ellas está Ely en la 1ra posición (pasillo) y a Luis en la 3ra (ventanilla)?

e.4) ¿En cuántas estarán Ana o Cris?

f) Del grupo de 7 personas anterior debemos organizar comisiones de 3 personas. En los grupos no hay jerarquía, de tal forma que todas desempeñan la misma labor.

f.1) ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

f.2) ¿En cuántas de ellas participa Luz?

f.3) ¿En cuántas participan Juan y Tavo?

g) ¿Cuántas secuencias de 4 letras, 2 vocales y 2 consonantes (pudiendo repetirse), pueden formarse disponiendo de 5 vocales y 4 consonantes? No debe haber dos vocales seguidas.

h) Dada la palabra CATARATAS,

h.1) ¿De cuántas maneras se pueden reordenar las letras?

h.2) La misma situación, pero condicionada a que la S sea la primera y la T la última.

h.3) La misma situación, pero las letras TA, deben permanecer juntas en ese orden.

i) Con los números 2, 5, 7 y 9:

i.1) ¿Cuántos números de tres cifras puedes formar?

i.2) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?

i.3) ¿Cuántos de los números del apartado anterior son pares?

i.4) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?

i.5) ¿Cuántos números mayores que 5000 y menores que 9000 se pueden armar?

j) Tres atletas compiten en una carrera. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta?

k) El sistema Braille se basa en agrupaciones de puntos y rayas. ¿Cuántas agrupaciones que tengan como máximo cinco símbolos pueden realizar?

l) Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron a la reunión?

m) Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:

m.1) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.

m.2) Una mujer determinada debe pertenecer al comité.

m.3) Dos hombres determinados no pueden estar juntos en el comité.

n) El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencia de dígitos formados por unos y ceros. Si un byte es una secuencia de 8 de estos dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se pueden formar? ¿ y cuántas de esas cadenas comienzan con 1100?

3) En el desarrollo de $\left(2y-\frac{3}{2y^2}\right)^8$, determine:

a) El o los término/s central/es. b) el término cuadrático.

4) Halle el exponente n de $(x + 2)^n$ sabiendo que $T_6 = x\,T_7$.

5) Desarrolle $(x^2 - 2x)^{1/4}$ hasta el 3º término.

6) Halle el exponente del binomio $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n$ si el quinto término es el término independiente.

7) Determine el valor de a en el binomio $\left(\frac{x}{a}-y^2\right)^{15}$, sabiendo que el término que contiene a y^{22} presenta coeficiente numérico $-\frac{455}{27}$.

8) Encuentre, de ser posible:

a) Los términos centrales y el término de grado 12 en el binomio $(2+\frac{x}{4})^{15}$.

b) El término que contiene x^3y^4 en $(2x-y)^{12}$.

c) El valor del término que contiene a x^6y^{18} en $(x + y^2)^{15}$.

9) Desarrolle hasta el cuarto término el binomio $(1 + x^2)^{-3}$.