ÁLGEBRA [LCC]
UNIDAD 1 - FUNDAMENTOS

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
FING - UNCUYO

Conceptos

La lógica es la ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, sin las cuales no tiene lugar ningún uso del entendimiento y de la razón.

Immanuel Kant (1785).

Figura: Immanuel Kant $(1724 - 1804)$, filosofo prusiano.

Augustus De Morgan
CORBIS BETTMANN

George Boole
Mary Evans Picture Library Ltd.

Figura: Morgan y Boole incorporaron gran parte del estudio de la lógica a las matemáticas. Estudiaremos (muy) brevemente el trabajo de De Morgan y Boole en lógica.

Conceptos

$$-x < 0$$

es Verdadero o Falso?

Definición (Proposición)

Una *proposición* (o declaración) es una afirmación que es *verdadera* o *falsa* pero no ambas.

Definición (Valor de Verdad)

La *veracidad* o *falsedad* de una proposición $\boldsymbol{p}$ es lo que denominamos valor de verdad de $\boldsymbol{p}$, y escribimos $\nu(\boldsymbol{p}) = V$ o $\nu(\boldsymbol{p}) = F$ en cada caso, respectivamente. En algunos casos acostumbramos escribir $\nu(\boldsymbol{p}) = 1$ o $\nu(p) = 0$ en lugar de $\nu(\boldsymbol{p}) = V$ o $\nu(\boldsymbol{p}) = F$, respectivamente.

EJEMPLOS

- María está feliz. ***X***
- $2+2=5$. ✓ Falso
- $x^2+2=11$. ***X***
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, es cierto que $x^2+2=11$. ✓ Falso
- Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2+2=11$. ✓ Verdadero
- El día de que murió el prócer San Martín llovió en alguna localidad de Mendoza. ✓ ¿Verdadero o Falso?
- Todos los números son positivos. ✓ Falso
- La Tierra es redonda (una geiode para ser mayor exactitud). ✓ Verdadero
- Al menos el $60\,\%$ de los alumnos de *Álgebra* aprobará la materia antes de que comience el tercer trimestre de la carrera. ✓ ¿Verdadero o Falso? Hay que esperar para saber.

EJERCICIOS

Indicar si las siguientes oraciones son proposiciones. En caso de ser proposición decidir si es *verdadera* o *falsa*.

- 1024 es el menor número de 4 dígitos que es un cuadrado perfecto.
- Ella es una matemática importante.
- $128 = 2^6$.
- $x = 2^6$

DEFINICIÓN (Negación)

Si $\boldsymbol{p}$ es una proposición, la negación de $\boldsymbol{p}$ es "*no* $\boldsymbol{p}$" o "*No es cierto que* $\boldsymbol{p}$", y es denotada por $\neg \boldsymbol{p}$, $\sim \boldsymbol{p}$, $\overline{\boldsymbol{p}}$, entre otras notaciones. Tiene el valor de verdad opuesto a $\boldsymbol{p}$: si $\boldsymbol{p}$ es verdadero, $\neg \boldsymbol{p}$ es falso; y si $\boldsymbol{p}$ es falso, $\neg \boldsymbol{p}$ es verdadero.

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$
V	*F*
F	*V*

EJEMPLO

Escribir la negación de la siguiente proposiciones (expresadas en *lenguaje coloquial*)

$\boldsymbol{p}$: El auto de Pablo es blanco.

Solución

$\neg \boldsymbol{p}$: No es cierto que el auto de Pablo es blanco. ✓

DEFINICIÓN (Conjunción)

Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son proposiciones, la conjunción de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ es "$\boldsymbol{p}$ *y* $\boldsymbol{q}$", y es denotada por $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$. Es verdadera si tanto $\boldsymbol{p}$ como $\boldsymbol{q}$ son verdaderas. En cualquier otro caso la conjunción es falso.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

EJEMPLO

Escribir la conjunción de las siguientes proposiciones (expresadas en *lenguaje coloquial*)

$\boldsymbol{p} : \pi > 3$, $\boldsymbol{q} : pi$ es un número racional.

Solución

$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} : \pi > 3 \text{ Y } \pi$ es un número racional. ✓

u otra forma

$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} : \pi$ es un número racional mayor que 3. ✓

DEFINICIÓN (DISYUNCIÓN)

Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son proposiciones, la disyunción de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ es "$\boldsymbol{p}$ *o* $\boldsymbol{q}$", y es denotada por $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$. Es falsa si tanto $\boldsymbol{p}$ como $\boldsymbol{q}$ son falsas. En cualquier otro caso la disyunción es verdadera.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

EJEMPLO

Escribir la disyunción de las siguientes proposiciones (expresadas en *lenguaje coloquial*)

p : La Selección Argentina de Fútbol masculino ganó.
q : La Selección Argentina de Fútbol masculino empató.

Solución

$p \vee q$: La Selección Argentina de Fútbol masculino ganó o empato. ✓

u otra forma (entendiendo el contexto del fútbol)

$p \vee q$: La Selección Argentina de Fútbol masculino sumo puntos. ✓

Notación de los principales conectivos lógicos en Java, C y C++

Note Java, C, and C++ use the following notations:

$\sim$	!
$\wedge$	&&
$\vee$	||

DEFINICIÓN (Forma Proposicional)

Una *Forma Proposicional* (o forma declarativa) es una expresión compuesta por variables (como p, q y r) y conectivos lógicos (como $\neg$, $\vee$ y $\wedge$, y otros que vamos a ver a posteriori) la cuál se convierte en una proposición cuando las variables se sustituyen por proposiciones. La tabla de verdad para una *Forma Proposicional* determinada muestra los valores de verdad que corresponden a todas las combinaciones posibles de valores de verdad para las variables del enunciado que la componen.

Para calcular los valores de verdad de una *Forma Proposicional*, siga reglas similares a las utilizadas para evaluar expresiones algebraicas. Para cada combinación de valores de verdad para las variables enunciativas, primero evalúe las expresiones dentro del paréntesis más interno, luego evalúe las expresiones dentro del siguiente conjunto de paréntesis más interno, y así sucesivamente, hasta que tenga los valores de verdad para la expresión completa.

EJEMPLO

Construir una tabla de verdad para la *Forma Proposicional*

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Solución

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
V	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*

DEFINICIÓN (Disyunción Exlusiva)

Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son proposiciones, la disyunción exclusiva de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ es "$\boldsymbol{p}$ *o* $\boldsymbol{q}$ pero no ambos", y es denotada por $\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}$ o por $\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}$. Es falsa si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son ambas falsas o ambas verdaderas. En cualquier otro caso la disyunción es verdadera.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}$
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

EJEMPLO

Construir una tabla de verdad para la *Forma Proposicional*

$$(p \wedge \neg q) \vee r$$

Solución

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee r$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

EJERCICIOS (Ejercicio 3 TP1)

Construir una tabla de verdad para las siguientes *Formas Proposicionales*

b) $\neg p \wedge q$.

i) $p \wedge (\neg q \vee r)$.

EJEMPLO (Lenguaje Coloquial y Simbólico

Traduciendo del lenguaje coloquial al simbólico. Escribe simbólicamente cada una de las siguientes oraciones, siendo p "Hace calor" y q "Hay sol".

1. No hace calor pero hay sol.
2. Hace calor o no hay sol.

Solución

1. $\neg p \wedge q$.
2. $p \vee \neg q$.

Conceptos

Las afirmaciones

6 es mayor que 2,   y   2 es menor que 6,

son dos formas diferentes de decir lo mismo. ¿Por qué? Por la definición de las frases mayor que y menor que. Por el contrario, aunque las afirmaciones

(1) Los perros ladran y los gatos maúllan,

y

(2) Los gatos maúllan y los perros ladran,

también son dos formas diferentes de decir lo mismo, el motivo no tiene nada que ver con la definición de las palabras. Tiene que ver con la forma lógica de las afirmaciones. Dos proposiciones cualesquiera cuyas formas lógicas estén relacionadas de la misma manera que (1) y (2) serían ambas verdaderas o ambas falsas. Puede ver esto examinando la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$p \wedge q$ y $q \wedge p$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes.

Definición (Logicamente Equivalentes)

Dos formas proposicionales se dicen que son Lógicamente Equivalente *si, y sólo si*, tienen valores de verdad idénticos para cada posible sustitución de sus variables por valores de verdad. La equivalencia lógica de las formas proposicionales P y Q se denota escribiendo $P \equiv Q$ (o $P \iff Q$).

Si me dice que:

No es cierto que tu código no funciona.

Entonces ¿mi código funciona?

Ejemplo (Doble Negación)

Realizar la tabla de verdad de la doble negación de una proposición, ¿que puede afirmar?

Solución

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Podemos afirmar que

$$p \equiv \neg(\neg p)$$

EJEMPLO (Negación de una conjunción)

Realizar la tabla de verdad de $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \wedge \neg q$, ¿que puede afirmar?

Solución

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	$\neq$ F
F	V	V	F	F	V	$\neq$ F
F	F	V	V	F	V	V

Podemos afirmar que

$$\neg(p \wedge q) \not\equiv \neg p \wedge \neg q,$$

donde el símbolo $\not\equiv$ significa que las formas proposicionales NO SON EQUIVALENTES.

Teorema (De Morgan)

La negación de una conjunción es lógicamente equivalente a la disyunción de las negaciones. Es decir,

$$\neg (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}.$$

La negación de una disyunción es lógicamente equivalente a la conjunción de las negaciones. Es decir,

$$\neg (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \equiv \neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}.$$

Si x es un número real en particular, digamos que x no es menor que 2 ($x \nless 2$) esto significa que x no está a la izquierda de 2 en al recta real. Esto es equivalente a decir que $x = 2$ o que x está a la derecha de 2 en la recta real ($x = 2$ o $x > 2$). Luego,

$$x \nless 2 \text{ es equivalente a } x \geqslant 2.$$

Graficamente,

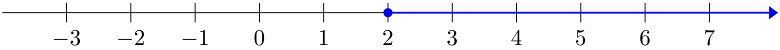

Figura: Si $x \nless 2$, entonces x está en este lado de la región.

Similarmente,

$$x \ngtr 2 \text{ es equivalente a } x \leqslant 2,$$
$$x \nleqslant 2 \text{ es equivalente a } x > 2, \text{ y}$$
$$x \ngeqslant 2 \text{ es equivalente a } x < 2.$$

EJEMPLO (Desigualdad y De Morgan)

Utilice las propiedades de De Morgan para escribir la negación de

$$-1 < x \leqslant 4.$$

Observemos que

$$-1 < x \leqslant 4 \text{ es equivalente a } -1 < x \text{ y } x \leqslant 4,$$

Por De Morgan, la negación es

$$-1 \nless x \text{ o } x \nleqslant 4,$$

que es equivalente a

$$-1 \geqslant x \text{ o } x > 4,$$

Graficamente, si $x \leqslant -1$ o $x > 4$, entonces x se encuentra en la región sombreada de la recta real, como se muestra a continuación

Las propiedades de De Morgan se utilizan con frecuencia al escribir programas de computadora. Por ejemplo, supongamos que desea que su programa elimine todos los archivos modificados fuera de un cierto rango de fechas, digamos desde la fecha 1 inclusive hasta la fecha 2 inclusive. Usarías el hecho de que

$$\neg(\text{date1} \leqslant \text{file\_modification\_date} \leqslant \text{date2})$$

es equivalente a,

$$(\text{file\_modification\_date} < \text{date1}) \text{ o } (\text{date2} < \text{file\_modification\_date}).$$

DEFINICIÓN (TAUTOLOGÍA & CONTRADICCIÓN)

Una *tautología* es una forma proposicional que siempre es verdadera independientemente de los valores de verdad de las poposiciones individuales que la conforman. Escribiremos $\boldsymbol{T}$ (TRUE=VERDAD) para simbolizar una tautología.
Una *contradicción* es una forma proposicional que siempre es falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones individuales que la conforman. Escribiremos $\boldsymbol{F}$ (FAKE=FALSO) para simbolizar una contradicción.

EJEMPLOS CLÁSICOS

TAUTOLOGÍA

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

CONTRADICCIÓN

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Teorema (Equivalencias Lógicas)

Dadas cualesquiera proposiciones p, q y r, con T y F simbolizando una tautología y una contradicción respectivamente, las siguientes propiedades se cumplen:

1. Conmutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. Asociativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Identidad	$p \wedge T \equiv T$	$p \vee F \equiv F$
5. Negación	$p \vee \neg p \equiv T$	$p \wedge \neg p \equiv F$
6. Doble Negación	$\neg(\neg p) \equiv p$	
7. Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
8. Dominación	$p \vee T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$
9. De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
10. Absorción	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

DEFINICIÓN (IMPLICACIÓN O CONDICIONAL)

Si p y q son proposiciones, el condicional de q por p es denotado por $p \to q$ y se lee "Si p, *entonces* q". Es falsa cuando p es verdadera y q es falsa, en cualquier otro caso es verdadera. LLamamos a p de *antecedente* (o hipótesis) de la implicación y a q *consecuente* (o tesis).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TEOREMA (Negación de un Implicación)

La negación de "Si p entonces q" es lógicamente equivalente a "p y no q". Es decir,

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

Demostración Realizar la tabla de verdad de ambas formas proposicionales.

EJEMPLO (Negación de una implicación)

Escribe negaciones para cada una de las siguientes afirmaciones:

1. Si mi auto está en el taller, entonces no puedo ir a clase.
2. Si Sara vive en Atenas, entonces vive en Grecia.

Solución

1. Mi auto está en el taller y puedo llegar a clase.
2. Sara vive en Atenas y no vive en Grecia.

DEFINICIÓN (CONTRARECÍPROCA, RECÍPROCA Y CONTRARIA)

Dado $p \to q$ tenemos las siguientes terminologías

- $\neg q \to \neg p$ "Si $\neg q$, *entonces* $\neg p$" CONTRARECÍPROCA.
- $q \to q$ "Si q, *entonces* qp" RECÍPROCA.
- $\neg p \to \neg q$ "Si $\neg p$, *entonces* $\neg q$" CONTRARIA.

¡Precaución!

Muchas personas creen que si una implicación es verdadera, entonces la recíproca y la contraria también debe ser cierto. Esto es ¡incorrecto! la recíproca y la contraria pueden ser ciertas, pero no tienen por qué serlo en general.

EJEMPLO (CONTRARECÍPROCO)

Escribir el contrarecíproco de cada uno de los siguientes enunciado:

1. Si Hugo puede cruzar el lago nadando, entonces Hugo podrá nadar hasta la isla.
2. Si hoy es Pascua, mañana es lunes.

Solución

1. Si Hugo no puede nadar hasta la isla, entonces Hugo no puede cruzar el lago a nado.
2. Si mañana no es lunes, entonces hoy no es Pascua.

EJEMPLO (Recíproco y Contario)

Escribe el recíproco y contrario de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. Si Hugo puede cruzar el lago nadando, entonces Hugo podrá nadar hasta la isla.
2. Si hoy es Pascua, mañana es lunes.

Solución

1. **Recíproco** Si Hugo puede nadar hasta la isla, entonces Hugo puede cruzar el lago nadando.
   Contrario Si Hugo no puede cruzar el lago nadando, entonces Hugo no puede nadar hasta la isla.
2. **Recíproco** Si mañana es lunes, hoy es Pascua.
   Contrario Si hoy no es Pascua, mañana no será lunes.

DEFINICIÓN (Doble Implicación o Bicondicional)

Si p y q son proposiciones, el bicondicional de p y q denotado por $p \leftrightarrow q$ y se lee "p *si y solo si* q". Es verdadero si p y q tienen el mismo valor de verdad y es falso si tienen valores de verdad diferentes.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TEOREMA (Doble Implicación cómo una conjunción de implicaciones)

El bicondicional "p si, y solo si, q" es lógicamente equivalente a "Si p, entonces q; y si q, entonces p.". Es decir,

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Demostración Realizar la tabla de verdad de ambas formas proposicionales.

TEOREMA (Doble Implicación cómo una conjunción de implicaciones)

El bicondicional "p si, y solo si, q" es lógicamente equivalente a "Si p, entonces q; y si q, entonces p.". Es decir,

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Demostración Realizar la tabla de verdad de ambas formas proposicionales.

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$\boldsymbol{p \to p \wedge q \to r} \tag{1}$$

puede ser interpretada como $(\boldsymbol{p} \to (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})) \to \boldsymbol{r}$ o como $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}) \wedge (\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{r})$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas, dfíciles y tediosas de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos.

ORDEN DE OPERACIONES PARA OPERADORES LÓGICOS

1. $\neg$ Primero evaluar las negaciones.
2. $\wedge, \vee$ Evaluar $\wedge$ y $\vee$ en segundo lugar. Cuando ambos están presentes, es posible que se necesiten paréntesis.
3. $\rightarrow, \leftrightarrow$ Evaluar $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ en tercer lugar. Cuando ambos están presentes, es posible que se necesiten paréntesis.

EJERCICIO

Dar la interpretación correcta de

$$\boldsymbol{p \vee \neg r \leftrightarrow p \wedge q}$$

Además dar otra interpretación.

Conceptos

DEFINICIÓN (FUNCIONES PROPOSICIONALES)

Un *función proposicional* es una oración que contiene un número finito de variables y se convierte en una proposición cuando se sustituyen las variables por valores específicos. El dominio de una variable es el conjunto de todos los valores que pueden sustituirse en lugar de la variable.

EJEMPLO

Dada la función proposicional

$$P(x, y) : x + 2y = 5,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el dominio de la variable y es el conjunto $\{3, 4, 5\}$, escribir $P(2, 4)$ e indicar cuál es el valor de verdad de dicha proposición.

Solución

$$P(2, 4) : 10 = 5 \ F$$

EJEMPLO

Dada la función proposicional

$$P(x) : x^2 > x,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto de los número reales $(\mathbb{R})$, escribir $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, y además indicar cuáles son los valores de verdad de dichas proposiciones.

Solución

- $P(2) : 4 > 2$ *V*
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ *V*
- $P\left(\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ *F*

EJEMPLO

Dada la función proposicional

$$P(x) : x^2 > x,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto de los número reales ($\mathbb{R}$), escribir $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, y además indicar cuáles son los valores de verdad de dichas proposiciones.

Solución

- $P(2) : 4 > 2$ *V*
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ *V*
- $P\left(\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ *F*

EJEMPLO

Dada la función proposicional

$$P(x) : x^2 > x,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto de los número reales ($\mathbb{R}$), escribir $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, y además indicar cuáles son los valores de verdad de dichas proposiciones.

Solución

- $P(2) : 4 > 2$ V
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ V
- $P\left(\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ F

Definición (Conjunto de Verdad)

Si $P(x)$ es una función proposicional y x tiene dominio D, el *conjunto de verdad* de $P(x)$ es el conjunto de todos los elementos de D que hacen que $P(x)$ sea verdadero cuando se sustituye la variable x. El conjunto de verdad de $P(x)$ se denota

$$\{x \in D : P(x) \text{ es verdadero } \}.$$

Ejemplo

Dada la función proposicional

$$P(x, y) : x + 2y = 5,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el dominio de la variable y es el conjunto $\{3, 4, 5\}$, es fácil mostrar que el *conjunto de verdad* de la función proposicional anterior es

$$\{(1, 2)\}.$$

EJEMPLO

Dada la función proposicional

$$P(x) : x^2 > x,$$

donde el dominio de la variable x es el conjunto de los número reales ($\mathbb{R}$), es (**un poco más difícil**) mostrar que el *conjunto de verdad* de la función proposicional anterior es

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge x > 1\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) .$$

El símbolo $\forall$ se denomina cuantificador universal. Dependiendo del contexto, se lee como "para todo", "para cada", "para cualquiera", "dado cualquiera" o "para todos", entre otros.

DEFINICIÓN (PROPOSICIÓN UNIVERSAL)

Sea $P(x)$ una función proposicional y D el dominio de x. Una *proposición universal* es un proposición de la forma

$$\forall x \in D, P(x).$$

Se define como verdadero si, y sólo si, $P(x)$ es verdadero para cada x individual en D. Se define como falso si, y sólo si, $P(x)$ es falso para al menos un x en D. Un valor de x para el cual $P(x)$ es falso se denomina contraejemplo de la proposición universal.

EJEMPLO (Verdad y Falsedad de las afirmaciones universales)

Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Consideremos la proposición:

$$P(x) : \forall x \in D, x^2 > x.$$

   Escribir una forma de leer esta afirmación en voz alta y mostrar que es cierta.

2. Consideremos la proposición:

$$Q(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x.$$

   Encuentre un contraejemplo para mostrar que esta afirmación es falsa.

EJEMPLO (Verdad y Falsedad de las afirmaciones universales)

Solución

1. "Para todo x en el conjunto D, se tiene que el cuadrado de x es mayor o igual a x". Observemos que:

$$P(1) : 1 \geqslant 1 \ \textit{V}$$
$$P(2) : 4 \geqslant 2 \ \textit{V}$$
$$P(2) : 9 \geqslant 3 \ \textit{V}$$
$$P(2) : 16 \geqslant 4 \ \textit{V}$$
$$P(2) : 25 \geqslant 5 \ \textit{V}$$

Luego $P(x) : \forall x \in D, x^2 > x$, es*verdadera*.

Ejemplo (Verdad y Falsedad de las afirmaciones universales)

Solución

2. **Contraejemplo** La afirmación afirma que $x^2 \geqslant x$ para todo número real x. Pero si $x = \dfrac{1}{2}$ se tiene que

$$Q(\frac{1}{2}) : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \geqslant 1 \ \textit{F}$$

Luego $Q(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$, es *falsa*.

El símbolo $\exists$ se denomina cuantificador existencial. Dependiendo del contexto, se lee como “para algún”, “para al menos un”, o “existe un”, entre otros.

DEFINICIÓN (Proposición Existencial)

Sea $P(x)$ una función proposicional y D el dominio de x. Una *proposición existencial* es un proposición de la forma

$$\exists x \in D, P(x).$$

Se define como verdadero si, y sólo si, $P(x)$ es verdadero para al menos un x individual en D. Se define como falso si, y sólo si, $P(x)$ es falso para todo x en D.

Ejemplo (Verdad y Falsedad de las afirmaciones existenciales)

Sea $E = \{5, 6, 7, 8\}$ y $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

1. Consideremos la proposición:

$$P(m) : \exists m \in \mathbb{N}^*, m^2 = m.$$

   Escribir una forma de leer esta afirmación en voz alta y mostrar que es cierta.

2. Consideremos la proposición:

$$Q(m) : \exists m \in E, m^2 = m.$$

   Mostrar que esta afirmación es falsa.

EJEMPLO (VERDAD Y FALSEDAD DE LAS AFIRMACIONES EXISTENCIALES)

Solución

1. "Existe m entero positivo tal que su cuadrado es igual a sí mismo".
   Observemos que:
   $$P(1) : 1^2 = 1 \ \textit{V}$$
   Luego $P\exists m \in \mathbb{N}^*, m^2 = m$, es*verdadera*.

EJEMPLO (Verdad y Falsedad de las afirmaciones existenciales)

Solución

2. Notemos que

$$Q(5) : 5^2 = 25 \neq 5 \ F$$
$$Q(6) : 6^2 = 36 \neq 6 \ F$$
$$Q(7) : 7^2 = 49 \neq 7 \ F$$
$$Q(8) : 8^2 = 64 \neq 8 \ F$$

Luego $Q(m) : \exists m \in E, m^2 = m$, es *falsa*.

TEOREMA (Negación de una proposición universal)

La negación de un enunciado de la forma

$$\forall x \in D, P(x)$$

es lógicamente equivalente a

$$\exists x \in D, \neg P(x)$$

. Simbolicamente,

$$\neg\left(\forall x \in D, P(x)\right) \equiv \exists x \in D, \neg P(x)$$

TEOREMA (Negación de una proposición existencial)

La negación de un enunciado de la forma

$$\exists x \in D, Q(x)$$

es lógicamente equivalente a

$$\forall x \in D, \neg Q(x)$$

. Simbolicamente,

$$\neg\left(\exists x \in D, Q(x)\right) \equiv \forall x \in D, \neg P(x)$$

EJEMPLO (Negar proposiciones universales y existenciales)

Escriba negaciones formales para las siguientes afirmaciones:

1. Para todo primo p, p es impar.
2. Existe un triángulo T tal que la suma de los ángulos de T es igual a $200°$.

Solución

1. Existe un primo p tal que p no es impar. (¿Verdadero o Falso?)
2. Para todos los triángulos T, la suma de los ángulos de T no es igual a $200°$. (¿Verdadero o Falso?)

EJEMPLO (Negar proposiciones universales y existenciales)

Escriba negaciones formales para las siguientes afirmaciones:

1. Para todo primo p, p es impar.
2. Existe un triángulo T tal que la suma de los ángulos de T es igual a $200°$.

Solución

1. Existe un primo p tal que p no es impar. (¿Verdadero o Falso?)
2. Para todos los triángulos T, la suma de los ángulos de T no es igual a $200°$. (¿Verdadero o Falso?)

EJEMPLO (NEGAR PROPOSICIONES UNIVERSALES Y EXISTENCIALES)

Escriba negaciones formales para las siguientes afirmaciones:

1. Para todo primo p, p es impar.
2. Existe un triángulo T tal que la suma de los ángulos de T es igual a $200°$.

Solución

1. Existe un primo p tal que p no es impar. (¿Verdadero o Falso?)
2. Para todos los triángulos T, la suma de los ángulos de T no es igual a $200°$. (¿Verdadero o Falso?)

EJEMPLO (NEGAR PROPOSICIONES UNIVERSALES Y EXISTENCIALES)

Escriba negaciones formales para las siguientes afirmaciones:

1. Para todo primo p, p es impar.
2. Existe un triángulo T tal que la suma de los ángulos de T es igual a 200°.

Solución

1. Existe un primo p tal que p no es impar. (¿Verdadero o Falso?)
2. Para todos los triángulos T, la suma de los ángulos de T no es igual a 200°. (¿Verdadero o Falso?)

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática

2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción

3. Números complejos

CONCEPTOS

Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos